TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

GIÁO TRÌNH

NHẬP MÔN HÀM PHỨC

TẠ LÊ LỢI - 2004

Nhập môn hàm phức

Tạ Lê Lợi

Mục lục

Chương IV. Kỳ dị - Thặng dư

Tài liệu tham khảo

[1] Ahlfors L., *Complex Analysis* , 2 ed., McGraw Hill, NewYork 1966.
[2] Cartan H., *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes* , Hermann, Paris 1961.
[3] Lang S.., *Complex Analysis*, Springer-Verlag,, 1990.
[4] Sabat B.V., *Nhập môn giải tích phức* , NXB. ĐH& THCN, Hà nội 1974.
[5] Spiegel M.R., *Theory and Problems of Complex Variables* , McGraw Hill, NewYork 1981.
[6] Volkovuski L.I. & al., *Bài tập lý thuyết hàm biến phức* , NXB. ĐH& THCN, Hà nội 1979.

I. Số phức - Hàm phức

1. SỐ PHỨC

Trên trường số thực, khi xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ trường hợp $b^2 - 4ac < 0$ phương trình vô nghiệm vì ta không thể lấy căn bậc hai số âm. Vào thế kỷ XVI các nhà toán học đã biết cách giải phương trình trong trường hợp này bằng cách "làm đầy" tập các số thực bởi căn bậc hai số âm. Đã có nhiều tranh cãi xảy ra, một số nhà toán học phủ nhận sự tồn tại căn số âm, một số nhà toán học khác lại sử dụng chúng cùng với số thực với những lập luận không chặt chẽ. Mãi đến thế kỷ XIX, nhà toán học Na uy Wessel đưa ra cách biểu diễn hình học số phức, rồi Hamilton đưa ra cách biểu diễn đại số, làm cơ sở cho việc tiên đề hệ thống số này. Việc đưa vào hệ thống số phức đã đóng góp nhiều trong việc phát triển toán học và khoa học tự nhiên.

Ta sẽ xây dựng tập các số phức $\mathbf{C}$ như là mở rộng tập số thực $\mathbf{R}$ sao cho mọi phương trình bậc hai, chẳng hạn $x^2 + 1 = 0$, có nghiệm; đồng thời định nghĩa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia sao cho $\mathbf{C}$ là một trường số.

1.1 Định nghĩa. Ký hiệu i, gọi là **cơ số ảo**, để chỉ nghiệm phương trình $x^2 + 1 = 0$, i.e. $i^2 = -1$. Tập số phức là tập có dạng:

$\mathbf{C} = \{z = a + ib : \ a, b \in \mathbf{R}\}$.

$z = a + ib$ gọi là số phức, $a = \mathrm{Re}z$ gọi là phần thực còn $b = \mathrm{Im}z$ gọi là phần ảo.

$z_1, z_2 \in \mathbf{C}, z_1 = z_2$ nếuu[1] $\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2,\ \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$.

Ta xem $\mathbf{R}$ là tập con của $\mathbf{C}$ khi đồng nhất $\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Im}z = 0\}$.
Từ "số ảo" sinh ra từ việc người ta không hiểu chúng khi mới phát hiện ra số phức. Thực ra số phức rất "thực" như số thực vậy.

Ví dụ.
a) Số phức $z = -6 + i\sqrt{2}$ có phần thực` $\mathrm{Re}z = -6$, phần ảo $\mathrm{Im}z = \sqrt{2}$.
b) Để giải phương trình $z^2 + z + 1 = 0$, ta biến đổi $z^2 + z + 1 = (z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Vậy phương trình tương đương $(z + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$. Một cách hình thức, ta suy ra nghiệm $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Sau đây là định nghĩa các phép toán vừa thực hiện.

1.2 Các phép toán. Về mặt đại số $\mathbf{C}$ là trường số với các phép toán được định nghĩa như sau:

Phép cộng. $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

[1] Trong giáo trình này: **nếuu** = **nếu và chỉ nếu**.

Từ đây có **phép trừ** $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

Phép nhân. Với chú ý là $i^2=-1$ phép nhân được định nghĩa
$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
Còn **phép chia** $\dfrac{a+ib}{c+id}$, với $c+id\neq 0+i0$, được định nghĩa một cách tự nhiên khi giải phương trình $a+ib=(c+id)(x+iy)$.
Hay là

$$\begin{cases} cx-dy &= a\\ dx+cy &= b\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\quad (c+id\neq 0=0+i0)$.

Tính chất. *Với các phép toán trên* $\mathbf{C}$ *là trường số.*

Nhắc lại trường số có nghĩa là:
Phép cộng và nhân vừa định nghĩa ở trên có tính giao hoán, kết hợp và phân phối.
Phép cộng có phần tử không là $0=0+i0$, phần tử đối của $z=a+ib$ là $-z=-a-ib$.
Phép nhân có phần tử đơn vị là $1=1+i0$, nghịch đảo của $z=a+ib\neq 0$ là $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Phép liên hợp. $\bar{z}=a-ib$ gọi là **số phức liên hợp** của $z=a+ib$.

Tính chất. $\bar{\bar{z}}=z,\ \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.$

Ví dụ.
a) Nếu $z=a+ib$, thì $z\bar{z}=a^2+b^2$. Từ đó có thể chia 2 số phức bằng cách nhân số liên hiệp, chẳng hạn
$\dfrac{2-5i}{3+4i}=\dfrac{(2-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{6-23i+20i^2}{3^2-4^2i^2}=\dfrac{-14-23i}{25}$
b) Từ định nghĩa suy ra: $\bar{z}+z=2\mathrm{Re}z,\quad \bar{z}-z=2i\mathrm{Im}z$, và $\quad z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow \bar{z}=z$.
c) Nếu α là nghiệm của đa thức với hệ số thực $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, thì $\bar{\alpha}$ cũng là nghiệm. Thực vậy, vì $P(\alpha)=0$ nên $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$. Lấy liên hợp ta có $\bar{a}_0+\bar{a}_1\bar{\alpha}+\cdots+\bar{a}_n\bar{\alpha}^n=0$. Với chú ý là $\bar{a}_k=a_k$, ta suy ra $P(\bar{\alpha})=0$.

Modul số phức. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ gọi là **modul** của số phức $z=a+ib$.

Tính chất. $|z|^2=z\bar{z},\quad |\mathrm{Re}z|\leq|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leq|z|.$

$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ **(bất đẳng thức tam giác)** .

Chứng minh: Các bất đẳng thức ở hàng đầu là hiển nhiên. Ta chứng minh các kết luận ở các hàng sau.
Trớc hết, ta có $|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{z_1z_2}=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2=z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2=|z_1|^2|z_2|^2$.
Suy ra $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.
Để chứng minh bất đẳng thức tam giác, dựa vào định nghĩa và các tính chất nêu ở

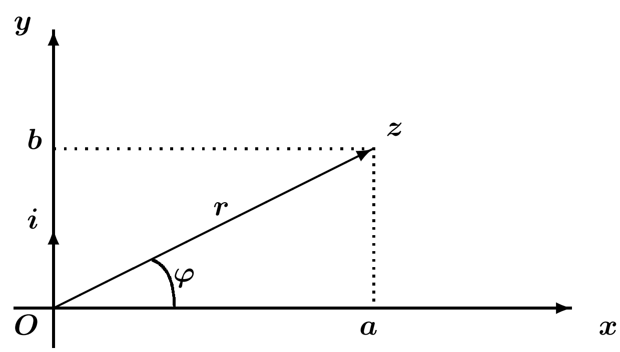
phần trên ta có

$$\begin{array}{rcl} |z_1+z_2|^2 & = & (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2}) \\ & = & z_1\bar{z_1}+z_2\bar{z_2}+2\text{Re}z_1\bar{z_2} \end{array}$$

Dùng bất đẳng thức $|\text{Re}z_1\bar{z_2}| \leq |z_1\bar{z_2}| = |z_1||z_2|$, thay vào $|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$. Suy ra $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. □

Ví dụ. Nếu $z_2 \neq 0$, thì từ $\dfrac{z_1}{z_2}z_2 = z_1$ ta có $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2| = |z_1|$. Vậy $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
Qui nạp ta có $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

1.3 Biểu diễn số phức.



Dạng đại số. $z = a+ib,\quad a,b \in \mathbf{R},\quad i^2=-1.$

Dạng hình học. $z=(a,b),\quad a,b\in\mathbf{R}.$
Trong mặt phẳng đa vào hệ tọa trục Descartes với $1=(1,0), i=(0,1)$ là 2 vector cơ sở. Khi đó mỗi số phức $z=a+ib$ được biểu diễn bởi vector (a,b), còn $\mathbf{C}$ được xem là toàn bộ mặt phẳng, gọi là **mặt phẳng phức**. Trong phép biểu diễn này phép cộng số phức được biểu thị bởi phép cộng vector hình học.

Dạng lượng giác. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,
là biểu diễn số phức $z=a+ib$ trong tọa độ cực (r,φ), trong đó ta có các quan hệ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & r\cos\varphi \\ b & = & r\sin\varphi \end{array}\right. \quad \text{và} \quad \left\{\begin{array}{lcl} r & = & |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{là } \textbf{modul} \text{ của } z \\ \varphi & = & \text{Arg}\, z, \quad \text{gọi là } \textbf{argument} \text{ của } z \end{array}\right.$$

φ là góc định hướng tạo bởi $1=(1,0)$ và z trong mặt phẳng phức. Vậy nếu $z\neq 0$, thì $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ta thấy φ có vô số giá trị sai khác nhau $2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. Nếu qui ước lấy giá trị $-\pi<\varphi\leq\pi$, thì giá trị duy nhất đó gọi là **giá trị chính** và ký hiệu là arg$z$. Vậy có thể viết

$$\text{Arg}z = \text{arg}z + 2k\pi, \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Ví dụ. $z=\sqrt{3}-i$ có modul $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$, còn argument $\text{arg}z = -\frac{\pi}{3}$ suy từ $\text{Re}z>0$ và $\text{tg}\,\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Vậy $\sqrt{3}-i = 2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

Dạng Euler. $z = re^{i\varphi}$.
Trong giải tích thực ta biết biểu diễn chuỗi $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Thay một cách hình thức $x = i\varphi$, và sắp xếp các từ, ta có

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{i\varphi^5}{5!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \cdots) + i(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots (-1)^{n+1} \frac{\varphi^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots) \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{(do khai triển Taylor của hàm cos và sin).} \end{aligned}$$

Từ đó có biểu diễn Euler cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Việc chứng minh tính hợp lý của biến đổi trên sẽ được trình bày ở chương sau.
Euler đã tìm ra hệ thức quan hệ tuyệt đẹp giữa các số $1, 0, e, \pi$ và i: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Mỗi cách biểu diễn số phức có thuận tiện riêng. Sau đây là một số ứng dụng.

1.4 Tính chất. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ và $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$
Suy ra **công thức de Moivre**

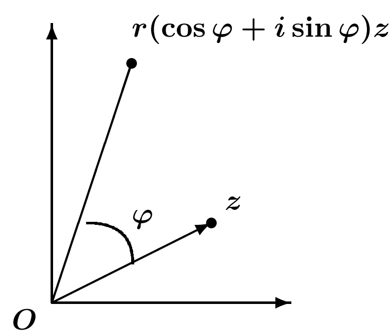
$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}$$

Chứng minh: Biểu diễn $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Ta có

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Suy ra $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$, và $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. □

Nhận xét. Về mặt hình học phép nhân số phức $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với số phức z là phép co dãn vector z tỉ số r và quay góc φ. (xem hình vẽ)



1.5 Căn bậc n của số phức. Định nghĩa **căn bậc** n ($n \in \mathbf{N}$) của số phức z là số phức w thoả $w^n = z$.
Để xác định w, biểu diễn $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$ và $w = \rho e^{i\theta}$.
Từ công thức de Moivre $\rho^n e^{in\theta} = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$.

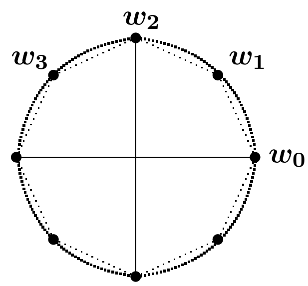
Suy ra

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} & \text{(căn bậc } n \text{ theo nghĩa thực)} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, & k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có đúng n nghiệm phân biệt với mỗi $z \neq 0$:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})), \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

Nhận xét. Ta thấy mỗi số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n khác nhau. Về mặt hình học chúng là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh, nội tiếp đường tròn tâm 0 bán kính $\sqrt[n]{r}$.



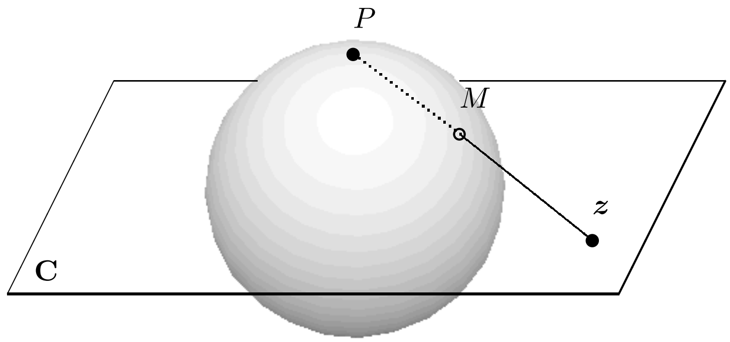
$w^n = 1$, với $n = 8$

Ví dụ.
a) **Căn bậc n của đơn vị** là n số phức: $1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$, với

$$\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k = 0, \cdots, n-1.$$

b) Để tìm các gía trị của $\sqrt[3]{1+i}$, ta biểu diễn $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
Suy ra $\sqrt[3]{1+i} = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})), \ k \in \mathbf{Z}$.
Vậy có 3 giá trị phân biệt là:
$k = 0, \ w_0 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$
$k = 1, \ w_1 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$
$k = 2, \ w_2 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12}))$

1.6 Biểu diễn cầu. Trong nhiều bài toán để thuận tiện người ta đưa vào khái niệm điểm ở vô cùng. Khi đó ta xét đến **mặt phẳng phức mở rộng** : $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, với ∞ gọi là **điểm vô cùng** (là một điểm lý tưởng không thuộc **C**).
$\overline{\mathbf{C}}$ được mô tả bởi mặt cầu Riemann, qua phép chiếu nổi như sau:



Trong $\mathbf{R}^3$ với hệ tọa độ (x, y, u), ta đồng nhất $\mathbf{C}$ với mặt phẳng $\{u = 0\}$.
Mặt cầu $\mathbf{S} : x^2 + y^2 + u^2 = 1$, được gọi là **mặt cầu Riemann** . Gọi $P = (0, 0, 1)$ là điểm cực bắc.
Xét phép **chiếu nổi**: $\mathbf{S} \setminus \{P\} \ni M \mapsto z \in \mathbf{C} = \{u = 0\}$, với z là điểm nằm trên tia PM. Biểu thức cụ thể: $M = (x, y, u) \mapsto z = \dfrac{x + iy}{1 - u}$.
Phép chiếu nổi từ P xác định một đồng phôi (i.e. song ánh liên tục hai chiều) từ $\mathbf{S} \setminus \{P\}$ lên $\mathbf{C}$. Nếu cho tương ứng P với ∞, ta có thể mô tả $\overline{\mathbf{C}}$ như là mặt cầu $\mathbf{S}$.
Nhận xét. Tương tự, nếu thực hiện phép chiếu nổi từ điểm cực nam $P' = (0, 0, -1)$ lên mặt phẳng $\{u = 0\}$, ta có $M(x, y, u) \mapsto z' = \dfrac{x - iy}{1 + u}$. Khi đó $zz' = 1$. Như vậy khi xét tại lân cận ∞, dùng biến đổi $z' = \dfrac{1}{z}$, ta đa về xét tại lân cận 0.

2. SỰ HỘI TỤ TRONG C

Ngoài cấu trúc đại số trên $\mathbf{C}$ còn có cấu trúc hình học. Khái niệm xuất phát là khoảng cách, nó đa đến khái niệm hội tụ và vì vậy có thể "làm" giải tích trên $\mathbf{C}$. Cũng cần lưu ý rằng nếu xem $\mathbf{C}$ như $\mathbf{R}^2$, thì mọi kết qủa nêu ở phần này đều không có gì đặc biệt so với trường hợp thực.

