Đáp án đề thi thử số 3

Ngày 19 tháng 1 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m$ có đồ thị là (C).

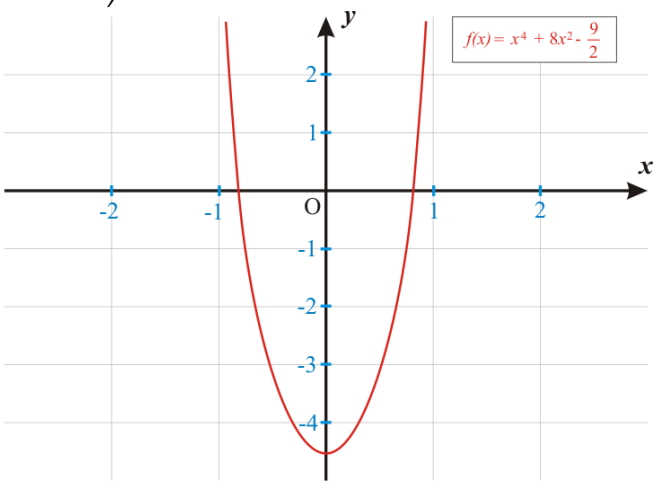
1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên với $m = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải : Với $m = \dfrac{3}{2}$, ta có : $y = x^4 + 8x^2 - \dfrac{9}{2}$

- Tập xác định : $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên :
  + Chiều biến thiên :
    – Ta có : $y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2+4)$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
    – Trong $(-\infty; 0)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.
    – Trong $(0; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.
  + Cực trị : Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\min} = 0$; $y_{\min} = -\dfrac{3}{2}$
  + Giới hạn : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
  + Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị hàm số :
  + Đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.
  + Đồ thị cắt trục Oy tại $\left(0; -\dfrac{9}{2}\right)$ và cắt trục Ox tại 2 điểm $\left(\sqrt{-4+\sqrt{\dfrac{41}{2}}}; 0\right)$ và $\left(-\sqrt{-4+\sqrt{\dfrac{41}{2}}}; 0\right)$.



□

2. Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

Lời giải : Hoành độ giao điểm của (C) và Ox là nghiệm của phương trình : $x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m = 0$
Đặt $t = x^2$ ta có :

$$t^2 + 2(2m+1)t - 3m = 0 \tag{1}$$

Điều kiện cần và đủ để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt là phương trình (1) có 2 nghiệm dương. Điều này tương đương với :

$$\begin{cases} (2m+1)^2 + 3m & > 0 \\ -3m & > 0 \\ -(2m+1) & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{7+\sqrt{33}}{8} \tag{2}$$

Với điều kiện (2), đồ thị (C) cắt Ox tại 4 điểm $(-a;0)$,$(-b;0)$,$(b;0)$,$(a;0)$ $(0 < b < a)$. Vì (C) nhận Oy là trục đối xứng nên yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$a = 3b \Leftrightarrow a^2 = 9b^2 \tag{3}$$

Dễ thấy : $a^2 = -(2m+1) + \sqrt{4m^2+7m+1}; b^2 = -(2m+1) - \sqrt{4m^2+7m+1}$
Do đó : (3) $\Leftrightarrow 8(2m+1) = -10\sqrt{4m^2+7m+1} \Rightarrow 36m^2 + 111m + 9 = 0$
$\Rightarrow m = -3; m = -\dfrac{1}{12}$
Kết hợp với điều kiện (2) ta có $m = -3$. □

Câu II ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình :

$$\cos^2 2x + 2\cos 2x - \sin x + 4 = 2\sqrt{2 - \sin x} \tag{4}$$

Lời giải : (4) $\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)^2 = -\left(\sqrt{2-\sin x} - 1\right)^2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x + 1 = 0 \\ \sqrt{2-\sin x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$ □

2. Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) \\ x + \dfrac{2}{x} \geq 1 + \dfrac{2}{x^2} \end{cases} \tag{5}$$

Lời giải : Ta có $x + \frac{2}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2}$, do đó $x + \frac{2}{x} \geq 1$. Ta dẫn đến các bước kéo theo liên tiếp :

