

Bất đẳng thức và bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là những dạng toán khó không chỉ trong các kì thi học sinh giỏi các cấp mà còn thường hay xuất hiện trong các kì tuyển sinh đại học, tuyển sinh vào lớp chuyên, lớp chọn.

Bài viết này xin nêu một số kĩ thuật cơ bản để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

1. Sử dụng kĩ thuật chọn “điểm rơi” của bất đẳng thức AM – GM (bất đẳng thức Cauchy).

Bất đẳng thức AM – GM (bất đẳng thức Cauchy) vốn rất quen thuộc với học sinh phổ thông và có rất nhiều ứng dụng. Phần này xin trình bày cách sử dụng kĩ thuật chọn “điểm rơi” (giá trị của (các) biến để xảy ra đẳng thức) của bất đẳng thức AM – GM trong việc chứng minh bất đẳng thức. Trước hết, xin nêu lại bất đẳng thức AM – GM

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Khi đó

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ hay } \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ta thường áp dụng bất đẳng thức AM – GM khi $n = 2, 3, 4$. Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta còn thu được các kết quả quan trọng sau: Cho a, b, c là các số thực dương, khi đó

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ hay } a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

$$(2) (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ hay } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(a + b + c).$$

$$(3) (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \text{ hay } \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

$$(4) (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \text{ hay } \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Việc xác định điều kiện của (các) biến để xảy ra đẳng thức trong bài toán bất đẳng thức rất quan trọng, nó sẽ giúp ta rất nhiều trong việc định hướng cách giải.

Để sử dụng kĩ thuật này ta cần kết hợp thêm kĩ thuật nhỏ sau đây:

Kĩ thuật thêm bớt: $A = A + B - B = \frac{A}{B} \times B = A.1.1\dots 1 = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{A}$, để tạo ra các biểu thức mới ở hai vế của bất đẳng thức mà ta có thể đánh giá được.

Kĩ thuật đổi biến: Một số bài toán có chứa căn thức, phân thức thì ta có thể đổi biến để dễ nhận thấy các mối quan hệ của các đại lượng, từ đó ta có định hướng cho lời giải. Chẳng hạn những phép thế đơn giản như $x := \sqrt{a}, x := \frac{1}{a}, \dots$

Sau đây là một số ví dụ. Ví dụ đầu tiên là một bất đẳng thức hết sức đơn giản.

Bài toán 1. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Phân tích lời giải. Nhận thấy rằng, vế trái của bất đẳng thức có chứa đơn thức và phân thức, vế phải có chứa căn thức (bậc hai), và để thấy đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$. Do đó, ta sẽ dùng bất đẳng thức AM – GM cho hai số x^2 và $\frac{1}{x}$, y^2 và $\frac{1}{y}$.

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{x}$; $y^2 + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{1}{y}} = 2\sqrt{y}$.

Cộng hai bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 2. Cho $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng $a + \frac{1}{a^2} \geq \frac{9}{2}$.

Phân tích lời giải. Ta nhận thấy, từ $0 < a \leq \frac{1}{2}$, ta có $\frac{1}{a^2} \geq 4$. Ngoài ra, khi $a = \frac{1}{2}$ thì đẳng thức ở (1) xảy ra và $\frac{a}{2} = \frac{1}{16a^2}$.

Lời giải. Do đó, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta nhận được

$$a + \frac{1}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{15}{16a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{16a^2}} + \frac{15}{16a^2} \geq \frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{2}.$$

Ta có thể giải bài toán trên bằng cách một cách khác nhưng rõ ràng lời giải trên khá gọn gàng và đẹp mắt sau khi ta xác định được “điểm rơi” là $a = \frac{1}{2}$.

Bài toán 3. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 14$.

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó $\frac{2}{ab} = 8$ và $\frac{3}{a^2 + b^2} = \frac{3}{1 - 2ab} = 6$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} = \frac{2}{ab} + \frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} = 2 \cdot \frac{1 - ab}{ab(1 - 2ab)} + \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Ta đề ý rằng $ab \leq \frac{1}{4}, a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2 = \frac{1}{2}, ab(1 - 2ab) = \frac{1}{2} \cdot 2ab(1 - 2ab) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Do đó

$$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} = 2 \cdot \frac{1 - ab}{ab(1 - 2ab)} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 14.$$

Bài toán 4. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 6$.