2.1 Khoảng cách. **Khoảng cách** giữa $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, định nghĩa:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Từ tính chất của modul suy ra 2 tính chất cơ bản của khoảng cách.
Tính chất. $d(z_1, z_2) \geq 0$ và $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_2, z_3)$.

2.2 Dãy hội tụ. Một dãy số phức là ánh xạ $z : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C}$, $n \mapsto z(n) = z_n$
Thường ta ký hiệu $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$, hay liệt kê: $z_1, z_2, z_3, \cdots$.
Dãy (z_n) gọi là **hội tụ về** $z_0 \in \mathbf{C}$, nếuu

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : n \geq N \Rightarrow d(z_n, z_0) = |z_n - z_0| < \epsilon$$

Khi đó, ký hiệu $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ hay $z_n \to z_0$ (khi $n \to \infty$).

Từ việc xem $\mathbf{C}$ như là $\mathbf{R}^2$, định nghĩa trên thực chất không khác định nghĩa hội tụ trong $\mathbf{R}^2$, và vì vậy ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề.
(1) $z_n \to z_0$ *khi và chỉ khi* $\mathrm{Re} z_n \to \mathrm{Re} z_0$ *và* $\mathrm{Im} z_n \to \mathrm{Im} z_0$.
(2) *Dãy* (z_n) *hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy, i.e.*
$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$.

Bài tập: Tương tự như dãy số thực, hãy phát biểu và chứng minh các tính chất hội tụ của tổng, hiệu, tích, thương các dãy số phức.

Ví dụ. [2]
a) Cho $z \in \mathbf{C}$. Ta muốn xét sự hội tụ của dãy $(z^n) = z, z^2, z^3, \cdots$.
Với $|z| < 1$ thì $|z^n| = |z|^n \to 0$, vậy $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.
Với $|z| > 1$ thì $|z^n| = |z|^n \to \infty$, vậy $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$.
Với $|z| = 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 1$ nếu $z = 1$, và $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$ không tồn tại nếu $z \neq 1$.
Thực vậy, gỉa sử phản chứng tồn tại $z \neq 1$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = z_0$. Khi đó $|z_0| = |z^n| = 1$, nên $z_0 \neq 0$. Mặt khác, do $z^{n+1} - z^n = z^n(z-1)$, nên nên khi $n \to \infty$, ta có $0 = z_0(z-1)$. Vậy $z = 1$, trái gỉa thiết.
b) Từ công thức $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = 1 - z^{n+1}$, ví dụ trên suy ra:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty}(1+z+z^2+\cdots+z^n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n + 6i) = ?$.

Bài tập: Ví dụ a) và c) ta có **giới hạn vô cùng** , $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, mà định nghĩa khái niệm này một cách chính xác chắc không khó đối với người đọc (nhớ là $\overline{\mathbf{C}}$ chỉ có *một* điểm vô cùng ∞, không có $\pm\infty$ như $\mathbf{R}$).

2.3 Một số tập cơ bản. Trong $\mathbf{C}$ một số lớp tập có vai trò quan trọng, hay được đề cập đến thường xuyên. Các khái niệm này ta đã quen biết khi xét $\mathbf{R}^2$, tuy nhiên để thuận tiện, ít ra về mặt thuật ngữ và ký hiệu, các định nghĩa được liệt kê sau đây.
ϵ-lân cận. Tập $D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$ gọi là **ϵ- lân cận của z_0**, hay **đĩa mở tâm z_0 bán kính ϵ.**
ϵ-lân cận thủng. Tập $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ gọi là **ϵ- lân cận thủng của** z_0.
Điểm trong. $z_0 \in \mathbf{C}$ gọi là **điểm trong** của tập $X \subset \mathbf{C}$ nếuu tồn tại một ϵ-lân cận của z_0 hoàn toàn chứa trong X.
Điểm giới hạn. $z_0 \in \mathbf{C}$ gọi là **điểm giới hạn** của tập $X \subset \mathbf{C}$ nếuu mọi ϵ-lân cận thủng của z_0 đều chứa các điểm của X.
Điểm biên. $z_0 \in \mathbf{C}$ gọi là **điểm biên** của tập X nếuu mọi ϵ-lân cận của z_0 đều chứa các điểm của X và các điểm không thuộc X.
Tập mở. Tập con của $\mathbf{C}$ gọi là **mở** nếuu mọi điểm của nó đều là điểm trong. Ký

[2]Một số vấn đề trong lý thuyết đồ họa liên quan đến dãy số phức, cụ thể là Hình học Fractal. Có thể xem: H.Q.Deitgen & P.H. Richter, *The Beauty of Fractals* , Spriger-Verlag, Berlin-Heidelberg 1986.

hiệu $\overset{\circ}{X}$ hay int$X$ thường được dùng để chỉ **phần trong** của tập X, i.e. tập mọi điểm trong của X.
Tập đóng. Tập con của $\mathbf{C}$ gọi là **đóng** nếuu nó chứa mọi diểm giới hạn của nó. Thường dùng ký hiệu $\overline{X}$ hay cl$X$ để chỉ **bao đóng** của tập X, i.e. tập $X\cup$ tập mọi điểm giới hạn của X.
Biên. Biên của tập X, ký hiệu ∂X hay bd$X$, là tập mọi điểm biên của X.
Tập compact. compact = đóng + giới nội.
Định nghĩa trên về tập compact cho phép xác định một cách dễ dàng một tập có compact hay không. Tập compact còn có định nghĩa tương đương (Định lý Heine-Borel 2.4), như vậy có thể xem tính compact như tính hữu hạn, cho phép chuyển các tính chất, các kết qủa từ địa phương lên toàn cục. Chẳng hạn, tính liên tục đều trong định lý Cantor 3.5.
Tập liên thông. Tập liên thông là tập chỉ có một mảnh. Định nghĩa một cách chính xác thì một tập $C\subset\mathbf{C}$ gọi là **liên thông** nếuu nó không thể bị tách bởi các tập mở, i.e. không tồn tại 2 tập mở $U,V\subset\mathbf{C}$ sao cho: $C\cap U\neq\emptyset\neq C\cap V$, $C\cap U\cap V=\emptyset$ và $C\subset U\cap V$.
Bài tập: Chứng minh khẳng định sau, thường dùng để lập luận mọi điểm của một tập liên thông thỏa tính chất nào đó:

Cho C liên thông và $X\subset C$. Nếu X vừa đóng vừa mở trong C , thì $X=C$.

Miền. Miền = tập mở + liên thông.
Bài tập: Chứng minh tiêu chuẩn sau trực quan dùng để nhận biết tập D là miền:

Cho $D\subset\mathbf{C}$ là tập mở. Khi đó D là miền khi và chỉ khi mọi cặp điểm $a,b\in D$ đều tồn tại đường gấp khúc trong D nối a,b.

Ví dụ. Tập S gọi là **hình sao** nếuu tồn tại $z_0\in S$ sao cho với mọi $z\in S$ đoạn thẳng nối z,z_0 : $[z,z_0]=\{z_0+t(z-z_0):0\le t\le 1\}$ hoàn toàn chứa trong S. Dễ thấy mọi tập hình sao là liên thông. Chẳng hạn, đĩa, hình chữ nhật, tam giác là các tập liên thông.

2.4 Các định lý. Các định lý cơ bản sau được chứng minh trong giáo trình giải tích thực:

Định lý (Cantor). *Cho $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$ là một dãy các tập compact lồng nhau. Khi đó giao $\cap_{k\in\mathbf{N}}F_k\neq\emptyset$.*

Định lý (Heine-Borel) *K là tập compact khi và chỉ khi mọi phủ mở phủ K đều tồn tại phủ con hữu hạn, i.e. với mọi họ $(U_k)_{k\in I}$ gồm các tập mở U_k sao cho $K\subset\cup_{k\in I}U_k$, tồn tại hữu hạn chỉ số $k_1,\cdots,k_n\in I$, sao cho $K\subset U_{k_1}\cup\cdots\cup U_{k_n}$.*

3. HÀM PHỨC - TÍNH LIÊN TỤC

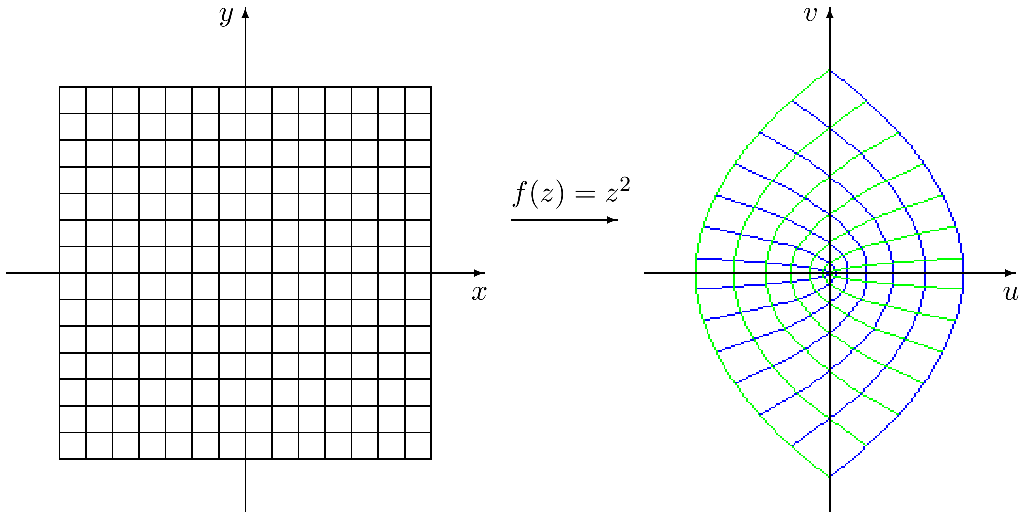
3.1 Định nghĩa. Một ánh xạ $f:D\longrightarrow\mathbf{C}$, $D\subset\mathbf{C}$, được gọi là một hàm phức.

D gọi là miền xác định, còn $f(D)$ gọi là miền ảnh.[3]
Thường ta viết $w = f(z), z \in D$, với qui ước $z = x + iy$ là biến, còn $w = u + iv$ là ảnh.
Chú ý:
a) Như trong trường hợp thực, khi cho $w = f(z)$ bởi biểu thức giải tích ta xem miền xác định là miền trong $\mathbf{C}$ sao cho biểu thức $f(z)$ có nghĩa (phức). Chẳng hạn, hàm $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ có miền xác định là $\mathbf{C} \setminus \{\pm i\}$.
b) Từ **hàm đơn diệp** trong lý thuyết hàm phức dùng để chỉ hàm đơn ánh, (điều này do lịch sử để lại). Chẳng hạn, hàm $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$, là đơn diệp trên miền $z \in \mathbf{C}, cz + d \neq 0$.
c) Trong lý thuyết hàm phức còn gặp thuật ngữ **hàm đa trị**, chẳng hạn biểu thức $f(z) = \sqrt[n]{z}$ xác định n giá trị ứng với mỗi $z \neq 0$. Ta sẽ dùng khái niệm hàm thông thường (hàm đơn trị), còn hiện tượng đa trị có những cách khắc phục để đưa về xét hàm đơn trị sẽ được đề cập sau.

3.2 Hàm phức xem như phép biến đổi trên $\mathbf{R}^2$. Đối với hàm thực việc nghiên cứu đồ thị có vai trò đặc biệt quan trọng vì tính trực quan. Đồ thị hàm phức là tập con trong không gian 4 chiều, thật khó hình dung. Để mô tả hàm phức một cách hình học có một phương pháp khá trực quan là xem hàm đó như là phép biến đổi từ $\mathbf{R}^2$ vào $\mathbf{R}^2$.
Cho hàm $w = f(z), z \in D$. Nếu $z = x + iy$, $w = u + iv$, thì $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Như vậy hàm f đồng nhất với cp hàm thực 2 biến thực $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$
Ta nói: z chạy trong mặt phẳng $z = (x, y)$, còn $w = f(z)$ chạy trong mặt phẳng ảnh $w = (u, v)$.
Để xét tính chất hàm f thường ta "quét" miền D bởi họ đường cong trong mặt phẳng z và xem họ đó biến đổi thế nào qua f trong mặt phẳng w.

Ví dụ. Xét hàm $w = z^2 = x^2 + y^2 + 2xyi$. Ta có hàm xác định trên toàn bộ $\mathbf{C}$ và $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$.
Cách mô tả 1: Ảnh của họ đường thẳng $x = x_0$ là họ Parabol $v^2 = 4x_0^2(x_0^2 - u)$, ảnh của họ $y = y_0$ là họ Parabol $v^2 = 4y_0^2(y_0^2 + u)$. (xem hình)
Cách mô tả 2: Trong mặt phẳng z đưa vào tọa độ cực (r, φ); trong mặt phẳng w có tọa độ cực (ρ, θ). Khi đó $z = re^{i\varphi},\ w = \rho e^{i\theta} = r^2 e^{i2\varphi}$.
Vậy ảnh của tia $\varphi = \varphi_0$ là tia $\theta = 2\varphi_0$, ảnh của đường tròn $r = r_0$ là đường tròn $\rho = r_0^2$.
Về mặt hình học hàm $w = z^2$ được mô tả nh việc mở gấp đôi các góc trong mặt phẳng.

[3]Theo thói quen, người ta thường nói "hàm $f(z)$", dù rằng không chính xác.



3.3 Giới hạn hàm. Cho hàm $w = f(z), z \in D$ và $z_0 \in \overline{D}$.
f được gọi là có giới hạn $w_0 \in \mathbf{C}$ khi z tiến về z_0, và ký hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, nếuu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Về mặt hình học: $f(z)$ thuộc vào đĩa tâm w_0 bán kính ϵ khi z nằm trong đĩa thủng tâm z_0 bán kính δ.
Về mặt hình thức: định nghĩa trên hoàn toàn giống định nghĩa hội tụ trong trường hợp hàm thực. Do vậy các kết qủa sau đây là tự nhiên mà chứng minh chúng chỉ là việc phiên dịch.

Mệnh đề.
(1) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{z \to z_0} \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re} w_0$, $\lim\limits_{z \to z_0} \mathrm{Im} f(z) = \mathrm{Im} w_0$.
(2) *Nếu tồn tại* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_f$ *và* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_g$, *thì các hàm* $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ $(w_g \neq 0)$, $|f|$, $\arg f$ *là có giới hạn khi* z *tiến về* z_0 *và các giới hạn đó lần lượt là* $w_f \pm w_g$, $w_f w_g$, $\dfrac{w_f}{w_g}$, $|w_f|$, $\arg w_f$.

3.4 Hàm liên tục. Hàm $w = f(z)$, $z \in D$, gọi là liên tục tại $z_0 \in D$ nếuu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
Từ định nghĩa và nhận xét ở phần trên, các tính chất: tổng, hiệu, tích, thương, modul, argument, hợp,... các hàm liên tục được dễ dàng phát biểu và chứng minh.

3.5 Các định lý về hàm liên tục. Sau đây là các định lý cơ bản của hàm liên tục, chúng được chứng minh ở giáo trình giải tích thực.

Định lý(Cauchy). *Hàm f liên tục trên tập liên thông D thì ảnh $f(D)$ là liên thông.*

Định lý(Weierstrass). *Hàm f liên tục trên tập compact K thì ảnh $f(K)$ là tập compact. Đặc biệt, tồn tại $z_1, z_2 \in K$ sao cho* $f(z_1) = \max\limits_{z \in K} |f(z)|$ *và* $f(z_2) = \min\limits_{z \in K} |f(z)|$.

Định lý(Cantor) *Hàm liên tục trên tập compact thì liên tục đều.*

Khái niệm **liên tục đều** hoàn toàn như trường hợp thực: hàm $w = f(z), z \in D$ gọi là liên tục đều trên D nếuu
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall z, z' \in D, |z - z'| < \delta \implies |f(z) - f(z')| < \epsilon.$

Để kết thúc chương này, ta nêu một chứng minh (có thể xem là sơ cấp nhất) về **tính đóng đại số** của trường số phức.