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ \Rightarrow & x^3 + 4 > 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 2x - 6 > 0 \\ \Rightarrow & x > \sqrt{7} - 1. \end{aligned}$$

Khi đó ta lần lượt có các nhận xét sau :

$$\sqrt{x^3 - 6x + 5} = \sqrt{(x-1)(x^2 + x - 5)} \leq \frac{1}{2}(x - 1 + x^2 + x - 5) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 6)$$

$$x^2 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2}.\frac{x^3}{2}.4} \leq \frac{1}{3}(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + 4) = \frac{1}{3}(x^3 + 4)$$

Từ đó suy ra : $6x^2\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4)$.

Đẳng thức xảy ra khi : $x - 1 = x^2 + x - 5$ và $\frac{x^3}{2} = 4$, hay $x = 2$ $\left(\text{thỏa mãn } x + \frac{2}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2}\right)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x = 2$. □

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

Lời giải : Đặt $\sqrt{1 - 2x - x^2} = tx - 1$ suy ra :

$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow t = -1 \\ x = -1 &\Rightarrow t = -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Mặt khác $\Rightarrow x = \frac{2(t-1)}{1+t^2}$ nên $dx = \frac{-2(t^2 - 2t - 1)}{(1+t^2)^2}dt$.

Ta có :

$$I = \int_{-1}^{(-1-\sqrt{2})} \frac{-2(t^2-2t-1)}{(1+t^2)^2}.\frac{1+t^2}{2t(t-1)}dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{(t^2-2t-1)}{t(t-1)(t^2+1)}dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t} - \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t-1} + \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{2dt}{t^2+1}$$

$$\Leftrightarrow I = \ln|t|\Big|_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} - \ln|t-1|\Big|_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} + 2J \quad \left(\text{Với : } J = \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow I = 0 - \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 2 + \ln(4+2\sqrt{2}) + 2J$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}\ln 2 + 2J$$

Xét tích phân

$$J = \int_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t^2+1}$$

Đặt $t = \tan y$. Ta có :

$$dt = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = -1-\sqrt{2}$$

Do đó :

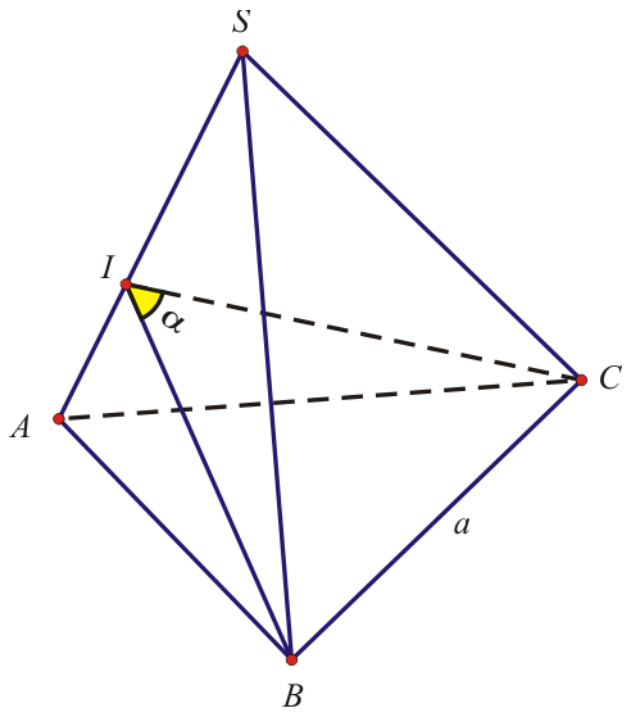
$$J = \int_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos^2 y.\frac{dy}{\cos^2(y)} = \int_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} dy$$

$$\Leftrightarrow J = y\Big|_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

Vậy $I = -\frac{1}{2}\ln 2 + 2J = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$ □

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt bên bằng α. Tính thể tích khối chóp.

Lời giải : Giả sử khối chóp $S.ABC$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt phẳng chứa cạnh BC và vuông góc với SA cắt SA ở I. Theo giả thiết $\widehat{BIC} = \alpha$.