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $x = y = z = 0$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{3 + 4^x} \cdot \sqrt{3 + 4^y} \cdot \sqrt{3 + 4^z}} = 3\sqrt[6]{(3 + 4^x)(3 + 4^y)(3 + 4^z)}.$$

Mặt khác, $3 + 4^x = 1 + 1 + 1 + 4^x \geq 4\sqrt[4]{4^x}$. Do đó $(3 + 4^x)(3 + 4^y)(3 + 4^z) \geq 4^3 \sqrt[4]{4^x \cdot 4^y \cdot 4^z} = 4^3$ (vì $x + y + z = 0$).

Suy ra $\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 3\sqrt[6]{4^3} = 6$.

Bài toán 5. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $(1 + x) \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$.

Lời giải. Dự đoán điểm rơi: $x = 3, y = 9$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$1 + x = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3}, 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{y}{3x}\right)^3}, 1 + \frac{9}{\sqrt{y}} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^3}.$$

Do đó $(1 + x) \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 4^4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{3x}\right)^3 \left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^6} = 4^4 = 256$.

Bài toán 6. [Khối B_2007] Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $x = y = z$. Khi đó

$$P = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x} = 3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{3x^2}{2} = \frac{3}{2x}$ hay $x = 1$. Như vậy, điểm rơi có thể là $x = y = z = 1$.

Ta có $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Bài toán 7. [Khối A_2005] Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $x = y = z$. Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với mọi số thực dương a, b , ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Chứng minh tương tự cho các biểu thức còn lại, ta suy ra

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = 1.$$

Bài toán 8. [Japan, 2005] Cho a, b, c là các số thực dương, thỏa điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1 \quad (2)$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Khi đó $1+b-c = 1$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$a\sqrt[3]{1+b-c} = a\sqrt[3]{1.1.(1+b-c)} \leq a \cdot \frac{1+1+(1+b-c)}{3} = \frac{1}{3}(3a+ab-ac).$$

Chứng minh tương tự, ta nhận được $b\sqrt[3]{1+c-a} \leq \frac{1}{3}(3b+bc-ba)$, $c\sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{1}{3}(3c+ca-cb)$.

Cộng ba bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{1}{3}[3(a+b+c) + (ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)] = 1.$$

Bài toán 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq 3$.

Phân tích lời giải. Nhận thấy rằng, vế trái của bất đẳng thức có chứa (bậc ba), dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{4}$, khi đó, $a + 3b = 1$. Do đó, ta sẽ dùng bất đẳng thức AM – GM cho ba số $a + 3b, 1, 1$.

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b).1.1} \leq \frac{(a+3b)+1+1}{3} = \frac{a+3b+2}{3}$.

Chứng minh tương tự cho hai biểu thức còn lại, ta thu được

$$\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq \frac{a+3b+2}{3} + \frac{b+3c+2}{3} + \frac{c+3a+2}{3} = \frac{4(a+b+c)+6}{3} = 3.$$

Bài toán 10. [IMO, 1995] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$. Khi đó $\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{b+c}{4bc}$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Chứng minh tương tự, ta có $\frac{1}{b^3(c+a)} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$, $\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Cộng các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán 11. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $1+x^2 \geq 2x, 1+y^2 \geq 2y, 1+z^2 \geq 2z$. Do đó

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{x}{2x} + \frac{y}{2y} + \frac{z}{2z} = \frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, với mọi a, b, c dương, chú ý rằng $x + y + z \leq 3$, ta có

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán 12. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{z^2}{x+1} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y+1}{4} \geq x, \frac{y^2}{z+1} + \frac{z+1}{4} \geq y, \frac{z^2}{x+1} + \frac{x+1}{4} \geq z$.

Suy ra $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{z^2}{x+1} + \frac{x+y+z}{4} + \frac{3}{4} \geq x+y+z$ hay $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{z^2}{x+1} \geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

Bài toán 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$.

Phân tích lời giải. Giả thiết bài toán chứa các biến $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, nhưng bất đẳng thức cần chứng minh chỉ chứa a, b, c . Do đó, để chứng

minh bất đẳng thức, ta cần chuyển đại lượng $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thành a, b, c . Ta cần chứng minh

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{8}{abc}.$$

Lời giải. Sử dụng phép đổi biến $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, ta cần chứng minh $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8xyz$, trong đó $x + y + z = 3$.

Dự đoán điểm rơi: $x = y = z = 1$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $3 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1$.

Do đó $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} \cdot 2\sqrt{z} = 8\sqrt{xyz} \geq 8xyz$.

Bài toán 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Ta cần chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$, với $xyz = 1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1 \geq 3x$. Do đó $x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z)$ hay

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq (x + y + z) + 2[(x + y + z) - 3] \geq (x + y + z) + 2(3\sqrt[3]{xyz} - 3) = x + y + z.$$

Bài toán 15. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Ta cần chứng minh $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \geq x + y + z$, với $xyz = 1$.