3.6 Định lý cơ bản của đại số.
Mọi đa thức hệ số phức, khác hằng đều có nghiệm (phức).
Mọi đa thức $P(z)$ bậc n trên $\mathbf{C}$, đều có thể phân tích thành thừa số bậc nhất:

$$P(z) = A(z - z_1)\cdots(z - z_n), \quad \textit{với } A, z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$$

Chứng minh: Cho $P(z)$ là đa thức bậc n trên $\mathbf{C}$. Xét hàm

$$f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}, f(z) = |P(z)|$$

Vì f liên tục và $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = +\infty$, nên tồn tại $z_0 : f(z_0) = \inf f$.
Gỉa sử phản chứng là P vô nghiệm. Khi đó $f(z_0) \neq 0$. Chia đa thức ta có

$$P(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + (z - z_0)^{k+1}Q(z), \quad \text{với} \ \ a_0 = P(z_0) \neq 0, a_k \neq 0$$

Gọi $h^k = -\epsilon\dfrac{a_0}{a_k}$, với $\epsilon > 0$ bé, i.e. h là một căn bậc k của $-\epsilon\dfrac{a_0}{a_k}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) = |P(z_0 + h)| &\leq |a_0 - \epsilon a_0| + |h\epsilon\frac{a_0}{a_k}Q(z_0 + h))| \\ &< |a_0| - \epsilon|a_0| + O(\epsilon\sqrt[k]{\epsilon}) \ < |a_0| \quad \text{khi } \ \epsilon \text{ đủ bé }. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của z_0. □

II. Chuỗi lũy thừa - Hàm giải tích

1. CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC

1.1 Định nghĩa. **Chuỗi lũy thừa hình thức của một biến** Z là tổng hình thức vô hạn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots ,$$

$a_k \in \mathbf{C}$ gọi là **hệ số thứ** k của chuỗi, Z là **biến**, thỏa: $Z^p Z^q = Z^{p+q}$.
Hai chuỗi lũy thừa gọi là bằng nhau nếuu các hệ số tương ứng của chúng bằng nhau.
Như vậy cho một chuỗi lũy thừa hình thức tương đương cho dãy:

$$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots)$$

Ký hiệu $\mathbf{C}[[Z]]$ là tập mọi chuỗi lũy thừa hình thức của một biến Z.
Cấp của chuỗi $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ là số: $\omega(S) = \inf\{k : a_k \neq 0\},\ \omega(0) = +\infty$.
Khi đó $S(Z) = a_\omega Z^\omega +$ các số hạng lũy thừa $> \omega$.

Ví dụ. Một đa thức được xem là chuỗi với đồng nhất sau:

$$a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n + 0Z^{n+1} + 0Z^{n+2} + \cdots$$

1.2 Đại số các chuỗi hình thức. Trên $\mathbf{C}[[Z]]$ định nghĩa 2 phép toán

phép cộng: $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k) + (\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) Z^k$.

phép nhân: $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$, với $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$.

Khi đó $(\mathbf{C}[[Z]], +, \cdot)$ là một đại số với đơn vị là $1 = 1 + 0Z + 0Z^2 + \cdots$.
Hơn nữa, nó là miền nguyên (i.e. vành thỏa: $S \neq 0, T \neq 0 \ \Rightarrow ST \neq 0$) do $\omega(ST) = \omega(S) + \omega(T)$.

1.3 Phép chia. Cho $S(Z) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k)$ và $T(Z) = (\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k)$.

Bài toán: Khi nào tồn tại chuỗi $Q(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$, sao cho $S(Z) = T(Z)Q(Z)$. Khi đó, ta ký hiệu $Q(Z) = \dfrac{S(Z)}{T(Z)}$, và gọi là **chuỗi thương** của $S(Z)$ và $T(Z)$.

Mệnh đề. *Gỉa sử* $S(0) = a_0 \neq 0$. *Điều kiện cần và đủ để tồn tại* $Q(Z) \in \mathbf{C}[[Z]]$ *sao* *cho* $\dfrac{S(Z)}{T(Z)} = Q(Z)$*, là hệ số* $T(0) = b_0 \neq 0$*. Khi đó*

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k, \text{ với } c_0 = \frac{a_0}{b_0},\ c_n = \frac{1}{b_0}(a_n - b_n c_0 - \cdots - b_1 c_{n-1})$$

Chứng minh: Sự tồn tại $Q(Z)$ sao cho $S(Z) = T(Z)Q(Z)$, suy ra $a_0 = b_0 c_0$. Theo gỉa thiết $a_0 \neq 0$, vậy $b_0 \neq 0$.
Ngược lại, giả sử $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$. Ta cần xác định các hệ số c_k sao cho

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = (\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k)(\sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k)$$

Theo phép nhân, đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình với ẩn $c_0, c_1, \cdots$:

$$a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Vì $a_0 \neq 0$, hệ có duy nhất nghiệm: $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0},\ c_n = \dfrac{1}{b_0}(a_n - b_n c_0 - \cdots - b_1 c_{n-1})$. □

Bài tập: Chứng minh, nếu bỏ gỉa thiết $a_0 \neq 0$, thì $\dfrac{S(Z)}{T(Z)} \in C[[Z]]$ khi và chỉ khi $\omega(S) = \omega(T)$. (HƯỚNG DẪN. Xem nhận xét sau các ví dụ dới đây).

Ví dụ.
a) Cho đa thức $T(Z) = 1 - Z$. Để tìm thương $\dfrac{1}{T(Z)}$, có thể dùng công thức ở mệnh đề trên hay nhận xét sau.

Xét **chuỗi hình học** $Q(Z) = 1 + Z + Z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k$.
Ta có $ZQ(Z) = \quad Z + Z^2 + \cdots$. Vậy $(1 - Z)Q(Z) = 1$.
Nói cách khác $\dfrac{1}{1-Z} = 1 + Z + Z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k$

Ví dụ này cũng cho thấy nghịch đảo một đa thức không là một đa thức.
b) Phương pháp ở ví dụ trên có thể sử dụng để tìm nghịch đảo chuỗi lũy thừa $T(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$, với $b_0 \neq 0$, nh sau.
Viết $T(Z) = b_0(1 - \Phi(Z))$, trong đó $\Phi(Z) = c_1 Z + c_2 Z^2 + \cdots$, i.e. $\Phi(0) = 0$.
Suy ra $\dfrac{1}{T(Z)} = \dfrac{1}{b_0(1 - \Phi(Z))} = \dfrac{1}{b_0}(1 + \Phi(Z) + \Phi(Z)^2 + \cdots)$.
c) Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$. Khi đó $\dfrac{S(Z)}{1-Z} = a_0 + (a_0 + a_1)Z + \cdots + s_n Z^n + \cdots$,
trong đó $s_n = a_0 + \cdots + a_n$.

Nhận xét. Cho $S(Z), T(Z) \in \mathbf{C}[[Z]], T(Z) \neq 0$. Khi đó có biểu diễn chuỗi lũy thừa hình thức với hữu hạn số hạng lũy thừa âm:

$$\frac{S(Z)}{T(Z)} = \frac{c_{-m}}{Z^m} + \frac{c_{-m+1}}{Z^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{Z} + c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \cdots$$

Thật vậy, gọi p và q là cấp của S và T. Khi đó

$S(Z) = Z^p(a_p + a_{p+1}Z + \cdots) = Z^p S_1(Z)$ và $T(Z) = Z^q(b_q + b_{q+1}Z + \cdots) = Z^q T_1(Z)$

Do $T_1(0) = b_q \neq 0$, nên $\dfrac{1}{T_1(Z)} = U(Z) \in \mathbf{C}[[Z]]$. Vậy có thể biểu diễn

$$\frac{S(Z)}{T(Z)} = \frac{Z^p S_1(Z)}{Z^q T_1(Z)} = \frac{S_1(Z)U(Z)}{Z^m} \quad (m = q - p).$$

Từ đó suy ra biểu diễn nêu trên.

1.4 Đạo hàm hình thức. Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$. **Đạo hàm** của $S(Z)$, là chuỗi được ký hiệu bởi $S'(Z)$ hay $\dfrac{dS}{dZ}$, và được định nghĩa

$$S'(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k Z^{k-1}.$$

Dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta có các công thức tính đạo hàm quen biết: $\forall S, T \in \mathbf{C}[[Z]]$, và $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$,

$(\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T', (ST)' = S'T + ST'$, và $\left(\dfrac{S}{T}\right)' = \dfrac{S'T - ST'}{T^2}$ $(T(0) \neq 0)$.

Đạo hàm cấp n được định nghĩa qui nạp: $S^{(n)}(Z) = (S^{(n-1)}(Z))'$, $n \in \mathbf{N}$.

Ta có $S^{(n)}(Z) = n! a_n$ + số hạng bậc ≥ 1. Vậy $S^{(n)}(0) = n! a_n$.
Suy ra **công thức Taylor hình thức**:

$$S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} Z^k$$

1.5 Thay biến. Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, $T(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_l Z^l$, $b_0 = T(0) = 0$.
Thay Z bởi $T(Z)$ vào S, gọi là **chuỗi hợp** $S \circ T$, định nghĩa bởi

$$S \circ T(Z) = S(T(Z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (T(Z))^k.$$

Nhận xét. Việc thay biến như trên cho ta một chuỗi lũy thừa hình thức, i.e. định nghĩa là hợp cách. Thật vậy, gọi c_n là hệ số của Z^n trong $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (T(Z))^k$. Khi đó theo phép nhân, ta có:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Big(\sum_{p_1 + \cdots + p_k = n} b_{p_1} \cdots b_{p_k} \Big)$$

Viết một cách ngắn gọn:

$$\begin{array}{rcl} c_n & = & \text{hệ số của } Z^n \text{ trong } a_0 + a_1 T(Z) + \cdots + a_n T(Z)^n \\ & = & a_1 b_n + P_n(a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{n-1}) \quad (P_n \text{ là đa thức }) \end{array}$$

Vậy c_n chỉ phụ thuộc vào n hệ số đầu của S và T.

Ví dụ.

a) $\dfrac{1}{1-cZ} = 1 + cZ + c^2Z^2 + c^3Z^3 \cdots$.

b) Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$. Ta có thể tách chuỗi có mũ chẵn và lẻ:

$$\frac{1}{2}(S(Z) + S(-Z)) = a_0 + a_2Z^2 + a_4z^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{2}(S(Z) - S(-Z)) = a_1Z + a_3Z^3 + a_5Z^5 + \cdots$$

Tổng quát, dùng căn của đơn vị có thể tách chuỗi có số mũ mod m: gọi $\omega = e^{2\pi i/m}$, ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{1 \le j < m} \omega^{-jr} S(\omega^j Z) = \sum_{k(\bmod m) = r} a_k Z^k \quad (0 \le r < m).$$

Chẳng hạn, $m = 3, r = 1$,ta có $\omega = \cos 120^0 + i \sin 120^0$, và

$$a_1 Z + a_4 Z^4 + a_7 Z^7 + \cdots = \frac{1}{3}(S(Z) + \omega^{-1} S(\omega Z) + \omega^{-2} S(\omega^2 Z)).$$

1.6 Chuỗi ngược. Đặt $I(Z) = Z$. Ta có $S \circ I = I \circ S = S$, với mọi $S \in \mathbf{C}[[Z]]$, i.e. I là phần tử đơn vị của phép hợp thành.
Bài toán: Khi nào một chuỗi S có chuỗi ngược đối với phép hợp thành.

Mệnh đề. *Để tồn tại chuỗi lũy thừa hình thức T sao cho $T(0) = 0$ và $S \circ T = I$, điều kiện cần và đủ là $S(0) = 0$ và $S'(0) \neq 0$.*
Khi đó $S \circ T = T \circ S = I$ và T gọi là **chuỗi ngược** *của S.*

Chứng minh: Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, $T(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$, $b_0 = 0$.
Nếu $S \circ T(Z) = Z$, so sánh hệ số ta có: $a_0 = 0, a_1 b_1 = 1$, i.e. $S(0) = 0, S'(0) = a_1 \neq 0$.
Ngược lại, giả sử $a_0 = 0, a_1 \neq 0$. Ta tìm T sao cho $S \circ T(Z) = Z$.
Từ nhận xét ở 1.4, ta cần xác định $b_1, b_2, \cdots$ từ hệ phương trình

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 b_1 & = & 1 \\ a_1 b_n & + & P_n(a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{n-1}) = 0, \quad n > 1. \end{array} \right.$$

Suy ra $b_1 = \dfrac{1}{a_1}, b_n = \dfrac{1}{a_1} P_n(a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{n-1})$.
Từ $T(0) = 0, T'(0) \neq 0$, áp dụng chứng minh vừa rồi cho $S := T$, ta có S_1 sao cho

$S_1(0) = 0, T \circ S_1 = I$. Suy ra $S_1 = I \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S$, i.e. $T \circ S = I$. $\square$

Nhận xét. Vì $T(S(Z)) = Z$ và $S(T(W)) = W$, có thể nói các biến đổi hình thức $W = S(Z)$ và $Z = T(W)$, là ngược đảo của nhau. Mệnh đề trên còn gọi là **Định lý hàm ngược hình thức**.

1.7 Quan hệ đồng dư modulo Z^N và ký hiệu $O(Z^N)$. Trong tính toán với chuỗi lũy thừa thường ta "chặt cụt" ở một độ dài $N \in \mathbf{N}$ nào đó, và xử lý như đa thức.
Hai chuỗi $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ và $T(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$ gọi là **đồng dư modulo** Z^N nếuu $a_k = b_k$, với $k = 0, 1, \cdots, N-1$.
Khi đó ký hiệu $S(Z) = T(Z) \mod Z^N$ hay $S(Z) = T(Z) + O(Z^N)$.

Nhận xét. Với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại duy nhất đa thức bậc $\leq n$,

$$S_n(Z) = \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!} S^k(0) Z^k, \quad \text{sao cho} \quad S(Z) = S_n(Z) + O(Z^{n+1})$$

Các phép toán thực hiện ở các phần trước có thể đúc kết như sau.

Mệnh đề. *Nếu* $S(Z) = S_n(Z) + O(Z^{n+1})$ *và* $T(Z) = T_n(Z) + O(Z^{n+1})$, *thì*

(1) $S(Z) + T(Z) = S_n(Z) + T_n(Z) + O(Z^{n+1})$
(2) $S(Z)T(Z) = S_n(Z)T_n(Z) + O(Z^{n+1})$
(3) $S(T(Z)) = S_n(T_n(Z)) + O(Z^{n+1})$

Ví dụ.
a) Cho chuỗi $\cos Z = 1 - \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{4!}Z^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} Z^{2k} + \cdots$.
Để xác định $\frac{1}{\cos Z}$ đến bậc 4, ta tiến hành như sau.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos Z} &= \frac{1}{1 - (\frac{1}{2!}Z^2 - \frac{1}{4!}Z^4 + O(Z^6))} \\
&= 1 + (\frac{1}{2!}Z^2 - \frac{1}{4!}Z^4 + O(Z^6)) + (\frac{1}{2!}Z^2 - \frac{1}{4!}Z^4 + O(Z^6))^2 + O(Z^6) \\
&= 1 + \frac{1}{2!}Z^2 - \frac{1}{4!}Z^4 + (\frac{1}{2!}Z^2)^2 + O(Z^6) \\
&= 1 + \frac{1}{2}Z^2 + (-\frac{1}{24} + \frac{1}{4})Z^4 + O(Z^6).
\end{aligned}$$

b) Cho chuỗi $\exp(Z) = 1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}Z^k + \cdots$.
Để xác định chuỗi hợp $\exp(Z \cos Z)$ đến bậc 3, ta tiến hành như sau.

$$\begin{aligned}
\exp(Z\cos Z) &= 1 + (Z - \frac{1}{2!}Z^3 + O(Z^5)) + \frac{1}{2!}(Z - \frac{1}{2!}Z^3 + O(Z^5))^2 + \frac{1}{3!}(Z + O(Z^3))^3 + O(Z^4) \\
&= 1 + (Z - \frac{1}{2!}Z^3) + \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + O(Z^4) \\
&= 1 + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3!})Z^3 + O(Z^4)
\end{aligned}$$

1.8 Hàm sinh. Theo một thuật ngữ khác chuỗi

$$G(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \ ,$$

còn được gọi là **hàm sinh** của dãy số $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = a_0, a_1, a_2, \cdots$
Như vậy hàm sinh $G(Z)$ là đại lượng duy nhất xác định toàn bộ thông tin của tất cả các số hạng của dãy (a_n).[1]

Ví dụ.
a) Chuỗi $Z^m G(Z) = \sum_{k\geq m} a_{k-m} Z^k$, là hàm sinh của dãy: $(a_{k-m}) = 0, \cdots, 0, a_0, a_1, \cdots$.
b) Chuỗi $Z^{-m}(G(Z) - a_0 - a_1 Z - \cdots - a_{m-1}Z^{m-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} Z^k$, là hàm sinh của dãy: $(a_{k+m}) = a_m, a_{m+1}, \cdots$
c) **Dãy Fibonacci** định nghĩa: $a_0 = 0, a_1 = 1$, và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
Ta có thể xác định biểu thức hiện cho các số hạng a_n nhờ hàm sinh nh sau.
Gọi $G(Z)$ là hàm sinh của dãy (a_n). Khi đó $ZG(Z)$, $Z^2G(Z)$ là hàm sinh của (a_{n-1}), (a_{n-2}) tương ứng. Từ $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, ta có

$$(1 - Z - Z^2)G(Z) = Z.$$

Suy ra $G(Z) = \dfrac{Z}{1 - Z - Z^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1}{1-\phi Z} - \dfrac{1}{1-\hat{\phi}Z})$,
trong đó ϕ và $\hat{\phi} = \dfrac{1}{\phi}$ là 2 nghiệm phương trình $Z^2 - Z - 1 = 0$.
Từ ví dụ 1.3 a) ta có

$$G(Z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((1 + \phi Z + \phi^2 Z^2 + \cdots) - (1 + \hat{\phi} Z + \hat{\phi}^2 Z^2 + \cdots)\Big).$$

Suy ra $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$.
Tổng quát, nếu dãy (a_n) cho bởi công thức đệ qui tuyến tính:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_m a_{n-m},\ n \geq m,\ \text{với các hệ số } c_j \in \mathbf{C}.$$

Khi đó $(1 - c_1 Z - \cdots - c_m Z^m)G(Z)$ là đa thức. Dùng phương pháp tương tự như ví dụ trên (tìm nghiệm đa thức, phân tích thành thừa số hữu tỉ, khai triển chuỗi ngược, ...) có thể xác định biểu thức hiện của a_n.
d) Nếu $G(Z)$ là hàm sinh của dãy (a_n), thì theo ví dụ 1.3 a) $\dfrac{1}{1-Z}G(Z)$ là hàm sinh của dãy tổng $s_n = a_0 + \cdots + a_n$.