Ta có :

$$V_{S.ABC} = V_{S.IBC} + V_{A.IBC} = \frac{1}{3}.S_{BIC}(SI + IA) = \frac{1}{3}.S_{BIC}.SA$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác BIC cân tại I, ta có :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{BI}{\sin C} \Rightarrow BI = \frac{a.\sin C}{\sin\alpha} = \frac{a.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Vậy :

$$S_{BIC} = \frac{1}{2}IB.IC.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4.\sin^2\frac{\alpha}{2}}.2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4}\cot\frac{\alpha}{2}$$

Xét tam giác SAB cân ở S, ta có :

$$\frac{1}{2}SA^2.\sin(\pi - 2\widehat{A}) = \frac{1}{2}SA.BI$$

$$\Rightarrow SA = \frac{BI}{\sin 2\widehat{SAB}} = \frac{BI}{2\dfrac{BI}{AB}.\sqrt{1-\dfrac{BI^2}{AB^2}}} = \frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}$$

Do đó :

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\cot\frac{\alpha}{2}.\frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}} = \frac{a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}$$

□

Câu V(1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện : $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c}$$

Lời giải : Dự đoán giá trị lớn nhất xảy ra khi $a = b = c = 1$. Dựa vào đó ta sẽ chứng minh một "ước lượng" sau :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x + g(x) \le 0 \ \forall x > 0,$$

trong đó $g(x)$ là hàm thoả mãn điều kiện $f(1) = 0$ và $f'(1) = 0$ (điều kiện cần để cho hàm $f(x)$ đạt max tại $x = 1$).

Ta có :

$$f(1) = g(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2} + g'(x) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + g'(1) = 0 \Rightarrow g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dễ thấy $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln x$ thoả mãn cả hai điều kiện trên. Như vậy, ta sẽ chứng minh bổ đề :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln x \le 0 \ \forall x > 0 \tag{6}$$

Thật vậy, ta có : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (2x-1)\sqrt{2x^2+2}}{2x\sqrt{x^2+1}}$

Do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = (2x-1)\sqrt{2x^2+2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 = (2x-1)^2(x^2+1) \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right)=0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Nhận xét về dấu của $f'(x)$:

- Nếu $0<x\le\frac{1}{2}$ thì $2x^2-(2x-1)\sqrt{2x^2+2}>0$. Điều này kéo theo $f'(x)>0,\ \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.
- Nếu $\frac{1}{2}<x<1$ thì $(x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right)<0$. Điều này kéo theo $2x^4>(2x-1)^2(x^2+1)$ hay $f'(x)>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.
- $f'(1)=0$.
- Nếu $x>1$ thì $(x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right)>0$. Điều này kéo theo $2x^4<(2x-1)^2(x^2+1)$ hay $f'(x)<0,\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Từ nhận xét trên ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $f(x)\le f(1)=0,\ \forall x>0$ (bổ đề được chứng minh).
Áp dụng bổ đề (6) ở trên ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} &\le \sqrt{2}(a+b+c)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln a+\ln b+\ln c)\\ &=\sqrt{2}(a+b+c)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln abc\\ &=\sqrt{2}(a+b+c)\end{aligned}$$

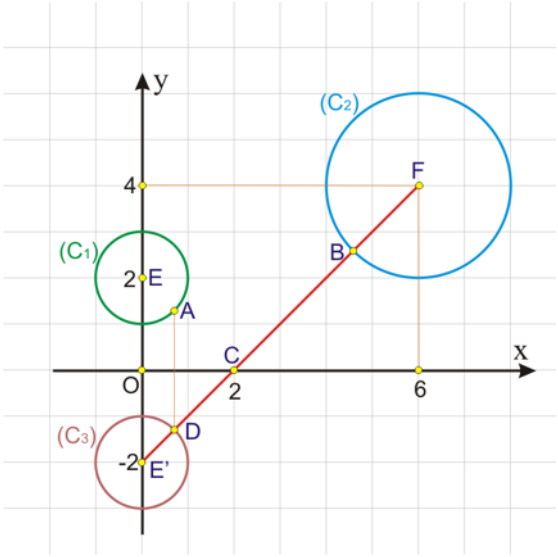
$\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c}\le\sqrt{2}$.
Vậy $\max P=\sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1): x^2+(y-2)^2=1$ và $(C_2): (x-6)^2+(y-4)^2=4$. Tìm điểm A trên (C_1), điểm B trên (C_2) và điểm C trên trục Ox sao cho tổng $AC+CB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải :



Ta có : (C_1) là đường tròn có tâm $E\,(0;2)$ bán kính 1. (C_2) là đường tròn có tâm $F\,(6;4)$ bán kính 2.
Gọi D là điểm đối xứng của A qua trục Ox thì $AC + CB = DC + CB$.
Gọi (C_3) là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_1) qua Ox thì D nằm trên (C_3) tâm $E'\,(0;-2)$ có phương trình là $(C_3) : x^2 + (y+2)^2 = 1$.
Dễ thấy rằng $DC + CB$ ngắn nhất khi và chỉ khi D và B là giao điểm của đoạn $E'F$ với (C_3) và (C_2).
Do $\overrightarrow{E'F} = (6;6)$ nên đường thẳng $E'F$ có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \end{cases}$
Thay vào phương trình (C_3), chú ý $x_D > x_{E'}$, ta được $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Suy ra :

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C\,(2;0)\,.$$

Thay vào phương trình (C_2), chú ý $x_B < x_F$, thu được $B\left(6-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right)$.
Vậy $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(6-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right)$, $C\,(2;0)$. □

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có các phương trình tương ứng là $(P_1) : 2x - y + 2z - 1 = 0$; $(P_2) : 2x - y + 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi S là mặt cầu bất kì qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Gọi I là tâm của mặt cầu S. Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định toạ độ của tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải : Ta có $(P_1), (P_2)$ có cùng vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}\,(2;-1;2)$ suy ra $(P_1) // (P_2)$.
Theo giả thiết thì $I\,(x;y;z)$ thuộc $mp\,(\alpha)$ cố định cách đều hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

Khi đó : $d(I,(P_1)) = d(I,(P_2))$. Suy ra $\dfrac{|2x-y+2z-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{|2x-y+2z+5|}{\sqrt{4+1+4}} \Leftrightarrow$ $mp(\alpha) : 2x-y+2z+2=0$.

Gọi r là bán kính mặt cầu (S) thì $r = IA = d(I,(P_1))$ suy ra $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2} = \dfrac{|2x-y+2z-1|}{3} = 1$.

hay I thuộc mặt cầu $(S') : (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$.

Mặt khác A là tâm của mặt cầu (S') và $d(A,(\alpha)) = \dfrac{|2(-1)-1.1+2.1|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{1}{3} < 1$, do đó I thuộc giao của $mp(\alpha)$ và mặt cầu (S') là đường tròn cố định (C) : $\begin{cases} 2x-y+2z+2=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

Gọi K và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) thì $AK \perp mp(\alpha)$, $AK = d(A,(\alpha)) = \dfrac{1}{3}$

Từ đó $R = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Phương trình đường thẳng AK nhận $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương là

$$(AK) : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Suy ra $K(-1+2t; 1-t; 1+2t)$.

Mặt khác $K \in mp(\alpha) \Rightarrow 2(-1+2t)-(1-t)+2(1+2t)+2=0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{9}$.

Do đó $K\left(-\dfrac{11}{9}; \dfrac{10}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$. □

Câu VII.a (1 điểm) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số, trong số đó có mặt đúng hai chữ số 0.

Lời giải : Gọi số cần lập là $x = \overline{abcde}$. Vì x là số chẵn nên $e \in \{0,2,4,6,8\}$. Ta xét hai trường hợp :

- $e = 0$
  - Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.
  - Trong 3 chữ số $\overline{bcd}$ có đúng 1 chữ số 0 và 2 chữ số bất kỳ khác 0. Nên :
    - Có 3 cách chọn vị trí cho chữ số 0.
    - Có 9^2 cách chọn 2 chữ số bất kỳ khác 0.