Bổ đề: ta sẽ chứng minh $x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^{\frac{3}{2}} + 1 \geq 3x$. Đặt $t = x^{\frac{1}{2}}$, bất đẳng thức trên được viết lại dưới dạng

$$2t^3 + 1 \geq 3t^2 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) \geq 0.$$

Suy ra $2\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) + 3 \geq 3(x + y + z)$. Do đó, với chú ý rằng $x + y + z - 3 \geq 3\sqrt[3]{xyz} - 3 = 0$.

$$2\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) \geq (x+y+z-3) + 2(x+y+z) \geq 2(x+y+z) \text{ hay } x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \geq x+y+z$$

Bài toán 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Từ điều kiện, ta có $x + y + z = 1$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \sqrt{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có $\sqrt{x^2 + 2y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + y) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2y)$.

Với hai bất đẳng thức tương tự còn lại, suy ra $\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.3(x + y + z) = \sqrt{3}$.

Bài toán 17. Khối A_2006] Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Lời giải. Vì $x \neq 0, y \neq 0$ nên điều kiện của bài toán có thể được viết lại dưới dạng (chia hai vế cho đại lượng x^2y^2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$. Thực hiện phép đổi biến $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a^3 + b^3$ với điều kiện $a + b = a^2 + b^2 - ab$. Khi đó $A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)^2$. Sử dụng bất đẳng thức $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ta suy ra

$$a + b = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2.$$

Do đó $(a + b)^2 - 4(a + b) \leq 0$ hay $0 < a + b \leq 4$. Vì vậy $A \leq 16$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$ và $\max A = 16$.

Bài toán 18. [Khối A_2007] Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y+2z}\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z+2x}\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x+2y}\sqrt{y}}.$$

Lời giải. Để tiện cho việc trình bày lời giải, đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$. Khi đó $abc = 1$, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^4(b^2 + c^2)}{b^3 + 2c^3} + \frac{b^4(c^2 + a^2)}{c^3 + 2a^3} + \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^3 + 2b^3}.$$

Dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$, khi đó $M = 3$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $b^2 + c^2 \geq 2bc = \frac{2}{a} \Rightarrow a^4(b^2 + c^2) \geq 2a^3$.

Thực hiện việc tương tự cho các biểu thức còn lại trong biểu thức M , ta có $M \geq \frac{2a^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{2b^3}{c^3 + 2a^3} + \frac{2c^3}{a^3 + 2b^3}$.

Thực hiện phép đổi biến $m = b^3 + 2c^3, n = c^3 + 2a^3, p = a^3 + 2b^3$. Khi đó

$$a^3 = \frac{4n + p - 2m}{9}, b^3 = \frac{4p + m - 2n}{9}, c^3 = \frac{4m + n - 2p}{9}.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{9} \left(\frac{4n + p - 2m}{m} + \frac{4p + m - 2n}{n} + \frac{4m + n - 2p}{p} \right) = \\ &= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{n}{m} + \frac{p}{n} + \frac{m}{p} \right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{n} + \frac{n}{p} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4.3 + 3 - 6) = 2. \end{aligned}$$

2. Sử dụng các tính chất của hàm số, lượng giác, vector

Đối với các bài toán bất đẳng thức, bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có chứa một biến số (x hoặc a), ta thường giải bằng cách sử dụng đạo hàm với điều kiện ràng buộc của biến thuộc một miền xác định nào đó; nếu $x \in [-1, 1]$ thì ta có thể đặt $x = \sin \alpha, x = \cos \alpha$; nếu bài toán có chứa điều kiện $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$ thì ta có thể đặt $a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}$; với A, B, C là ba góc của một tam giác; nếu bài toán có chứa đại lượng $\sqrt{a^2 + b^2}$ thì ta có thể đặt $\vec{u} = (a, b)$; nếu bài toán có chứa điều kiện $a \geq b$ thì ta cần chuyển bài toán về dạng $f(a) \geq f(b)$ hoặc $f(a) \leq f(b)$, rồi xét sự đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, và lưu ý rằng, trong một số trường hợp, ta cần phép đổi biến để bài toán có dạng đơn giản hơn.

Bài toán 19. [Khối D_2003] Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải. Xét $x \in [-1; 2]$. Đạo hàm của hàm số này là $y' = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Giá trị của hàm số tại điểm tới hạn và điểm biên: $f(1) = \sqrt{2}, f(-1) = 0, f(2) = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\max_{[-1,2]} y = f(1) = \sqrt{2}, \min_{[-1,2]} y = f(-1) = 0$.