[1] Lý thuyết hàm sinh có nhiều áp dụng trong phân tích thuật toán. Có thể tham khảo: Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol.1, Addison-Wesley, 1973.

2. HỘI TỤ ĐỀU

2.1 Chuỗi số. Chuỗi số phức là một tổng hình thức các số phức z_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots \ .$$

Xét **tổng riêng thứ** n $\ S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k,\ n \in \mathbf{N}$, của chuỗi. Nếu dãy (S_n) hội tụ về $S \in \mathbf{C}$, thì ta nói chuỗi đã cho hội tụ về S và ký hiệu $\ S = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$.

Các kết qủa sau được chứng minh như trường hợp chuỗi số thực.

Mệnh đề.

(1) Nếu $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ hội tụ, thì $z_k \to 0$ khi $k \to +\infty$.

(2) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ hội tụ khi và chỉ khi nó thoả điều kiện Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : n > N \ \Rightarrow\ |z_n + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon,\ (p = 0, 1, \cdots)$$

Các dấu hiệu hội tụ. *Chuỗi* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *hội tụ nếu một thoả một trong các dấu hiệu sau:*

Hội tụ tuyệt đối: $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ *hội tu* .

So sánh: $|z_k| \leq a_k$, *khi k đủ lớn, và* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ.*

D'Alembert: $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < 1$.

Cauchy: $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} < 1$.

2.2 Dãy hàm. Cho dãy hàm $f_n : D \to \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$.
Miền hội tụ của dãy là tập $D' = \{z \in D :$ dãy số $(f_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ $\}$. Khi đó ta có hàm $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z),\ z \in D'$, và (f_n) gọi là **hội tụ điểm** hay **hội tụ đơn giản** về f trên D'.
Ví dụ. Dãy hàm $f_n(z) = |z|^n,\ n \in \mathbf{N}$, có miền hội tụ $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$. Trên D dãy hội tụ (điểm) về hàm

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z| < 1 \\ 1 & \text{nếu } |z| = 1 \end{cases}$$

Trong ví dụ này f_n liên tục, nhưng hàm giới hạn f không liên tục.
Khái niệm hội tụ đều sau đây bảo đảm một số tính chất giải tích của dãy hàm được

bảo toàn khi qua giới hạn.
Dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ được gọi là **hội tụ đều** về f trên D, nếuu

$$\forall\epsilon>0,\exists N: n>N \;\Rightarrow\; \sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|<\epsilon.$$

Viết một các khác $\sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|\to 0$, khi $n\to\infty$.

Mệnh đề. *Nếu dãy hàm (f_n) hội tụ đều về hàm f trên D và mỗi f_n là liên tục trên D, thì f liên tục trên D.*
Nói cách khác $\lim_{z\to z_0}\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\lim_{z\to z_0} f_n(z)$, $z_0\in D$, i.e. có thể hoán vị các phép lấy giới hạn.

Chứng minh: Cho $z_0\in D$. Với mọi $\epsilon>0$, do tính hội tụ đều ta có

$$\exists n_0:\ |f_{n_0}(z)-f(z)|<\epsilon/3,\forall z\in D.$$

Mặt khác, do tính liên tục của f_{n_0}, ta có

$$\exists\delta>0:\ |z-z_0|<\delta\Rightarrow|f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)|<\epsilon/3.$$

Suy ra $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:$ khi $|z-z_0|<\delta$, ta có

$$|f(z)-f(z_0)|\le|f(z)-f_{n_0}(z)|+|f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)|+|f_{n_0}(z_0)-f(z_0)|<\epsilon\ .$$

Vậy f liên tục tại z_0. □

2.3 Chuỗi hàm. Tổng hình thức $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, trong đó mỗi f_k là hàm phức xác định trên miền $D\subset\mathbf{C}$, gọi là một **chuỗi hàm trên** D.
Đặt $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(z), z\in D$, gọi là **tổng riêng thứ** n của chuỗi hàm. Các khái niệm **miền hội tụ, hội tụ và hội tụ đều của chuỗi hàm** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ đồng nhất với các khái niệm tương ứng của dãy tổng riêng (S_n).
Từ các kết quả cuả dãy hàm hội tụ ta có:

Tiêu chuẩn Cauchy. *Chuỗi hàm $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ hội tụ đều trên D nếu và chỉ nếu*

$$\forall\epsilon>0,\exists N: n>N \;\Rightarrow\; \sup_{z\in D}|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(z)|<\epsilon\ ,\ (p=1,2,\cdots).$$

Weierstrass' M-test. *Nếu $|f_k(z)|\le a_k,\forall z\in D$ và $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ hội tụ đều trên D.*

Mệnh đề. *Nếu chuỗi hàm* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *hội tụ đều trên* D *về hàm* S *và mỗi* f_k *là liên tục trên D, thì* S *liên tục trên* D.
Nói cách khác $\lim_{z\to z_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z\to z_0} f_k(z), z_0 \in D$, *i.e. có thể chuyển dấu* $\lim$ *vào trong dấu* $\sum$.

3. CHUỖI LŨY THỪA HỘI TỤ

Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \in \mathbf{C}[[Z]]$. Khi thay ký hiệu Z bởi gía trị $z \in \mathbf{C}$ ta có chuỗi số $S(z)$, nó là một gía trị phức khi chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hội tụ. Phần này sẽ nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi lũy thừa và mối quan hệ giữa các phép toán hình thức với các phép toán trên hàm.

3.1 Định lý Abel. *Với mọi chuỗi lũy thừa* $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, *tồn tại* $R = R(S), 0 \leq R \leq +\infty$, *sao cho nếu* $R > 0$ *thì:*
(1) $S(z)$ *hội tụ khi* $|z| < R$, *và* $S(z)$ *phân kỳ khi* $|z| > R$.
(2) $S(z)$ *hội tụ đều trên đĩa* $|z| \leq r$, *với mọi* $r < R$.

Trên hình tròn $|z| = R$ định lý không có khẳng định gì.
$R = R(S)$ gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi S và tính bởi **công thức Hadamard**:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Chứng minh: Với $|z| < R$, tồn tại $\rho : |z| < \rho < R$. Theo định nghĩa $\limsup$, tồn tại k_0 sao cho: $|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\rho}$, $\forall k > k_0$. Suy ra $|a_k z^k| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^k$. Vậy $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh. Do đó $S(z)$ hội tụ.
Xét trên đĩa $|z| \leq r < R$. Với $\rho : r < \rho < R$, $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$. Theo M-test $S(z)$ hội tụ đều trên đĩa đã cho.
Nếu $|z| > R$, chọn $\rho : R < \rho < |z|$. Khi đó tồn tại vô số chỉ số k: $|a_k|^{\frac{1}{k}} > \frac{1}{\rho}$. Vậy $|a_k z^k| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^k$ với vô số chỉ số k. Suy ra $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ phân kỳ theo 2.2 (1). $\square$

Nhận xét. Cho $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$. Khi đó

$$R(S) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists C, r > 0 : \; |a_k| \leq \frac{C}{r^k}, \; \forall k \in \mathbf{N}$$

Nhận xét. Trong nhiều trường hợp có thể dùng **công thức D'Alembert** để tính bán kính hội tụ:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

nếu giới hạn trên tồn tại. Điều này suy từ kết qủa sau

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = q \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$$

Chứng minh: Theo gỉa thiết, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$: $k > N \Rightarrow q - \epsilon < \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q + \epsilon$.

Suy ra $(q-\epsilon)^p < \dfrac{|a_{N+1}||a_{N+2}|\cdots|a_{N+p}|}{|a_N||a_{N+1}|\ \cdots|a_{N+p-1}|} < (q+\epsilon)^p \quad p = 1, 2, \cdots$

Suy ra $|a_N|^{\frac{1}{N+p}}(q-\epsilon)^{\frac{p}{N+p}} < \sqrt[N+p]{|a_{N+p}|} < |a_N|^{\frac{1}{N+p}}(q+\epsilon)^{\frac{p}{N+p}} \quad p = 1, 2, \cdots$

Khi $p\to\infty$, $q - \epsilon \le \liminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le q + \epsilon$.

Từ đó suy ra kết qủa. □

Bài tập: Chứng minh chiều $\Leftarrow$ của phát biểu trên không đúng. Hãy xét $a_k = q^{k\pm\sqrt{k}}$.

Ví dụ.

a) Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ có bán kính hội tụ là 0, do $k! \ge 3k^k e^{-k}$.

b) Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ có bán kính hội tụ là ∞.

c) Các chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}z^k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}z^k$ đều có bán kính hội tụ là 1, nhng tính hội tụ trên đường tròn $|z| = 1$ khác nhau.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ phân kỳ khi $|z| = 1$, theo điều kiện cần.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}z^k$ hội tụ khi $|z| = 1$, theo tiêu chuẩn so sánh.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}z^k$ phân kỳ khi $z = 1$, nhưng hội tụ tại mọi điểm khác trên đường tròn đơn vị. Thật vậy, với $z = e^{i\varphi}$ $(\varphi \ne 2k\pi)$, chuỗi có dạng $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e^{ki\varphi}$. Ta dùng phương pháp tổng từng phần của Abel để chứng minh chuỗi hội tu.

Đặt $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}e^{ki\varphi}$ và $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ki\varphi}$. Khi đó

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}(A_k - A_{k-1}) = -\frac{1}{m+1}A_m + \sum_{k=m}^{n-1}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})A_k + \frac{1}{n}A_n$$

Mặt khác $A_n = \dfrac{e^{(n+1)i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = e^{ni\frac{\varphi}{2}}\dfrac{\sin((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$. Vậy $|A_n| \le \dfrac{1}{|\sin(\varphi/2)|}$.

Suy ra $|S_n - S_m| \leq \dfrac{1}{|\sin(\varphi/2)|}\left(\dfrac{1}{m+1} + \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \frac{1}{n}\right) \leq \dfrac{2}{|\sin(\varphi/2)|(n+1)}$.
Vậy (S_n) là dãy Cauchy, nên hội tụ.

3.2 Tổng & Tích các chuỗi lũy thừa hội tụ.

Mệnh đề. *Giả sử $A(Z), B(Z)$ là các chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ $\geq R$.*
Đặt $S(Z) = A(Z) + B(Z)$, $P(Z) = A(Z)B(Z)$. Khi đó
(1) *$S(Z)$ và $P(Z)$ có bán kính hội tụ $\geq R$.*
(2) *Với $|z| < R$, $S(z) = A(z) + B(z)$ và $P(z) = A(z)B(z)$.*

Chứng minh: Đặt

$$A(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k, B(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k, S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k, P(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k Z^k.$$

Ta có $|c_k| \leq |a_k| + |b_k| := \gamma_k$, $|d_k| \leq \displaystyle\sum_{0\leq p\leq k} |a_p||b_{k-p}| := \delta_k$.

Nếu $r < R$, thì $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k < +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k r^k = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k)(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k) < +\infty.$$

Từ đó suy ra (1).
Đẳng thức đầu của (2) là rõ ràng, đẳng thức sau suy từ bổ đề sau

Bổ đề. *Giả sử $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ hội tụ tuyệt đối. Đặt $w_k = \displaystyle\sum_{0\leq p\leq k} u_p v_{k-p}$. Khi đó $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là $(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k)(\sum_{k=0}^{\infty} v_k)$.* □

3.3 Thay biến trong chuỗi lũy thừa hội tụ.

Mệnh đề. *Cho $S(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, $T(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k, T(0) = 0$, có các bán kính hội tụ $R(S), R(T)$ dương. Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi hợp $S \circ T$ cũng dương.*
Chính xác hơn, tồn tại $r > 0$ sao cho $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k < R(S)$ và

$$|T(z)| < R(S), \quad S \circ T(z) = S(T(z)) \quad \textit{với } |z| \leq r.$$

Chứng minh: Do $R(T) > 0$ nên $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k < R(S)$ với r đủ bé.

Khi đó $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (\sum_{p\geq 1} |b_p| r^p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k < +\infty$.

Đặt $U(Z) = S \circ T(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$, thì $|c_k| \leq \gamma_k$. Suy ra $R(U) \geq r$.

Để chứng minh đẳng thức đặt $S_n(Z) = \sum_{k\le n} a_k Z^k,\ S_n \circ T = U_n$.
Với $|z| \le r$, ta có $U_n(z) = S_n(T(z))$ và $\lim_{n\to\infty} S_n(T(z)) = S(T(z))$.
Mặt khác trị tuyệt đối hệ số chuỗi $U - U_n = (S - S_n) \circ T \le$ hệ số chuỗi $\sum_{k>n} |a_k|(\sum_{p\ge 1} |b_p| r^p)^k \to 0$, khi $k \to \infty$.
Do vậy $\lim_{n\to\infty}(U(z) - U_n(z)) = 0$, i.e. $S \circ T(z) = S(T(z))$. □

3.4 Nghịch đảo của chuỗi lũy thừa hội tụ.

Mệnh đề. *Giả sử $S(Z) \in \mathbf{C}[[Z]], S(0) \neq 0$, có bán kính hội tụ dương. Khi đó $\dfrac{1}{S(Z)}$ cũng có bán kính hội tụ dương.*

Chứng minh: Ta có $S(Z) = a_0(1 - \Phi(Z))$ với $R(\Phi) > 0$.

Ngoài ra $\dfrac{1}{S(Z)} = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1-\Phi(Z)} = \dfrac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\Phi(Z))^k$.

Mà chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} Y^k$ có bán kính hội tụ $= 1 > 0$, theo Mệnh đề 3.3 $R(\dfrac{1}{S}) > 0$. □

3.5 Đạo hàm chuỗi lũy thừa hội tụ.

Mệnh đề. *Với mọi $S(Z) \in \mathbf{C}[[Z]]$, $R(S) = R(S')$. Hơn nữa, nếu $R(S) > 0$, thì với $|z| < R(S)$ ta có*

$$S'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}.$$

Chứng minh: Vì $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, nên $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.
Vậy $R(S') = R(S)$.
Gọi $R = R(S)$. Với $|z| < R$, chọn $r : |z| < r < R$ và $0 < |h| < r - |z|$. Ta có

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{k\ge 1} u_k(z,h)\ ,$$

với $u_k(z,h) = a_k((z+h)^{k-1} + z(z+h)^{k-2} + \cdots + z^{k-1}\ -\ kz^{k-1})$.
Do $|z|, |z+h| < r$, nên $|u_k(z,h)| \le 2k|a_k|r^{k-1}$.
Vì $\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < +\infty$, nên $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \sum_{n>n_0} 2k|a_k|r^{k-1} < \epsilon/2$.
Ngoài ra $\sum_{k\le n_0} u_k(z,h)$ là đa thức theo h và bằng 0 khi $h = 0$, nên tồn tại η sao cho:

$$|h| < \eta, \quad \text{thì} \ \ |\sum_{k\le n_0} u_k(z,h)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Suy ra với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\eta > 0$, sao cho khi $|h| < \eta$, ta có

$$\left|\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z)\right| \le |\sum_{k\le n_0} u_k(z,h)| + \sum_{k>n_0} 2k|a_k|r^{k-1} < \epsilon.$$

$\square$

Nhận xét. Theo mệnh đề trên hàm S có **đạo hàm (theo nghĩa phức)** là S' trên miền hội tụ của nó. Các tính chất của đạo hàm phức sẽ được xét cụ thể ở chương III.

