

VMF - GIẢI ĐỀ THỬ SỐ 03

Hôn thi: TOÁN Thời gian: 150 phút
Thí sinh: Phạm Hùng Vương. Nick VMF: h.vuong-pdl

Ngày tháng năm 2012

Bài làm:

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số: $y = x^4 + 2(m+1)x^2 - 3m$ (C).

1. Khảo sát về đồ thị hàm số khi $m = \frac{3}{2}$.

BL: Với $m = \frac{3}{2}$, ta có hàm số: $y = x^4 + 8x^2 - \frac{9}{2}$ (C).

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Sự biến thiên:

* Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2 + 4)$.
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

* Cực trị: hàm số có duy nhất một điểm cực trị là cực tiểu.
 $x = 0$, $y_{CT} = -\frac{9}{2}$.

* Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2x^4} \right) = +\infty$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	$-\frac{9}{2}$	$+\infty$

3. Đồ thị hàm số:

- Đồ thị hàm số (C) cắt trục tung Oy tại $A \left(0; -\frac{9}{2} \right)$.

Có: $f(x) = f(-x)$. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

Khảo sát trục Oy tìm trục đối xứng.

Đi qua một số điểm: $\left(1; \frac{9}{2} \right)$; $\left(-1; \frac{9}{2} \right)$.

2. Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

ĐL: Xét phương trình hoành độ:

$$x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta có phương trình:

$$t^2 + 2(2m+1)t - 3m = 0 \quad (2)$$

Để đồ thị cắt Ox tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 + 3m > 0 \\ S = t_1 + t_2 = -2(2m+1) > 0 \\ P = t_1 t_2 = -3m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 2m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{-4 - \sqrt{83}}{8}$$

Khi đó, giả sử $0 < t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của (2), thế thì các nghiệm của (1) là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Từ giả thiết $\Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 3 \cdot 2\sqrt{t_1}$

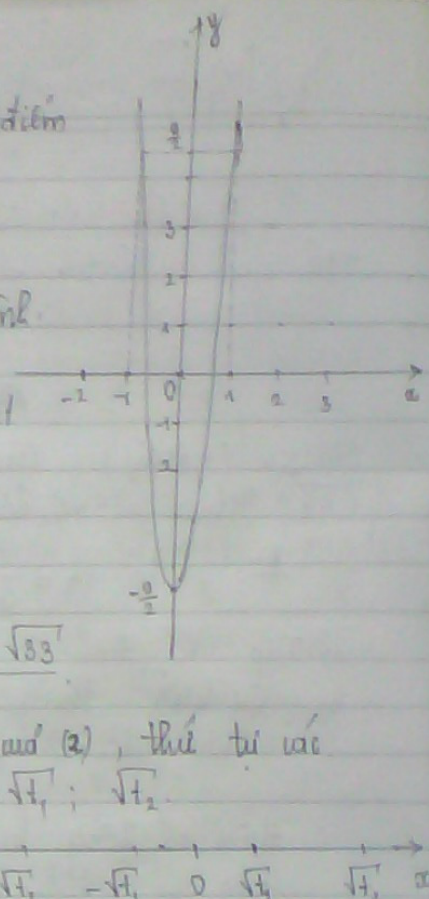
$$\Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Vậy, ta có hệ

$$\begin{cases} t_1 t_2 = -3m \\ t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = -2(2m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1^2 = -3m \\ t_2 = 9t_1 \\ 10t_1 = -2(2m+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2m+1}{5}\right)^2 = \frac{-m}{3} \Leftrightarrow m \begin{cases} m = -3 \\ m = -1/12 \end{cases}$$

Thử lại hệ và điều kiện thấy chỉ $m = -3$ thỏa mãn.
Kết luận: $m = -3$.



Chú ý (2 điểm) 2. Giải phương trình: $\cos^2 x + 2\cos 2x - \sin x + 4 = \sqrt{2 - \sin x}$

ĐL: Điều kiện: $2 - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2$ luôn đúng!

Ta có: $(4 - \sin^2 x) + 2(4 - 2\sin^2 x) - \sin x + 4 = \sqrt{2 - \sin x}$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 x + \sin x - 7 + \sqrt{2 - \sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5\sin^2 x + \sin x - 6) + (1 - \sqrt{2 - \sin x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1) \left(5\sin x + 6 - \frac{1}{1 + \sqrt{2 - \sin x}} \right) = 0 \quad (*)$$

Nhận xét: $|\sin x| \leq 1$ nên $5 + 5\sin x \geq 0$

và $\frac{1}{\sqrt{2-\sin x}+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 6 + 5\sin x - \frac{1}{1+\sqrt{2-\sin x}} > 0$.