  Vậy trường hợp này chọn được tổng cộng : $9.3.9^2 = 2187$ số thoả mãn.
- $e \in \{2,4,6,8\}$
  - Có 4 cách chọn e.
  - Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.
  - Trong 3 chữ số $\overline{bcd}$ có đúng 2 chữ số 0 và 1 chữ số bất kỳ khác 0. Nên :
    - Có $C_3^2 = 3$ cách chọn vị trí cho 2 chữ số 0.
    - Có 9 cách chọn 1 chữ số bất kỳ khác 0.

Vậy trường hợp này chọn được tổng cộng : $4.9.3.9 = 972$ số thoả mãn.
Tổng cộng có tất cả : $2187 + 972 = 3159$ số chẵn có 5 chữ số mà trong số đó có mặt đúng 2 chữ số 0.

□

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(-1,0)$ và đường tròn (C) : $x^2+(y+1)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích $\triangle OAB$ đạt giá trị lớn nhất.

   Lời giải : Xét đường thẳng đi qua $M(-1,0)$ và song song Oy : $x = -1$ rõ ràng đây không phải là đường thẳng (d) cần tìm vì nó chỉ cắt (C) tại duy nhất một điểm có toạ độ là $(-1,-1)$.
   Đường thẳng (d) đi qua $M(-1,0)$ (không song song với Oy) có phương trình là : (d) : $y = -kx - k$; $k \neq 0$.
   Ta có : $(d) \cap (C)$ tại các điểm A, B có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = -kx - k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-kx - k + 1)^2 = 1 \\ y = -kx - k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+k^2)x^2 + 2(k^2 - k)x + k^2 - 2k = 0 \\ y = -kx - k \end{cases}$$

   Xét phương trình $(1+k^2)x^2 + 2(k^2-k)x + k^2 - 2k = 0$, ta có :
   $\Delta' = (k^2-k)^2 - (1+k^2)(k^2-2k) = 2k > 0 \Rightarrow k > 0$
   $\Rightarrow x_{A;B} = \dfrac{k - k^2 \pm \sqrt{2k}}{1+k^2}$; $\quad y_{A;B} = \dfrac{-k - k^2 \pm \sqrt{2k}}{1+k^2}$
   Suy ra diện tích $\triangle OAB$ là S_{OAB} :

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{1}{2}\left|x_A y_B - x_B y_A\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{k - k^2 + \sqrt{2k}}{1+k^2}.\frac{-k - k^2 - \sqrt{2k}}{1+k^2} - \frac{k - k^2 - \sqrt{2k}}{1+k^2}.\frac{-k - k^2 + \sqrt{2k}}{1+k^2}\right| \\ &= \frac{k\sqrt{2k}}{1+k^2} = f(k) \end{aligned}$$

   Để tìm giá trị lớn nhất của $f(k)$, ta có hai cách giải quyết :
   – Cách 1
   Ta có : $f^2(k) = \dfrac{2k^3}{1+2k^2+k^4}$ Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) ta có : $9\dfrac{k^4}{9} + 6\dfrac{k^2}{3} + 1 \geq 16\sqrt[16]{\dfrac{k^{36}.k^{12}}{3^{18}.3^6}} = \dfrac{16k^3}{\sqrt{27}} \Rightarrow f(k) \leq \dfrac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1 = \dfrac{k^2}{3} = \dfrac{k^4}{9} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

– Cách 2

Khảo sát hàm $f(k)$ với $k > 0$, ta có :

$f\,'(k) = \dfrac{\sqrt{k}(3-k^2)}{\sqrt{2}(1+k^2)^2} \Rightarrow f\,'(k) = 0 \Rightarrow k = \sqrt{3}$

Lập bảng xét dấu $f\,'(k)$ trong khoảng $(0, +\infty)$ suy ra $\max\limits_{(0,+\infty)} f(k) = f(\sqrt{3})$.

Vậy phương trình của đường thẳng cần tìm là

$$(d) : y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

□

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, điểm $M(1; -3; 0)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' nằm trong (P) sao cho d' vuông góc với d và M cách d' một khoảng bằng $\sqrt{42}$.

Lời giải : Dễ thấy : $M = (d) \cap (P)$. Gọi $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{n}; \overrightarrow{v}$ lần lượt là vector chỉ phương của (d), vector pháp tuyến của (P), vector chỉ phương của (d').