Qui nạp ta có $R(S^{(n)}) = R(S)$ và khi $R = R(S) > 0$, thì với $|z| < R$:

$$S^{(n)}(z) = n!a_n + T_n(z), \text{ với } T_n \in \mathbf{C}[[Z]], T_n(0) = 0.$$

Vậy $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$. Suy ra nếu $f(z)$ là hàm theo $z \in \mathbf{C}$ đủ bé, thì tồn tại **không quá một** chuỗi lũy thừa hình thức $S(Z)$ sao cho $f(z) = S(z)$ với z đủ bé.

3.6 Chuỗi lũy thừa ngược của chuỗi lũy thừa hội tụ.
Mệnh đề. *Cho $S \in \mathbf{C}[[Z]], S(0) = 0, S'(0) \neq 0$. Giả sử $T \in \mathbf{C}[[Z]]$ là chuỗi ngược: $S \circ T = T \circ S = I, T(0) = 0$. Nếu $R(S) > 0$, thì $R(T) > 0$.*

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bằng **phương pháp chuỗi trội** nh sau.
Đặt $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k,\ T(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$.
Thay vì $S(Z)$, xét chuỗi trội

$$\bar{S}(Z) = A_1 Z - \sum_{k>1} A_k Z^k, \quad \text{thoả: } A_1 = a_1, |a_k| \leq A_k \quad (k > 1)$$

Khi đó tồn tại $\bar{T}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k Z^k$ sao cho $\bar{S}(\bar{T}(Y)) = Y$ và B_n thoả

$$A_1 B_n - P_n(A_2, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_{n-1}) = 0, \quad \text{với } P_n \text{ là đa thức .}$$

Bằng qui nạp ta có $|b_k| \leq B_k$. Suy ra $R(T) \geq R(\bar{T})$.
Vậy nếu có $R(\bar{T}) > 0$, mệnh đề được chứng minh.
Để xây dựng cụ thể $\bar{S}$, chọn $0 < r < R(S)$. Do $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < +\infty$, ta tìm được $M > 0 : |a_k| r^k \leq M,\ \forall k \in \mathbf{N}$.
Đặt $A_1 = a_1,\ A_k = M/r^k\ (k > 1)$. Khi đó với $|z| < r$,

$$\bar{S}(z) = A_1 z - M \frac{z^2/r^2}{1 - z/r}.$$

Cần tìm hàm $\bar{T}(y)$ sao cho $\bar{T}(0) = 0$ và $\bar{S}(\bar{T}(y)) = y$, với y đủ bé. Hàm $\bar{T}$ có thể xác định từ phương trình

$$(A_1/r + M/r^2)\bar{T}^2 - (A_1 + y/r)\bar{T} + y = 0.$$

Nghiệm phương trình thỏa $\bar{T}(0) = 0$ là

$$\bar{T}(y) = \frac{A_1 + y/r - \sqrt{A_1^2 - 2A_1 y/r - 4My/r^2 + y^2/r^2}}{2(A_1/r + M/r^2)}.$$

Khi y đủ bé nghiệm trên có dạng $\sqrt{1+u}$, $|u|<1$.
Vậy $\bar{T}(y)$ có khai triển thành chuỗi lũy thừa theo y, hội tụ khi y bé. Suy ra $R(\bar{T})>0$.
□

4. MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

4.1 Hàm tuyến tính. $w=f(z)=az+b,\ a\neq 0$.
Đặt $a=re^{i\varphi}$. Khi đó w được mô tả hình học như là hợp của 3 biến đổi sau
Phép quay một góc φ : $z_1=e^{i\varphi}z$.
Phép co dãn tỉ số r : $z_2=rz_1$.
Phép tịnh tiến vector b : $w=z_2+b$.
Đặc biệt tính song song và độ lớn của góc được bảo toàn qua hàm tuyến tính.

4.2 Hàm lũy thừa. $w=f(z)=z^n,\ n\in\mathbf{N}$.
Khi chuyển qua tọa độ cực $z=re^{i\varphi}$, thì $w=r^ne^{in\varphi}$. Ta có mô tả hình học như sau:
(1) Ảnh của các tia $\mathrm{Arg}z=\varphi_0$ là các tia $\mathrm{Arg}w=n\varphi_0$. (ààmở rộng n lần")
(2) Ảnh của các đường tròn $|z|=r_0$ là các đường tròn $|w|=r_0^n$.
Như vậy hàm $w=z^n$ chỉ đơn diệp trên các miền D không chứa $z_1\neq z_2$ mà $|z_1|=|z_2|$ và $\mathrm{arg}z_1=\mathrm{arg}z_2+\dfrac{2\pi}{n}k\ (k\in\mathbf{Z})$.
Ví dụ. Hàm $w=z^n$ là đơn diệp từ góc $D=\{0<\ \mathrm{arg}z<2\pi/n\}$ lên miền $\{0<\ \mathrm{arg}w<2\pi\}$.

4.3 Hàm mũ. $w=e^z=1+z+\dfrac{1}{2!}z^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}z^n+\cdots=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$.
Chuỗi trên có bán kính hội tụ là ∞ nên hàm mũ xác định trên tòan bộ $\mathbf{C}$.

Tính chất.
(1) $(e^z)'=e^z$.
(2) $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$. Đặc biệt: $e^z\neq 0,\forall z$, vì $e^ze^{-z}=1$.
(3) $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ y\in\mathbf{R}$. Suy ra $e^z=1 \quad\Leftrightarrow\quad z=2k\pi i, k\in\mathbf{Z}$

Chứng minh: (1) suy từ 3.5. Đối với (2), dùng công thức tích chuỗi

$$\begin{aligned} e^ze^{z'} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}z'^p &&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^nz'^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^kz^kz'^{n-k} &&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+z')^n\\ &= e^{z+z'}. \end{aligned}$$

(3) được chứng minh dựa vào khai triển Taylor hàm cos và sin thực (xem dạng Euler I.1.3). □

4.4 Các hàm lượng giác. $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
Từ biểu diễn chuỗi lũy thừa hàm exp ta có với mọi $z\in\mathbf{C}$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Tính chất.

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(2) $(\cos z)' = -\sin z, \ (\sin z)' = \cos z.$

(3) $\sin, \cos$ *là các hàm tuần hoàn, chu kỳ* 2π.

(4) $\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi$ và $\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$

Bài tập: Chứng minh các tính chất trên.

Nhận xét. Hầu hết các công thức của hàm sin và cos trong trường hợp thực vẫn còn đúng cho trường hợp phức (xem II.5.4). Chẳng hạn, công thức cộng $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
Tuy nhiên, trong trường hợp phức hàm cos và sin không giới nội:

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \to +\infty, \text{ khi } \mathbf{R} \ni y \to +\infty.$$

Hàm tang định nghĩa: $\mathrm{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \ z \neq (k + \dfrac{1}{2})\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Hàm cotang định nghĩa: $\mathrm{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i(e^{iz} + e^{iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}, \ z \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Các **hàm hyperbolic** cũng định nghĩa tương tự trường hợp thực:

$$\mathrm{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sinh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{tanh} z = \frac{\mathrm{sinh} z}{\mathrm{cosh} z}, \quad \mathrm{coth} z = \frac{\mathrm{cosh} z}{\mathrm{sinh} z} \quad z \in \mathbf{C}.$$

Ta cũng có: $\mathrm{cosh}^2 z - \mathrm{sinh}^2 z = 1$, $(\mathrm{cosh} z)' = \mathrm{sinh} z$, $(\mathrm{sinh} z)' = \mathrm{cosh} z$.

Các **hàm lượng giác ngược** được định nghĩa qua chuỗi lũy thừa nhờ khai triển Taylor hàm thực:

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \cdots, \ |z| < 1. \quad \arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z.$$

$$\mathrm{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \cdots, \ |z| < 1. \qquad \mathrm{arccotg} z = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg} z.$$

Chú ý: Thực ra, các hàm lượng giác ngược được định nghĩa ở trên chỉ là một "nhánh" (nhánh chính) trong các nhánh liên tục của các hàm "đa trị" tương ứng. Chẳng hạn, nếu định nghĩa $w = \arcsin z$ là giá trị thoả $\sin(\arcsin z) = z$. Khi đó nói chung sẽ có nhiều giá trị w thỏa đẳng thức (tính đa trị). Để xét các hàm đa trị ta có khái niệm **tách nhánh đơn trị** như sẽ được trình bày sau đây đối với hàm logarithm.

4.5 Logarithm phức. $w \in \mathbf{C}$ được gọi là một **logarithm** của $z \neq 0$, nếuu

$$e^w = z$$

Tập nghiệm phương trình trên ký hiệu là Lnz. Có vô số logarithm của z:

$$w_k = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

trong đó $\ln|z|$ là logarithm Neper thực. (Bài tập)
Vậy $w = \mathrm{Ln}z$ là hàm đa trị.
Nhánh của hàm log. Cho $D \subset \mathbf{C} \setminus 0$ là miền. Hàm liên tục $f : D \to \mathbf{C}$ gọi là một **nhánh của hàm log** nếuu $e^{f(z)} = z,\ \forall z \in D$.
Khi đó ta ký hiệu $f(z) = \ln z$. Chẳng hạn, **nhánh chính của hàm log** là hàm xác định gía trị $\ln 1 = 0$ (ứng với $k = 0$), cụ thể

$$f(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad z \in D = \mathbf{C} \setminus \{z = te^{-i\pi}, t \geq 0\}.$$

Không phải miền nào cũng tồn tại nhánh của hàm log, chẳng hạn miền $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Tuy nhiên, nếu miền nào tồn tại một nhánh, thì các nhánh khác sai khác một hằng số. Cụ thể

Mệnh đề. *Giả sử trên miền D tồn tại nhánh f của hàm log. Khi đó $g : D \to \mathbf{C}$ là nhánh của hàm log khi và chỉ khi $g = f + 2k\pi i$ với $k \in \mathbf{Z}$.*

Chứng minh: Xét hàm $h(z) = \dfrac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z))$. Ta có h liên tục và $e^{2\pi i h(z)} = e^{f(z)}e^{-g(z)} = 1$, nên h nhận giá trị nguyên. Suy ra $h =$const. □

Mệnh đề. *Nhánh chính của hàm $\ln(1+z), |z| < 1$, i.e. thoả $\ln 1 = 0$, có biểu diễn chuỗi lũy thừa là*

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k, \ |z| < 1.$$

Chứng minh: Đặt $S(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Z^k$ và $T(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} Z^k$.
$(T'(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z^k = \frac{1}{1+Z}$, i.e. $T(Z)$ nguyên hàm hình thức của $\dfrac{1}{1+Z}$).
Với $x \in \mathbf{R}, |x| < 1$, ta có $\ln(1+x) = T(x)$, i.e. $S(T(x)) = 1+x$. Do tính duy nhất của hệ số chuỗi lũy thừa hình thức ta có $S \circ T(Z) = 1 + Z$. Ngoài ra, $S(z) = e^z, z \in \mathbf{C}$ và T có bán kính hội tụ 1. Theo định nghĩa nhánh chính của hàm log suy ra khi $|z| < 1,\ \ln(1+z) = T(z)$. □

4.6 Hàm lũy thừa tổng quát. Với mỗi $z \neq 0, \alpha \in \mathbf{C}$, định nghĩa $z^\alpha = e^{\alpha \,\mathrm{Ln}\, z}$. Nh vậy sẽ có vô số gía trị z^α.
Tương tự nh hàm log ta có thể định nghĩa nhánh của hàm z^α. Mỗi nhánh của Ln z xác định một nhánh của z^α.

Công thức nhị thức.*Nhánh chính của hàm* $(1+z)^\alpha$*, i.e. thỏa* $1^\alpha = 1$*, có biểu diễn chuỗi lũy thừa là*

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}z^k + \cdots \quad |z| < 1.$$

Chứng minh: Ta dùng phương pháp giải phương trình vi phân chuỗi lũy thừa hình thức để xác định các hệ số của chuỗi.
Đặt $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = (1+Z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+Z)}$.
Ta có $S'(Z) = \frac{\alpha}{1+Z} e^{\alpha \ln(1+Z)}$. (Bài tập)
Suy ra $(1+Z)S'(Z) = \alpha S(Z)$. Đồng nhất hệ số ta có

$$a_0 = 1,\ (k+1)a_{k+1} + k a_k = \alpha a_k.$$

Vậy $a_0 = 1,\ a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k = \cdots = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)!} a_0$.
Theo công thức D'Alembert, bán kính hội tụ của chuỗi là

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|k+1|}{|\alpha - k|} = 1$$

□

Chú ý. Nhánh đơn trị của các hàm lượng giác ngược cũng có thể lập luận tương tự. Chẳng hạn định nghĩa $w = \arccos z \Leftrightarrow \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = w$. Suy ra $e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$. Vậy

$$z = \arccos w = i\ \mathrm{Ln}(w \pm \sqrt{w^2-1}) = \pm i\ \mathrm{Ln}(w + \sqrt{w^2-1}).$$

Vậy tùy theo nhánh đơn trị của hàm log và hàm căn bậc 2 ta có nhánh đơn trị của hàm arccos.

5. HÀM GIẢI TÍCH

5.1 Định nghĩa. Hàm $f : D \to \mathbf{C}$ gọi là **giải tích tại** $z_0 \in D$ nếuu f có thể biểu diễn như là chuỗi lũy thừa tại lân cận z_0, cụ thể là tồn tại $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \in \mathbf{C}[[Z]]$ và $r > 0$, sao cho

$$f(z) = S(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \text{với mọi } \ z \in D(z_0, r).$$

Khi đó chuỗi S xác định duy nhất (nhận xét 3.5).
Hàm f gọi là **giải tích trên** D nếuu f giải tích tại mọi $z \in D$.
Ký hiệu $A(D)$ tập mọi hàm giải tích trên D.
Theo các kết qủa ở §3, ta có:

Mệnh đề.
(1) *$A(D)$ là vành với phép cộng và nhân hàm thông thường.*
(2) *Hợp hai hàm giải tích là giải tích.*
(3) *Nếu f giải tích tại z_0 và $f'(z_0) \neq 0$, thì f khả nghịch địa phương tại z_0, i.e. tồn tại lân cận U của z_0 và V của $f(z_0)$, sao cho $f : U \to V$ là song ánh và có ánh xạ ngược giải tích. (**Định lý hàm ngược địa phương**).*
(4) *Nếu f giải tích trên D, thì f có đạo hàm mọi cấp.*

Chú ý: Ở chương sau ta sẽ chứng minh: nếu f có đạo hàm cấp 1 trên D, thì f giải tích trên D. Điều này hoàn toàn khác với tính khả vi thực, ví dụ điển hình là hàm thực khả vi vô hạn $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0$, có đạo hàm mọi cấp triệt tiêu tại 0, nên chuỗi Taylor là 0 - nó không hội tụ về $f(x)$.

Ví dụ.
a) Vì hàm lũy thừa là giải tích, nên đa thức $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ là giải tích trên $\mathbf{C}$.
b) Các hàm hữu tỉ $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, trong đó P và Q là các đa thức ($Q \neq 0$),là giải tích trên miền $\mathbf{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$.
c) Các hàm cho ở §4 là các hàm giải tích. Điều này suy từ kết qủa tổng quát sau.

5.2 Mệnh đề. *Giả sử $S(Z) \in \mathbf{C}[[Z]]$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó S xác định một hàm giải tích trên đĩa $D(0, R)$.*
Cụ thể, với mọi $z_0 \in D(0, R)$, ta có khai triển

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k \quad , |z - z_0| < R - |z_0|.$$

Chứng minh: Đặt $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ |z| < R$. Cho $z_0 \in D(0, R)$.

Ta có $z^k = (z_0 + (z - z_0))^k == \sum_{p=0}^{k} C_p^k z_0^{k-p} (z - z_0)^p$.