Nên (*) $\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có họ nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 6x^3 \sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) \\ x + \frac{2}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2} \quad (*) \end{cases}$$

Giải: $x + \frac{2}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow (x-1)\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (x \neq 0)$.

Khi đó, hệ trở thành:
$$\begin{cases} 6x^3 \sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^3 \sqrt{(x-1)(x^2+x-5)} = (x^2+2x-6)(x^3+4)(1) \\ x \geq 1 \end{cases}$

Điều kiện vẩn thức có nghĩa: $x^2 + x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \\ x \leq \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$
do $x \geq 1$ nên $x \geq \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$

Khi đó: $2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2+x-5} \leq (x-1) + (x^2+x-5) = x^2+2x-6$.

nên từ (*) $\Rightarrow x^3 + 4 \leq 6x^2 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2$.

thử lại thấy $x = 2$ thỏa mãn hệ đã cho.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của hệ bất phương trình.

Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a , góc giữa hai mặt phẳng bên bằng α . Tính thể tích khối chóp.

Bài giải: Đặt $SA = SB = SC = b$.

Kể $OM \perp SC \Rightarrow SC \perp mp(AMB)$. Đặt $AM = MB = x \quad (x > 0)$.

thì $x < a \Rightarrow$ trong $\triangle AMB$ tồn tại M thì $\widehat{AMB} < 90^\circ$

Từ giả thiết $\Rightarrow |\cos \widehat{AMB}| = \cos \alpha$; $\sin \alpha = \sin \widehat{AMB}$

Trong ΔAMB , áp dụng định lý (b. sin, ta

$$\text{có } AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \widehat{AMB}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2-2\cos \widehat{AMB}}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

Mặt khác, H là trung điểm BC
thì $AH \perp BC$, ta có

$$\Delta BMC \sim \Delta SHC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BM}{SH} = \frac{MC}{HC} = \frac{BC}{SC}$$

$$\Rightarrow SC = \frac{BC \cdot HC}{MC} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} \text{ hay } b = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} \quad (2)$$

$$\text{Vậy } V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot S_{ABM} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin \widehat{AMB} = \frac{1}{6} b x^2 \sin \alpha$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow b = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2-2\cos \widehat{AMB}}{1-2\cos \widehat{AMB}}}$$

$$V_{ABCS} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2-2\cos \widehat{AMB}}{1-2\cos \widehat{AMB}}} \cdot \frac{a^2}{2-2\cos \widehat{AMB}} \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{a^3 \sin \alpha}{12 \sqrt{(1-2\cos \widehat{AMB})(2-2\cos \widehat{AMB})}} \quad \text{Với } |\cos \widehat{AMB}| = \cos \alpha$$

Hay, nếu $a < a\sqrt{2} < a\sqrt{2}$ thì $\widehat{AMB} = \alpha$

$$V_{ABCS} = \frac{a^3 \sin \alpha}{12} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} (1-2\cos \alpha)} = \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{12 (1-2\cos \alpha)}$$

Nếu $0 < a\sqrt{2} < a$ thì $\widehat{AMB} + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \widehat{AMB}$

$$V_{ABCS} = \frac{a^3 \sin \alpha}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+2\cos \alpha)(2+2\cos \alpha)}} = \frac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{12 (1+2\cos \alpha)}$$

Câu 40a/ (x điểm). Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số có
hàng số đó có một đúng 2 chữ số 0.

Giải: Ta thực hiện các công việc.

V_1 : chọn 2 vị trí bất kỳ trong số có 5 chữ số, thì 2

[illegible]

→ $\frac{d}{dt} \frac{d^2}{dt^2}$ with ~~the~~ the form.

TH2: Chọn 1 trong 4 số 2, 4, 6, 8 là chữ số cuối cùng. Với mỗi cách chọn đó:

+ chọn 2 vị trí bất kỳ cho chữ số 0 và đoán vị trí của nó
 còn lại cho 9 số (từ 1 đến 9) là $C_9^2 \cdot 9^2$ cách.

→ g^0 thì $\vec{v}$ là $\vec{v}^0$ thoả mãn là $4(C_4^0 \cdot g^2 - C_3^0 g^2) = g^2$ với

5. Từ giá thể, (C_1) và (C_2) năm cũng một phía so với trục Ox .

Giải: Với mỗi điểm $c \in O_x$. Kẻ cát

Tuyển tập bài CMN theo

$$CH_3CN = I_2 C^+ - O^-$$

C là thì CN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CN lớn nhất hay CN đi qua tâm I .
 Tức là với mỗi C , CB nhỏ nhất $\Leftrightarrow B$ là giao của đoạn
 thẳng I_2C với đường tròn (C_2) . Tương tự, để CA nhỏ
 nhất thì A là giao của đoạn thẳng I_1C với (C_1) .
 (với $I_2(0;2)$ và $R_2=1$ là tâm và bán kính của (C_2)).