Ta có : $\overrightarrow{u} = (2; 1; -1)$; $\overrightarrow{n} = (1; 1; 1)$ và

$$\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{u}; \overrightarrow{n}] = (2; -3; 1).$$

Gọi M' là hình chiếu của M lên (d'). Khi đó, M' thuộc đường thẳng Δ nằm trong (P) và vuông góc với (d'). vector chỉ phương của Δ là :

$$\overrightarrow{w} = [\overrightarrow{n}; \overrightarrow{v}] = (4; 1; -5)$$

Vậy : $\overrightarrow{MM'} = (4t; t; -5t), t \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$M'M = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{16t^2 + t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow |t| = 1$$

Với $t = -1$ ta có đường thẳng :

$$(d') : \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}.$$

Với $t = 1$ ta có đường thẳng :

$$(d') : \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}.$$

□

Câu VII.b (1 điểm) Một người đàn ông có 5 cái áo trắng, 7 cái áo đen, 6 cái quần trắng, 5 cái quần đen, 8 cái cà vạt trắng, 7 cái cà vạt đen và 4 cái cà vạt vàng. Ông ta chọn ngẫu nhiên mỗi thứ ra 2 cái (2 cái áo, 2 cái quần và 2 cái cà vạt). Tính xác suất để 6 thứ chọn ra đó tìm được ít nhất một bộ (áo, quần, cà vạt) cùng màu.

Lời giải : Ta quy ước các ký hiệu viết tắt sau : $AT \rightarrow$ Áo trắng ; $AD \rightarrow$ Áo đen ; $QT \rightarrow$ Quần trắng ; $CV \rightarrow$ Cà vạt vàng ;... ;$|AT, AT| \rightarrow$ số trường hợp chọn được 2 áo trắng ; v.v..

Phép thử của ta gồm 3 hành động chọn :

1. Hành động 1 : Chọn 2 cái áo trong $5 + 7 = 12$ cái áo, có $C_{12}^2 = 66$ cách.
2. Hành động 2 : Chọn 2 cái quần trong $6 + 5 = 11$ cái quần, có $C_{11}^2 = 55$ cách.
3. Hành động 3 : Chọn 2 cái cà vạt trong $8 + 7 + 4 = 19$ cái cà vạt, có $C_{19}^2 = 171$ cách.

Như vậy số phần tử của không gian mẫu là $|E| = 66.55.171 = 620730$.

1. Trong 66 kết cục của hành động 1, ta có :
   – $|AT, AT| = C_5^2 = 10$ trường hợp
   – $|AT, AD| = 5.7 = 35$ trường hợp
   – $|AD, AD| = C_7^2 = 21$ trường hợp
2. Trong 55 kết cục của hành động 2, ta có :
   – $|QT, QT| = C_6^2 = 15$ trường hợp
   – $|QT, QD| = 6.5 = 30$ trường hợp
   – $|QD, QD| = C_5^2 = 10$ trường hợp
3. Trong 171 kết cục của hành động 3, ta có :
   – $|CT, CT| = C_8^2 = 28$ trường hợp
   – $|CT, CD| = 8.7 = 56$ trường hợp
   – $|CD, CD| = C_7^2 = 21$ trường hợp
   – $|CT, CV| = 8.4 = 32$ trường hợp
   – $|CD, CV| = 7.4 = 28$ trường hợp
   – $|CV, CV| = C_4^2 = 6$ trường hợp.

Gọi X là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ đen", Y là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ trắng" và Z là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ cùng màu".

Như vậy ta có : $|Z| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

Mặt khác :

$$\begin{aligned}
|X| &= (35 + 21).(30 + 10).(56 + 21 + 28) = 235200 \\
|Y| &= (10 + 35).(15 + 30).(28 + 56 + 32) = 234900 \\
|X \cap Y| &= 35.30.56 = 58800
\end{aligned}$$

Do đó : $|Z| = 235200 + 234900 - 58800 = 411300$ trường hợp.

Vậy xác suất cần tính là $P(Z) = \dfrac{|Z|}{|E|} = \dfrac{411300}{620730}$ (≈ 0.66). □