Với $|z_0| + |z - z_0| < R$, do $S(z)$ hội tụ tuyệt đối, nên

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(|z_0| + |z - z_0|)^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{p=0}^{k} C_p^k |z_0|^{k-p} |z - z_0|^p.$$

Từ tính hội tụ tuyệt đối ta có thể hoán vị các đấu tổng, nh sau

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sum_{p=0}^{k} C_p^k z_0^{k-p} (z - z_0)^p) = \sum_{p=0}^{\infty} (\sum_{k=p}^{\infty} a_k C_k^p z_0^{k-p})(z - z_0)^p.$$

Dễ kiểm tra $\sum_{k=p}^{\infty} a_k C_k^p z_0^{k-p} = \dfrac{1}{p!} S^{(p)}(z_0)$. □

Chú ý: Bán kính hội tụ của chuỗi cho ở mệnh đề trên có thể $> R - |z_0|$. Chẳng hạn với $S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (iZ)^k$, ta có $S(z) = \dfrac{1}{1-iz}$, $|z| < 1$. Giả sử $z_0 \in \mathbf{R}$, khi đó

$$\frac{1}{1-iz} = \frac{1}{1-iz_0}(1 - i\frac{z-z_0}{1-iz_0})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{(1-iz_0)^{k+1}}(z-z_0)^k.$$

Chuỗi sau cùng hội tụ khi $|z - z_0| < \sqrt{1+z_0^2}$. Rõ ràng $\sqrt{1+z_0} > 1 - |z_0|$.

Chú ý: Nếu đặt $M(r) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$, $r < R$, thì với $|z| \leq r_0 < r < R$ ta có:

$$\left|\frac{1}{n!} S^{(n)}(z)\right| \leq \frac{M(r)}{(r-r_0)^n}.$$

5.3 Không điểm của hàm giải tích. z_0 được gọi là **không điểm** của hàm f nếuu $f(z_0) = 0$.

Nếu $f \not\equiv 0$ và có biểu diễn $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, tại lân cận z_0, thì tồn tại $m = \min\{k : a_k \neq 0\}$ sao cho:

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z),$$

trong đó $g(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots$ là giải tích tại z_0 và $g(z_0) \neq 0$.
Khi đó m gọi là **cấp của không điểm** z_0.
Cấp của không điểm còn được đặc trưng bởi:

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \text{ với } k < m, \; f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Khi cấp $m = 1$, z_0 gọi là **không điểm đơn**; khi $m > 1$, gọi là **bội**.
Để ý là do g liên tục nên $f(z) \neq 0, 0 < |z - z_0| < \epsilon$, với $\epsilon > 0$ đủ bé. Nói một cách khác ta có:

Mệnh đề. *Nếu $f \neq 0$ là hàm giải tích trên miền D, thì tập Z_f các không điểm cuả f là tập rời rạc, i.e. mọi điểm $z_0 \in Z_f$ tồn tại lân cận U của z_0, sao cho $U \cap Z_f = \{z_0\}$. Đc biệt, khi K là tập compact trong D, thì tập $Z_f \cap K = \{z \in K : f(z) = 0\}$ là hữu hạn.*

5.4 Định lý duy nhất.
Định lý. *Cho f là hàm giải tích trên miền D. Khi đó các điều sau tương đương:*
(1) *$f^{(k)}(z_0) = 0$ với mọi $k \in \mathbf{N}$, tại một điểm $z_0 \in D$.*
(2) *$f = 0$ trên một tập có điểm giới hạn thuộc D (= tập không rời rạc trong D).*
(3) *$f \equiv 0$ trên D.*

Chứng minh: (3) $\Rightarrow$ (1) là rõ ràng. (1) $\Rightarrow$ (2) do khai triển Taylor.
Để chứng minh (2) $\Rightarrow$ (3) gọi z_0 là điểm giới hạn của tập không điểm Z_f. Do f liên tục $f(z_0) = 0$. Vì z_0 không là không điểm cô lập, từ mệnh đề ở 5.3 suy ra $f \equiv 0$ ở một

lân cận của z_0. Đặt $X = \{z \in D : f \equiv 0$ ở lân cận $z\} = \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0, \forall k\}$. Ta có $X \neq \emptyset$ vì chứa z_0, X là mở do định nghĩa, X là đóng trong D vì là giao của các tập đóng. Do D liên thông, $X = D$. □

Hệ qủa. *Cho $f, g \in A(D)$, D là miền. Nếu $f = g$ trên một tập có điểm giới hạn thuộc D, thì $f \equiv g$.*

Ví dụ.
a) Hai hàm giải tích trên $\mathbf{C}$ bằng nhau trên $\mathbf{R}$ thì đồng nhất với nhau. Chẳng hạn, vì công thức $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$ đúng cho $z \in \mathbf{R}$, nên cũng đúng cho $z \in \mathbf{C}$.
b) Không tồn tại $f \in A(\mathbf{C})$ thỏa $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Thực vậy, nếu tồn tại f nh vậy, thì $f(z) = z$ trên $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$. Theo nguyên lý thác triển ta có $f(z) = z, \forall z \in \mathbf{C}$. Vô lý.
Bài toán thác triển giải tích: *Cho $f \in A(D)$, D là miền. Giả sử $D' \supset D$ là miền. Tồn tại hay không hàm $h \in A(D')$ sao cho $h|_D = f$?*
Đây là một bài toán cơ bản của lý thuyết hàm phức. Hệ quả trên cho ta tính duy nhất của hàm thác triển h (nếu tồn tại).

III. Hàm chỉnh hình

0. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRÊN R^2 VÀ TRÊN C

Mọi ánh xạ $\mathbf{C}$-tuyến tính $w : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, có dạng $w(z) = (\alpha + i\beta)z$.
Vậy ánh xạ $\mathbf{C}$-tuyến tính được xem là phép nhân với số phức $w(1) = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$.

Mặt khác, như đã biết, trong $\mathbf{R}^2$ khi sử dụng cơ sở chính tắc $(1,0),(0,1)$, thì mọi ánh xạ $\mathbf{R}$-tuyến tính $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ được đồng nhất với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbf{R},$$

theo phép nhân ma trận $A(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$.

Nhận xét. Mọi ánh xạ $\mathbf{C}$-tuyến tính là $\mathbf{R}$-tuyến tính. Ngược lại, ta có:

0.1 Biểu diễn số phức dưới dạng ma trận. Khi đồng nhất $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ bởi
$z = x + iy = (x, y)$, thì $Az = A(x + iy) = ax + cy + i(bx + dy)$.

Mệnh đề. *A là $\mathbf{C}$-tuyến tính khi và chỉ khi $d = a$ và $c = -b$.*

Chứng minh: A là $\mathbf{C}$-tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại $\alpha + i\beta \in \mathbf{C}$:

$$A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Điều trên tương đương với

$$ax + cy + i(bx + dy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Hay là $a = \alpha, c = -\beta, b = \beta, d = -\alpha$. □

Nhận xét. Ta có biểu diễn dạng ma trận số phức $a + ib = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Bài tập: Chứng minh phép nhân số phức tương ứng với phép nhân ma trận biểu diễn chúng.

0.2 Ánh xạ tuyến tính bảo giác. Ánh xạ tuyến tính $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ được gọi là **bảo giác** nếuu nó bảo toàn góc (về độ lớn cũng như về hướng). Nói một cách khác $A = rT$, trong đó $r > 0$ còn T là phép quay.
Từ tính chất hình học của phép nhân số phức, ta có

Mệnh đề. *A là ánh xạ tuyến tính bảo giác khi và chỉ khi* $\det A > 0$ *và* $d = a, c = -b$. *Khi đó A biểu diễn số phức $a + ib = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, còn* $\det A = r^2 = a^2 + b^2$.

1. TÍNH KHẢ VI PHỨC - HÀM CHỈNH HÌNH

1.1 Đạo hàm. Cho $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$, D là tập mở trong $\mathbf{C}$. Hàm f gọi là **khả vi tại** $z_0 \in D$ nếuu tồn tại

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Ký hiệu giới hạn trên là $f'(z_0)$ hay $\dfrac{df}{dz}(z_0)$, và gọi là **đạo hàm của** f **tại** z_0 .
Nói một cách khác f khả vi tại z_0 nếuu f có thể **xấp xỉ** bởi hàm bậc nhất $w(h) = f(z_0) + (a + ib)h$ ở lân cận z_0, theo nghĩa sau:

$$f(z_0 + h) = w(h) + o(h),$$

trong đó $o(h)$ ký hiệu các hàm $\psi(h)$ thỏa $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\psi(h)}{h} = 0$.
Để tìm mối quan hệ giữa tính khả vi phức và tính khả vi thực, cần nhắc lại ánh xạ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ khả vi tại (x_0, y_0) nếuu nó có thể xấp xỉ bởi một ánh xạ affin ở lân cận (x_0, y_0), theo nghĩa sau: tồn tại ánh xạ $\mathbf{R}$-tuyến tính

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

sao cho

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \\ v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}).$$

Hơn nữa, khi đó

$$\begin{aligned} a &= u'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad & c &= u'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ b &= v'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad & d &= v'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Từ Mệnh đề 0.1 suy ra

1.2 Điều kiện Cauchy-Riemann. *Cho* $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ *và* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Khi đó* f *khả vi tại* z_0 *khi và chỉ khi*

(1) u, v *khả vi (theo nghĩa thực) tại* (x_0, y_0).

(2) u, v *thỏa* **điều kiện Cauchy-Riemann**: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ *tại* (x_0, y_0)

Khi đó $f' = u'_x + iv'_x = v'_x - iv'_y$ *tại* $z_0 = (x_0, y_0)$.

Nhận xét. Đổi biến

$$\begin{cases} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x &= (z + \bar{z})/2 \\ y &= (z - \bar{z})/2i \end{cases}$$

Nếu u, v khả vi, thì $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$.
Theo công thức đạo hàm hợp $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y})$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y})$.
Vậy

$$f \text{ khả vi } \Leftrightarrow u, v \text{ thoả điều kiện C-R } \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Khi đó $df(z_0) = f'(z_0)dz$.

Ví dụ.
a) Rất dễ tìm ví dụ u, v khả vi mà $f = u + iv$ không khả vi. Chẳng hạn hàm $f(z) = x + 2iy$ có u, v khả vi tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, nhng $u'_x = 1 \neq v_y = 2$: điều kiện Cauchy-Riemann không thoả, i.e. f không khả vi.
b) *Nếu f có đạo hàm tại mọi điểm trên miền D và có modul $|f| =$ const , thì $f =$ const .* Thật vậy, từ $|f|^2 = u^2 + v^2 =$ const , suy ra

$$2uu'_x + 2vv'_x = 0,\ 2uu'_y + 2vv'_y = 0.$$

Kết hợp với điều kiện Cauchy-Riemann, nếu $u^2+v^2 \neq 0$, ta có $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$ trên D. Từ tính liên thông suy ra $u =$ const , $v =$ const , i.e. $f =$ const . Nếu $u^2 + v^2 = 0$, thì rõ ràng $f =$ const.
c) Tương tự, ta cũng có $f =$ const khi $f' = 0$ hay f chỉ nhận giá trị thực, hay f chỉ nhận giá trị thuần ảo.
Tổng quát, nếu f khả vi trên tập mở D mà $f(D)$ không mở, thì $f =$ const . Đó là nội dung định lý 4.4.

Vì định nghĩa đạo hàm 1.1 về mặt hình thức hoàn toàn giống định nghĩa đối với trường hợp thực, nên ta có các kết quả sau

1.3 Mệnh đề. (1) *Giả sử f, g khả vi tại z_0. Khi đó $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ $(g(z_0) \neq 0)$ khả vi tại z_0, và ta có*

công thức tổng: $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

công thức tích: $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

công thức thương: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.

(2) *Giả sử f khả vi tại z_0, ϕ khả vi tại $w_0 = f(z_0)$. Khi đó hàm hợp $h = \phi \circ f$ khả vi tại z_0, và ta có*

công thức đạo hàm hợp: $h'(z_0) = \phi'(f(z_0))f'(z_0)$.

(3) *Giả sử f khả vi tại mọi điểm của một lân cận z_0 và $f'(z_0) \neq 0$. Giả sử f là khả nghịch trên một lân cận của z_0 và hàm ngược f^{-1} là khả vi tại $w_0 = f(z_0)$. Khi đó ta có*

công thức đạo hàm hàm ngược: $(f^{-1})'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$, $w_0 = f(z_0)$.

Chứng minh: Việc chứng minh (1) và (2) hoàn toàn lập lại chứng minh trong trường hợp hàm thực. Công thức (3) suy từ (2) hay từ

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}. \qquad \square$$

Chú ý. Giả thiết ở (3) là thừa, xem Định lý hàm ngược.

Ví dụ. Dễ thấy $(z)' = 1$, nên từ công thức tích suy ra $(z^n)' = nz^{n-1}$.
Tổng quát, mọi chuỗi lũy thừa hội tụ $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ là khả vi trong miền hội tụ của nó và đạo hàm $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ (xem II.3.5).

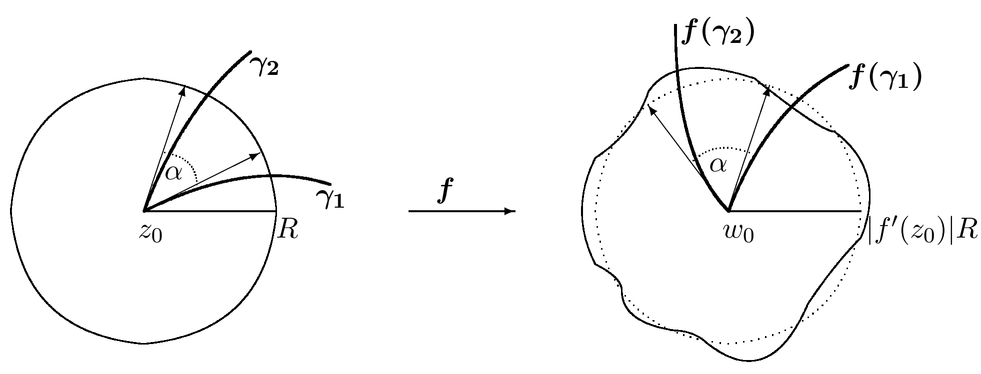
1.4 Hàm chỉnh hình. Hàm f gọi là **chỉnh hình** tại z_0 nếuu f khả vi tại mọi điểm của một lân cận của z_0. Hàm f gọi là chỉnh hình trên miền D nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của D. Ký hiệu $H(D)$ là tập mọi hàm chỉnh hình trên D.
Đôi khi để thuận tiện ta nói f chỉnh hình trên tập X bất kỳ nếu f chỉnh hình trên một tập mở chứa X. Khi đó cũng ký hiệu $f \in H(X)$.

Ví dụ. Hàm $f(z) = z\bar{z}$ có $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$. Nên f khả vi tại 0, nhng không chỉnh hình tại đó.
Chú ý: Một hàm giải tích rõ ràng là chỉnh hình. Ta sẽ chứng minh khái niệm chỉnh hình trùng với khái niệm giải tích xét ở chương II, i.e. $H(D) = A(D)$.

1.5 Tính bảo giác. Giả sử f khả vi tại z_0 và $f'(z_0) \neq 0$.
Theo định nghĩa đạo hàm, sau khi tịnh tiến $Z = z - z_0$ và $W = w - w_0$ có thể xem f tại lân cận z_0 được xấp xỉ bởi hàm tuyến tính

$$W = f'(z_0)Z = |f'(z_0)|e^{i\arg f'(z_0)}Z,$$

i.e. W thực hiện phép co dãn tỉ số $|f'(z_0)|$ và phép quay một góc $\arg(f'(z_0))$ trong mặt phẳng phức $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$.



Như vậy nếu 2 đường cong trong mặt phẳng $z = (x, y)$ cắt nhau tại z_0 theo một góc α nào đó (góc giữa 2 đường cong được định nghĩa là góc giữa 2 vector tiếp xúc), thì ảnh của chúng qua f trong mặt phẳng $w = (u, v)$ cũng cắt nhau tại $w_0 = f(z_0)$ một góc đúng bằng α (về độ lớn cũng như về hướng). Tính chất đó gọi là **tính bảo giác tại** z_0 .
Ngược lại ta có

Mệnh đề. *Cho 2 hàm thực $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Giả sử (u, v) khả vi tại (x_0, y_0) và đạo hàm*

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \\ v'_x(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

là ánh xạ tuyến tính bảo giác trong $\mathbf{R}^2$. Khi đó hàm $f(z) = f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ là khả vi tại $z_0 = x_0 + iy_0$ và $f'(z_0) \neq 0$.