Bài toán 20. [Khối B_2003] Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

Lời giải. Tập xác định $[-2, 2]$. Đạo hàm của hàm số này là $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge 4-x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Giá trị của hàm số tại điểm tới hạn và điểm biên: $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, f(-2) = -2, f(2) = 2$.

Vậy $\max_{[-2,2]} y = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, \min_{[-2,2]} y = f(-2) = -2$.

Lưu ý: vì $x \in [-2, 2]$ nên ta có thể đặt $x = 2\cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$ hoặc $x = 2\sin \alpha, \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sau đó đưa bài toán về dạng lượng giác để giải.

Bài toán 21. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 + 4(1-x^2)^3$ trên đoạn $[-1, 1]$

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $t = x^2$. Vì $x \in [-1, 1]$ nên $t \in [0, 1]$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = t^3 + 4(1-t)^3 = -3t^3 + 12t^2 - 12t + 4.$$

Đạo hàm của hàm số này là $f'(t) = -9t^2 + 24t - 12$. Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3}$.

Giá trị của hàm số tại điểm tới hạn (chú ý $t \in [0, 1]$) và điểm biên: $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}, f(0) = 4, f(1) = 1$.

Vậy $\max_{[-1,1]} y = 4$ khi $t = 0$ hay $x = 0$, $\min_{[-1,1]} y = \frac{4}{9}$ khi $t = \frac{2}{3}$ hay $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lưu ý:

(1) Vì $x \in [-1, 1]$ nên ta có thể đặt $x = \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$ hoặc $x = \sin \alpha, \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sau đó đưa bài toán về dạng lượng giác để giải.

(2) Nếu đặt $y^2 = 1 - x^2$, thì bài toán được phát biểu dưới dạng: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x, y) = x^6 + 4y^6$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài toán 22. [Khối A_2003] Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Khi đó, $x^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{81x^2}$.

Sử dụng bất đẳng thức $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$, với mọi vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, áp dụng cho $\vec{a} = \left(x, \frac{1}{x}\right), \vec{b} = \left(y, \frac{1}{y}\right), \vec{c} = \left(z, \frac{1}{z}\right)$.

Ta nhận được $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$.

Từ bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, với $a, b, c > 0, t = x+y+z \leq 1$, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{t}$.

Suy ra $(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq t^2 + \frac{81}{t^2} = t^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \dots + \frac{1}{t^2} \geq 8282 \sqrt[t^2 \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right)^{81}]{} = 8282 \sqrt[t^{160}]{1} \geq 82$.

Do đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài toán 23. [Khối D_2007] Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$(1+4^a)^b \leq (1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b} \text{ hay } f(a) \leq f(b), \text{ trong đó } f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}.$$

Ta chú ý rằng, vì $a \geq b > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh hàm số này nghịch biến trong $(0, +\infty)$.

Thật vậy, đạo hàm của hàm số này là $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x) \ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Cuối cùng, mời các bạn rèn luyện kĩ thuật này qua các bài tập sau.

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+a} \leq 3\sqrt[3]{3}$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{(2a+b)(a+c)a} + \sqrt[3]{(2b+c)(b+a)b} + \sqrt[3]{(2c+a)(c+b)c} \leq 3\sqrt[3]{6}$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ và $(a^2+a+2)(b+1)^2(c^2+3c)=64$. Chứng minh rằng $a^3b^4c^5 \leq 1$.

Bài 4. Cho $a > b \geq 0$. Chứng minh rằng $2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geq 5$.

Bài 5. [Nesbitt] Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 6. [Cao Minh Quang] Cho $a, b, c \in [-2, 2]$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2} \leq 3\sqrt{3}$.

Bài 7. [Ioan Tomescu] Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \leq \frac{1}{7^4}$.

Bài 8. [IMO Short List, 1998] Cho $a, b, c > 0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$.

Bài 9. [Greece, 2007] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab+bc+ca.$$

Bài 10 [Poland, 1995] Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$

Bài 11 [Khối B_2004] Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+2xy}$.

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của abc .

Bài 14. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{1-a}} + \frac{b}{\sqrt{1-b}}$.

Bài 15. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} \geq 3 \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \right)$.

Bài 16. Cho $x, y \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Bài 17. Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{a^3}{b^3} + b^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{a}{b} + b$.

Bài 18. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$.

Bài 20. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}$.

Bài 21. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Bài 22. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 9$.

Bài 23. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq 3.$$

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1$$

Bài 25. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh rằng $8(a^4 + b^4) + \frac{1}{ab} \geq 5$.

Bài 26. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + ab} \geq 4$.

Bài 27. Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.

Bài 28. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$.

Bài 29. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.

Bài 30. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{x + y + z}{2xyz}$.