Khi đó $CA + CB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (CA+1) + (CB+2)$ nhỏ nhất
 hay $CI_1 + CI_2$ nhỏ nhất. Bài toán quy về tìm điểm C trên
 Ox sao cho $CI_1 + CI_2$ nhỏ nhất (I_1, I_2 đã biết).

Gọi I_2' đối xứng I_2 qua trục $Ox \Rightarrow I_2'(6;-4)$
 Khi đó $CI_2 = CI_2'$ do $C \in Ox$.

$\Rightarrow CI_2 + CI_1 = CI_1 + CI_2' \geq I_1I_2' = 6\sqrt{2}$.
 Do đó $CI_2 + CI_1$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow C$ là
 giao của I_1I_2' với trục Ox .

Phương trình đường thẳng qua I_1, I_2' là $0 \quad C$
 $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-2}{-4-2} \Leftrightarrow 6x + 6y - 12 = 0$

Nên tọa độ (x) C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x, y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;0).$$

Khi đó: $CA = 2\sqrt{2}$, $\vec{CI_1} = (-2; 2) = 2(-1; 1) \Rightarrow$ phương trình
 đường thẳng CI_1 là $(x-0) + (y-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.

Giao điểm của CI_1 với đường tròn (C_1) là:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ (x^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Do $A \in CI_1 \cap (C_1)$ và $CA < CI_1$, nên $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Tương tự: ta tìm được

$$B = (6 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$$

Vậy $C(2;0)$; $B(6 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$ và $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

thì $CA + CB$ đạt GTNN và bằng $6\sqrt{2} - 3$.

2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các phương trình tương ứng là: $2x - y + 2z - 1 = 0$ và $2x - y + 2z + 5 = 0$. Điểm $A(-1; 1; 1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu bất kỳ qua A và tiếp xúc với 2 mp $(P_1), (P_2)$. Gọi I là tâm mặt cầu S . Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định tọa độ của tâm bán kính và đường tròn đó.

Giải: Hai mp (P_1) và (P_2) song song với nhau. Xét mặt phẳng (α) qua $M(x; y; z)$ song song với tích đôi (P_1) và (P_2) . Ta có:

$$\frac{|2x - y + 2z - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2x - y + 2z + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \Leftrightarrow 2x - y + 2z + 2 = 0$$

I là tâm mặt cầu $S \Rightarrow I \in mp(\alpha)$. Giả sử $I(a; b; c)$ thì $2a - b + 2c + 2 = 0$. Bán kính của mặt cầu:

$$R = d(I, (P_1)) = d(I, A) \Rightarrow \frac{|2a - b + 2c - 1|}{\sqrt{9}} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2}$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 1$$

Vậy điểm I luôn thuộc một đường tròn cố định là:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \quad (C).$$

Đường tròn (C) là giao của mp (α) với mặt cầu $(A; 1)$.
(~~thì~~) $I \in (-$ Gọi $(I; r)$ là tâm và bán kính của (C) ta có:

$$AI \perp mp(\alpha) \text{ và } AI = d(A, (\alpha)) = \frac{|2(-1) - 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Phương trình đường thẳng AI nhận $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (A)$$

$\Rightarrow I$ là nghiệm của hệ phương trình: $I = (A) \cap mp(\alpha)$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \\ 9t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{11}{9}; \frac{10}{9}; \frac{4}{9}\right)$$

Câu III (1 điểm). Tính tích phân: $I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x-x^2}}$

Giải: Cho: $-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow -1 \leq x+1 \leq 1$.

Đặt $x+1 = \sqrt{2} \sin t$ $\begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline t & -\frac{\pi}{4} & 0 \end{array}$

$\Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Khi đó, ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sqrt{2} \cos t dt}{1 + \sqrt{2-2\sin^2 t}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sqrt{2} \cos t}{1 + \sqrt{2} \cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos t}\right) dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 1 dt - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\sqrt{2} \cos t + 1} dt = \frac{\pi}{4} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos t} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin\left[\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right] - \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\cos t + \cos \frac{\pi}{4}} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \ln\left|\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 - 1 \cdot \ln\left|\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0$$

$$= \frac{\pi}{4} + 1 \ln\left|\cos \frac{\pi}{8}\right| - 0 - \left(1 \ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Thí sinh: Phạm Hùng Vương. Lớp 12C₁, trường THPT Phan Đăng Lưu Yên Thành, Nghệ An !!!