Chứng minh: Suy trực tiếp từ mệnh đề 0.2 □

1.6 Lưới tọa độ. Như lập luận ở trên, nếu $w = f(z)$ là chỉnh hình trên miền D và $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$, thì ảnh của hai họ đường cong trực giao trong mặt phẳng z qua f sẽ là hai họ đường cong trực giao trong mặt phẳng w.

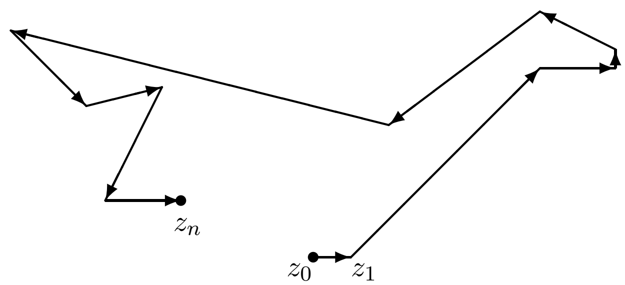
Ví dụ. Xem ví dụ I.3.2 cách mô tả 1, đối với hàm $f(z) = z^2$. Tại các điểm $z \neq 0$ ảnh của hai họ đường tọa độ $x =$ const và $y =$ const qua f là hai họ parabol trực giao nhau. Tại $z = 0$, tính bảo giác bị phá vỡ.

2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

2.1 Đường cong. Cho $D \subset \mathbf{C}$. **Đường cong (theo nghĩa Jordan) trong** D là ánh xạ liên tục, 1-1 $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Các điểm $\gamma(a)$ và $\gamma(b)$ gọi là **điểm đầu** và **điểm cuối** của đường cong.
Đường cong (Jordan) kín trong D là ánh xạ liên tục $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$, và $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ khi và chỉ khi $t_1 = t_2$ hay $t_1, t_2 \in \{a, b\}$
Đường cong γ gọi là **trơn** nếu đạo hàm $\gamma' = x' + iy'$ tồn tại và liên tục trên $[a, b]$. γ gọi là **trơn từng khúc** nếu tồn tại phân hoạch $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ sao cho hạn chế $\gamma|_{[a_k,a_{k+1}]}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$ là các đường cong trơn.
Ta hiểu **hướng** của đường cong γ là hướng tăng của tham số, i.e. $\gamma(t_1)$ là đứng trước $\gamma(t_2)$ nếuu $t_1 < t_2$. Đường cong **định hướng ngược** của γ, ký hiệu γ^-, được định nghĩa: $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), t \in [a, b]$.

Ví dụ. Sau đây là một số đường cong hay gặp:
a) Đoạn thẳng $[z_0, z_1]$ $(z_0, z_1 \in \mathbf{C})$: $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]$. Rõ ràng tham số hóa định hướng từ z_0 đến z_1.
b) Đường tròn $|z - a| = r$: $\gamma(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Ở đây đường tròn được định hướng "ngược chiều kim đồng hồ".

c) Đường tam giác $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ có các đỉnh $z_0, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, được định nghĩa nh là hợp các đoạn thẳng $[z_0, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_0]$ (theo thứ tự đó). Ta còn dùng ký hiệu: $\Delta(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + [z_2, z_0]$. Ký hiệu tổng hiểu là nối các đoạn thẳng như ví dụ a) (hãy viết biểu thức tường minh). Ở đây tam giác được định hướng từ z_0 đến z_1, z_1 đến z_2, rồi z_2 đến z_0.
Tương tự, ta định nghĩa đường gấp khúc qua các điểm $z_0, z_1, \cdots z_n$ nh là hợp $L(z_0, \cdots, z_n) = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \cdots + [z_{n-1}, z_n]$.



Chú ý:
a) Theo định nghĩa đường cong là ánh xạ (phép tham số hóa) chứ không phải là tập con của $\mathbf{C}$. Ta dùng ký hiệu γ^*, hay chính γ khi nội dung đã rõ, để chỉ tập ảnh $\gamma([a, b])$ của đường cong $\gamma(t), t \in [a, b]$. Rõ ràng là có nhiều phép tham số hóa cho cùng một tập trong $\mathbf{C}$ (hãy tìm ví dụ).
b) Khái niệm đường cong có thể mở rộng như sau: cho các đường cong $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbf{C}$ và $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbf{C}$. Ta nói γ_1 và γ_2 là **tương đương** nếuu tồn tại song ánh liên tục $\tau : [a, b] \to [c, d]$, $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$. Khi đó $\gamma_1^* = \gamma_2^*$. Hơn nữa,
nếu $\tau(a) = c, \tau(b) = d$, thì γ_1 và γ_2 xác định cùng một hướng.
nếu $\tau(a) = d, \tau(b) = c$, thì γ_1 và γ_2 ngược hướng nhau.
c) Về mặt trực quan, đôi khi trong giáo trình ta nói đến đường cong như là tập con của $\mathbf{C}$. Khi đó ta hiểu đó là một tham số hóa cụ thể hay một lớp tham số hóa tương đương của cùng tập đó. Chẳng hạn, khi nói đến đường tròn, tam giác hay đường gấp khúc ta hiểu đó là các tham số hóa cho ở ví dụ trên.

Độ dài đường cong. Cho $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Gọi P là một phép phân hoạch $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Khi đó độ dài đường gấp khúc nối các điểm $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_n)$:

$$L(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

Độ dài đường cong γ, định nghĩa

$$L(\gamma) = \sup_P L(\gamma, P), \qquad \text{(sup lấy theo mọi phân hoạch } P).$$

Nếu $L(\gamma) < \infty$, thì γ gọi là **đường cong khả trường**. Kết qủa sau được chứng minh ở giáo trình giải tích thực:

Mệnh đề. *Nếu $\gamma(t) = x(t) + y(t), t \in [a, b]$, là đường cong trơn từng khúc, thì γ*

khả trường và

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

2.2 Tích phân đường.
Cho $f : D \to \mathbf{C}$ và $\gamma : [a,b] \to D$. Tích phân f dọc theo đường cong γ được định nghĩa thông qua giới hạn của tổng

$$\sum_i f(\gamma(\xi_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

khi độ bé của phân hoạch $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, tiến về 0. Giới hạn trên tồn tại không phụ thuộc phép phân hoạch và cách chọn $\xi = (\xi_i)$, khi f liên tục và γ trơn từng khúc. Ở phần này ta nêu định nghĩa tính toán dựa trên cách xây dựng tích phân vừa nêu, mà không đi vào chi tiết về sự tồn tại.
Với $f(t) = P(t) + iQ(t), t \in [a,b]$, là hàm liên tục của 1 biến thực, ta định nghĩa

$$\int_a^b f = \int_a^b P(t)dt + i\int_a^b Q(t)dt\ .$$

Cho $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, là đường cong trơn. Giả sử $f = u + iv$ là hàm liên tục trên γ^*. Khi đó $f(z(t))z'(t) = (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))(x'(t) + iy'(t)) = P(t) + iQ(t),\ t \in [a,b]$, là hàm liên tục của 1 biến thực. **Tích phân hàm** f **dọc theo đường cong** γ là số

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt\ .$$

Cho γ là đường cong trơn từng khúc, hay tổng quát hơn γ là hợp hữu hạn đường cong trơn $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$. Nếu f là hàm liên tục trên $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$, thì **tích phân của** f **trên** γ được ký hiệu và định nghĩa là

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz\ .$$

Tích phân trên đường cong kín đường còn được ký hiệu $\oint_\gamma f$.

Nhận xét. Cho $\gamma_1(t), t \in [a,b]$, và $\gamma_2(\tau), \tau \in [c,d]$, là 2 đường cong trơn. Giả sử $\tau : [a,b] \to [c,d]$ khả vi liên tục sao cho $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$, thì theo công thức đổi biến ta có

$$\int_{\tau(c)}^{\tau(d)} f(\gamma_2(\tau))\gamma_2'(\tau)d\tau = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt.$$

Như vậy tích phân trên 2 đường cong tương đương cùng hướng là bằng nhau, tích phân trên 2 đường tương đương ngược hướng là đối nhau.

2.3 Tính chất. *Cho γ là đường cong trơn từng khúc và f, g là các hàm phức liên tục trên γ^*. Khi đó*

Tính tuyến tính: $\displaystyle\int_\gamma(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_\gamma f+\beta\int_\gamma g \qquad (\alpha,\beta\in\mathbf{C}).$

Tính phụ thuộc hướng: $\displaystyle\int_{\gamma^-} f \quad = -\int_\gamma f\ .$

Tính liên tục: $\displaystyle|\int_\gamma f| \quad \leq \max_{\gamma^*}|f|L(\gamma).$

Chứng minh: Tính tuyến tính là rõ ràng. Tính phụ thuộc hướng suy từ công thức đổi biến nh phần nhận xét ở 2.2.
Để chứng minh bất đẳng thức cuối, đặt $I=\displaystyle\int_\gamma f=|I|e^{i\theta}$. Suy ra

$$\begin{aligned}|I| &= \mathrm{Re}(\int_\gamma e^{-i\theta}f)=\mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta}f(z(t))z'(t)dt\right)\\ &\leq \int_a^b|f(z(t))||z'(t)|dt\leq\max_{\gamma^*}|f|\int_a^b|z'(t)|dt=\max_{\gamma^*}|f|L(\gamma).\end{aligned}$$

□

Ví dụ. Trên đường tròn tâm a bán kính r với tham số cho ở ví dụ 2.2.b, và $n\in\mathbf{Z}$, ta có:

$$\begin{aligned}\oint_{|z-a|=r}(z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi}e^{nit}ie^{it}dt=i\int_0^{2\pi}(\cos(n+1)t+i\sin(n+1)t)dt\\ &= \begin{cases}2\pi i & \text{neu } n=-1\\ 0 & \text{neu } n\neq-1\end{cases}\end{aligned}$$

Hệ qủa. *Cho γ là đường cong trơn. Nếu dãy hàm liên tục (f_n) hội tụ đều về f trên γ^*, thì f liên tục trên γ^* và*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n=\int_\gamma f,$$

i.e. có thể chuyển dấu giới hạn qua dấu tích phân.

Chứng minh: Từ tính hội tụ đều suy ra tính liên tục của f trên γ^*. Theo Tính chất (3) ta có

$$|\int_\gamma f_n-\int_\gamma f|\leq\max_{\gamma^*}|f_n-f|L(\gamma)$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{\gamma^*}|f_n-f|=0$ và $L(\gamma)<\infty$, suy ra giới hạn trên. □

2.4 Nguyên hàm. Hàm F gọi là **nguyên hàm** của hàm f trên miền D nếu

$$F'(z)=f(z),z\in D\ .$$

Vậy nếu F và G là 2 nguyên hàm của f trên miền D, thì từ tính liên thông suy ra $G=F+$ const . Hơn nữa, cũng như hàm số thực ta có:

Công thức Newton-Leibniz. *Nếu f liên tục và có nguyên hàm F trên miền D, thì với mọi đường cong γ trong D nối z_0, z_1, ta có*

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0).$$

Chứng minh: Suy từ công thức Newton-Leibniz (định lý cơ bản của giải tích) trường hợp thực:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square\end{aligned}$$

Nhận xét. Như vậy, nếu f có nguyên hàm trên miền D, thì tích phân $\displaystyle\int_\gamma f$ chỉ phụ thuộc các điểm mút z_0, z_1, không phụ thuộc dạng đường cong. Trường hợp này ta còn dùng ký hiệu $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f$ để chỉ tích phân của f trên đường cong có điểm đầu z_0, điểm cuối z_1. Đặc biệt, ta có

Hệ qủa. *Nếu f có nguyên hàm trên miền D, thì với mọi đường cong kín γ trong D ta có $\displaystyle\oint_\gamma f = 0$.*

Định lý sau khẳng định chiều ngược lại của phát biểu trên cũng đúng.

Định lý Morera. *Giả sử hàm f liên tục trên miền D và $\displaystyle\int_\gamma f = 0$, với mọi đường cong kín γ trong D. Khi đó f có nguyên hàm trên D.*

Chứng minh: Trước hết chú ý là nếu D là một miền, thì với mọi cặp điểm $z_0, z \in D$ tồn tại đường gấp khúc $L(z_0, z) = [z_0, z_1] + \cdots + [z_n, z]$ trong D nối z_0, z.
Cố định $z_0 \in D$. Định nghĩa $\quad F(z) = \displaystyle\int_{L(z_0,z)} f,\ z \in D.$
Do giả thiết, tích phân vế phải chỉ phụ thuộc z mà không phụ thuộc đường cong nối z_0 với z, i.e. định nghĩa là đúng đắn. Với $z \in D$ và h đủ bé, ta có

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \sup_{\zeta\in[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|\,.$$

Từ tính liên tục của f, biểu thức cuối sẽ tiến về 0 khi $h \to 0$. Vậy $F'(z) = f(z)$, i.e. f có nguyên hàm trên D. $\square$

Ví dụ.
a) Có thể dùng các phương pháp tìm nguyên hàm như trường hợp thực để tính tích phân. Chẳng hạn, dùng nguyên hàm trực tiếp

$$\int_{z_0}^{z_1}\cos z dz = \sin z_1 - \sin z_0, \quad \int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}), \quad (n \neq -1)$$

hay tích phân từng phần

$$\int_0^a ze^z dz = ze^z|_0^a - \int_0^a e^z dz = ae^a - e^a + 1.$$

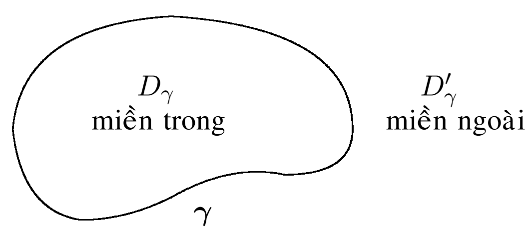
b) Nếu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, trên đĩa $D = \{|z-z_0| < R\}$, thì với $z \in D$ ta có $\int_{z_0}^{z} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$.

c) Hàm $f(z) = \frac{1}{z}$ là không có nguyên hàm trên $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, vì tích phân trên đường cong kín $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$. Tuy nhiên, f lại có nguyên hàm trên miền $D = \mathbf{C} \setminus \{z = te^{-i\pi}, t \geq 0\}$, chẳng hạn nhánh chính của hàm log. Vậy tính chất hình học của miền có vai trò quan trọng trong bài toán tồn tại nguyên hàm.

3. ĐỊNH LÝ CAUCHY

Trước hết ta chấp nhận định lý dễ thấy, khó chứng minh sau

Định lý Jordan. *Mọi đường cong kín γ chia $\mathbf{C}$ thành đúng hai miền, i.e. $\mathbf{C} \setminus \gamma^*$ là hợp của hai miền D_γ và D'_γ có cùng biên γ^*, miền D_γ giới nội gọi là* **miền trong** *còn D'_γ không giới nội gọi là* **miền ngoài**.



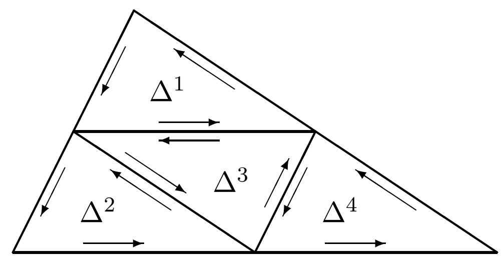
Miền $D \subset \mathbf{C}$ gọi là **miền đơn liên** nếuu với mọi đường cong kín γ trong D miền trong D_γ giới hạn bởi γ chứa trong D. Miền không đơn liên gọi là **miền đa liên**.
Một cách trực quan miền đơn liên không có "lỗ thủng". Các ví dụ sau minh họa cho khái niệm này.
Ví dụ. Các miền lồi hay miền hình sao là đơn liên. Chẳng hạn: mặt phẳng $\mathbf{C}$, đĩa mở $D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\}$, hình tam giác, hình chữ nhật, $\cdots$.
Đĩa thủng $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, vành $A = \{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$ $(0 < r < R)$, là các miền đa liên.

Định lý sau được xem là quan trọng nhất của lý thuyết hàm phức:

3.1 Định lý Cauchy cho miền đơn liên. *Giả sử $f \in H(D)$, D là miền đơn liên. Khi đó*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \text{ , } \textit{với mọi đường cong kín } \gamma \textit{ trong } D.$$

Chứng minh: Sau đây là chứng minh của Goursat. Chia ra 3 bước.
Bước 1: γ là biên tam giác $\Delta \subset D$. Đặt $I(\Delta) = \oint_{\partial\Delta} f(z)dz$.
Chia Δ bằng các đường trung bình, với định hướng như hình vẽ, ta có 4 tam giác con $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4 \subset D$. Do tính phụ thuộc hướng $I(\Delta) = I(\Delta^1)+I(\Delta^2)+I(\Delta^3)+I(\Delta^4)$.
Vậy tồn tại $\Delta_1 = \Delta^k$ sao cho $|I(\Delta^k)| \geq \dfrac{1}{4}|I(\Delta)|$.



Tiếp tục chia Δ_1, ... , ta có một dãy các tam giác $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, thỏa:

- $\Delta \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$.
- $|I(\Delta_n)| \geq \dfrac{1}{4^n}|I(\Delta)|$.
- $|\partial\Delta_n| = \dfrac{1}{2^n}|\partial\Delta|$.

Theo định lý Cantor I.3.5, tồn tại duy nhất $z_0 \in \Delta_n, \forall n$.
Từ tính khả vi tại z_0 ta có:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon. \ (a)$$

Với δ đó, tồn tại n_0 sao cho: $\quad n > n_0 \Rightarrow \Delta_n \subset \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \delta\}$. (b)
Vậy khi $n > n_0, z \in \partial\Delta_n$, thì

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0| < \epsilon|\partial\Delta_n| < \epsilon\frac{|\partial\Delta|}{2^n}. \ (c)$$

Mặt khác, do $\oint_{\partial\Delta} dz = \oint_{\partial\Delta} zdz = 0$, ta có

$$\oint_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz = \oint_{\partial\Delta_n} f(z)dz = I(\Delta_n). \ (d)$$

Từ $(a)(b)(c)(d)$ suy ra

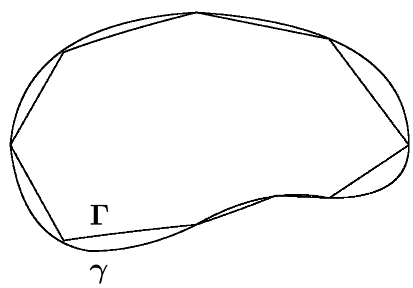
$$\frac{|I(\Delta)|}{4^n} \leq |I(\Delta_n)| \leq \frac{\epsilon|\partial\Delta|}{2^n}|\partial\Delta_n| = \frac{\epsilon|\partial\Delta|^2}{4^n}.$$

Suy ra $I(\Delta) = 0$.
Bước 2: γ là biên của đa giác. Phân hoạch đa giác đó thành hữu hạn tam giác (có

thể có chung cạnh): $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$.
Khi đó biên định hướng cho bởi: $\Gamma = \partial\Delta_1 + \cdots + \partial\Delta_s$.
(chú ý là cạnh 2 tam giác kề nhau là đối hướng). Từ đó suy ra kết quả.
Bước 3: γ trơn từng khúc. Do tính liên tục đều của f trên miền đóng giới hạn bởi γ, khi z_1, z_2 trong miền đó, ta có

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \ |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Phân hoạch γ bởi các điểm $z_0, z_1, \cdots, z_n$ sao cho: các cung con γ_k nối z_k, z_{k+1} có độ dài $|\gamma_k| < \delta' < \delta$, và đường gấp khúc Γ nối các điểm chia đó chứa trong D.



Khi đó $\left|\int_\gamma f - \sum_k f(z_k)(z_{k+1} - z_k)\right| = \left|\sum_k \int_{\gamma_k} (f - f(z_k))\right| < \epsilon L(\gamma)$,

và $\left|\int_\Gamma f - \sum_k f(z_k)(z_{k+1} - z_k)\right| = \left|\sum_k \int_{[z_k, z_{k+1}]} (f - f(z_k))\right| < \epsilon L(\Gamma) < \epsilon L(\gamma)$.

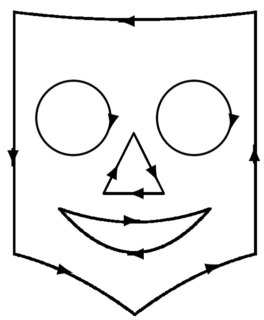
Suy ra $\left|\int_\gamma f \ - \ \int_\Gamma f\right| < 2\epsilon L(\gamma)$. Vậy $\int_\gamma f = \int_\Gamma f = 0$. □

Từ định lý trên và định lý Morera, ta có

Hệ qủa. *Giả sử D là miền đơn liên. Khi đó nếu f chỉnh hình trên D, thì f có nguyên hàm trên D. Đặc biệt, mọi hàm chỉnh hình trên một tập mở đều có nguyên hàm tại lân cận mỗi điểm.*

Chú ý: Định lý trên không đúng cho miền đa liên. Chẳng hạn, hàm $f(z) = 1/z$ chỉnh hình trên $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, nhưng $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.
Ví dụ trên cũng khẳng định không tồn tại nhánh giải tích của hàm log trên $\mathbf{C}^*$, vì nếu tồn tại thì nó là nguyên hàm của $f(z) = 1/z$ trên $\mathbf{C}^*$ nên tích phân trên phải bằng 0. Tuy nhiên, nếu D là miền đơn liên không chứa 0 (chẳng hạn mặt phẳng cắt nửa đường thẳng thực $D = \mathbf{C} \setminus \{z = te^{i\varphi}, t \geq 0\}$), thì f có nguyên hàm $F(z) = \displaystyle\oint_{L(z_0,z)} \frac{dz}{z}$, với $L(z_0, z)$ là đường cong trong D nối $z_0, z \in D$ (khi đó tích phân không phụ thuộc dạng đường cong mà chỉ phụ thuộc 2 đầu mút). F chính là một nhánh giải tích của hàm log trên D thỏa $\ln z_0 = 0$.
Tương tự đối với miền tồn tại nhánh giải tích của hàm $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$.

Có thể tổng quát định lý trên cho một lớp các miền đa liên có dạng sau.
Ta hiểu **miền có biên định hướng** là miền D có biên ∂D là hữu hạn các đường cong kín trơn từng khúc rời nhau $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$, đường cong γ_0 gọi là **biên ngoài** còn $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ là các **biên trong**, thỏa điều các kiện:
(1) D chứa trong miền giới hạn bởi γ_0 và chứa trong miền ngoài của $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$.
(2) Với $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, và $i \neq j$, γ_i thuộc miền ngoài của γ_j.
Một cách trực quan, ∂D được **định hướng thuận** như sau: nếu "đi dọc theo hướng" của mỗi đường cong đó, thì miền D ở phía "trái". Nói một cách khác, biên ngoài định hướng "ngược chiều kim đồng hồ", các biên trong định hướng "thuận chiều kim đồng hồ".
Chú ý: Ở đây không nêu định nghĩa chặt chẽ khái niệm: hướng, định hướng,...



3.2 Định lý Cauchy cho miền có biên định hướng. *Cho f là hàm chỉnh hình trên miền chứa bao đóng của miền có biên định hướng D. Khi đó*

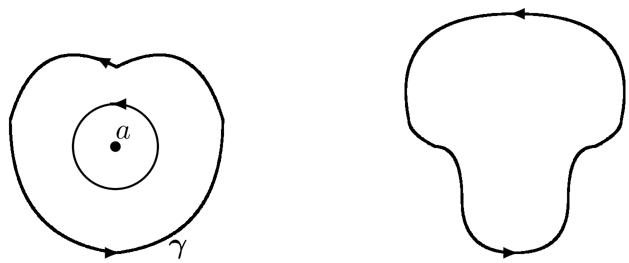
$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0 \ , \quad \textit{trong đó } \partial D \ \textit{ định hướng thuận} \ .$$

Chứng minh: Để chứng minh chỉ cần bổ sung vào ∂D các cặp đường nối các đường biên trong với biên ngoài, có hướng ngược nhau (e.g. hãy bổ sung vào hình trên). Khi đó tích phân trên ∂D được biểu diễn thành tích phân trên đường cong kín trong miền đơn liên. Định lý suy từ định lý 3.1 . □

Ví dụ. Tính $I(\gamma) = \oint_\gamma \dfrac{dz}{z-a}$, với γ là đường cong kín, định hướng thuận, không qua a.
Trường hợp 1: γ không bao quanh a, i.e. miền D_γ giới hạn bởi γ không chứa a. Khi đó $\dfrac{1}{z-a}$ là chỉnh hình trên D_γ, nên $I(\gamma) = 0$.
Trường hợp 2: γ bao quanh a. Gọi U là đĩa tâm a bán kính r đủ bé sao cho $U \subset D_\gamma$. Áp dụng định lý 3.2 cho miền $D := D_\gamma \setminus U$, ta có $\partial D = \gamma + \partial U^-$. Từ $I(\partial D) = 0$, suy ra

$$I(\gamma) = I(\partial U) = \oint_{\partial U} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Để ý là tích phân trên không phụ thuộc dạng đường cong kín, mà chỉ phụ thuộc vị trí của đường cong đối với điểm "kỳ dị" của hàm dưới dấu tích phân.



bao quanh a không bao quanh a

3.3 Công thức tích phân Cauchy. *Cho f là hàm chỉnh hình trên miền chứa bao đóng của miền có biên định hướng D. Khi đó*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z) & \textit{nếu} \quad z \in D \\ 0 & \textit{nếu} \quad z \notin D \end{cases} \quad (\partial D \ \textit{ định hướng thuận })$$

Chứng minh: Cho $z_0 \in D$. Gọi $U = \{|z - z_0| < r\} \subset D$, $K = D \setminus U$. Khi đó $\partial K = \partial D \cup \partial U^-$. Vì $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ chỉnh hình trên miền chứa $\overline{K}$, nên theo định lý 3.2 ta có

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z - z_0}dz &= \int_{\partial U}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt \\ &= i\int_0^{2\pi}(f(z_0 + re^{it}) - f(z_0))dt \ + \ 2\pi i f(z_0).\end{aligned}$$

Chứng minh tích phân trong biểu thức cuối $\to 0$, khi $r \to 0$: Do f liên tục trên $\overline{U}$, nên với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.
Vậy khi $r < \delta$, $|z_0 + re^{it} - z_0| = r < \delta$. Suy ra $|f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)| < \epsilon$. Vậy

$$|\int_0^{2\pi i}(f(z_0 + re^{it}) - f(z_0))dt| < \epsilon 2\pi$$

Từ đó dễ dàng suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

Nhận xét. Qua định lý trên ta thấy giá trị của một hàm chỉnh hình trong một miền hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên biên miền đó. Chẳng hạn, nếu $\partial D = \{|z - z_0| = r\}$, thì

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Ví dụ.
a) Xét $I(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z dz}{z(z-3)}$. Ta tính $I(\gamma)$ trong 3 trường hợp sau:
Trường hợp 1: $\gamma := \gamma_1$ là đường tròn tâm 3 bán kính $3/4$.
Lúc này γ_1 chỉ bao quanh 3, nên $I(\gamma_1) = \dfrac{e^z}{z}|_{z=3} = \dfrac{e^3}{3}$.
Trường hợp 2: $\gamma := \gamma_2$ là đường tròn tâm 0 bán kính $1/4$.
Vì γ_2 chỉ bao quanh 0, nên $I(\gamma_2) = \dfrac{e^z}{z-3}|_{z=0} = -\dfrac{1}{3}$.

Trường hợp 3: $\gamma := \gamma_3$ là đường tròn tâm $1/2$ bán kính 5.
Vì γ_3 bao quanh cả 2 điểm 0 và 3, nên $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) = \dfrac{1}{3}(e^3 - 1)$.
Bằng lập luận nh trong ví dụ ở 3.2, dễ dàng suy ra giá trị $I(\gamma)$, với mọi đường cong kín γ không đi qua $0, 3$.
b) Cho $D = \{|z| < 2, \mathrm{Im} z > 0\}$. Khi đó

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{e^{iz}dz}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{z+i}|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

3.4 Khai triển Taylor. *Nếu f là hàm chỉnh hình trên tập mở D, thì f giải tích trên D. Cụ thể, với mọi $z_0 \in D$, tồn tại chuỗi lũy thừa $S(Z) \in \mathbf{C}[[Z]]$ có bán kính hội tụ $R \geq d(z_0, \partial D)$, sao cho ta có* **khai triển Taylor của** f **tại** z_0

$$f(z) = S(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \ , \ |z - z_0| < d(z_0, \partial D) \ ,$$

trong đó $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \cdots$

Chứng minh: Gọi $0 < r < R$. Khi đó $U = \{z \in D : |z - z_0| < r\} \subset D$. Theo công thức tích phân Cauchy, với $z \in U$, ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z_0)}\frac{1}{(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0})}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right)(z - z_0)^k \ , \end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối suy ra từ tính hội tụ đều của chuỗi trên.
Công thức cho a_k suy từ tính duy nhất của chuỗi lũy thừa (nhận xét II.3.4). □

Nhận xét. Dựa vào Định lý trên, có thể dùng phương pháp hình học để tìm bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa biểu diễn một hàm f. Chẳng hạn, ta có khai triển Taylor tại 0:

$$\frac{1}{z - a} = -\frac{1}{a(1 - z/a)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a^{k+1}} \quad (a \neq 0).$$

Vì hàm $1/(z - a)$ không chỉnh hình tại $z = a$, nên chuỗi vế phải có bán kính hội tụ $R = d(0, a) = |a|$.
Nếu f chỉnh hình trên toàn bộ $\mathbf{C}$, thì f có biểu diễn thành chuỗi Taylor trên $\mathbf{C}$, i.e. bán kính hội tụ của chuỗi là ∞. Một hàm như vậy gọi là **hàm nguyên**. Chẳng hạn, $e^z, \sin z, \cos z$, là các hàm nguyên.

Ví dụ. Do tính duy nhất, không nhất thiết phải tính $f^{(k)}(z_0)$ mà có thể tính hệ số của khai triển Taylor bằng nhiều cách.

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} e^z\cos z &= e^z\cdot\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+i)^k+(1-i)^k}{k!}z^k \quad z\in\mathbf{C}. \end{aligned}$$

b) Để khai triển Taylor hàm $\dfrac{z}{z+2}$ tại $z_0=1$, ta thực hiện các biến đổi

$$\frac{z}{z-2} = 1-\frac{2}{z+2} = 1-\frac{2}{3}\frac{1}{1+(z-1)/3} = 1-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}(z-1)^k, \quad |z-1|<3.$$

c) Từ $\dfrac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6+\cdots$, tích phân trên $[0,z]$ ta có khai triển Taylor của nhánh chính hàm arctang:

$$\text{arctg} z = z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots \qquad |z|<1.$$

Từ chứng minh định lý trên ta có:

3.5 Công thức Cauchy cho đạo hàm cấp cao. *Cho $f\in H(D)$. Khi đó f có đạo hàm mọi cấp $f^{(n)}(z), \forall n\in\mathbf{N}, \forall z\in D$, và*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},$$

trong đó γ là đường cong kín bao quanh miền trong D chứa z, định hướng thuận.

Ví dụ. Cho $I(\gamma) = \displaystyle\oint_\gamma\frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$, trong đó γ là đường cong kín, định hướng thuận, không qua i. Nh ví dụ ở 3.2 và công thức trên ta có

$$I(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{2!}(\cos z)''|_{z=i} & \text{nếu } \ \gamma \text{ bao quanh } i \\ 0 & \text{nếu } \ \gamma \text{ không bao quanh } i \end{cases}$$

Nhận xét. Như vậy nhờ lý thuyết tích phân Cauchy ta đã thống nhất khái niệm hàm giải tích (của Weierstrass) với khái niệm hàm chỉnh hình (của Cauchy và Riemann), i.e. $A(D)=H(D)$. Cụ thể, ta có:

Định lý. *3 điều sau là tương đương:*
(W) Hàm f có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa trong lân cận z_0.
(R) Hàm f khả vi trên một lân cận của z_0.
(C) Hàm f liên tục trong một lân cận của z_0, và $\displaystyle\oint_\gamma f = 0$, với mọi đường cong kín γ trong lân cận đó.

4. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM CHỈNH HÌNH

4.1 Bất đẳng thức Cauchy. *Giả sử f chỉnh hình trên miền chứa đĩa đóng $\{z : |z - z_0| \leq r\}$. Khi đó*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!M(r)}{r^k}\ , \text{ trong đó } M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Chứng minh: Suy từ biểu diễn tích phân của đạo hàm cấp cao 3.5 và bất đẳng thức tích phân. □

Áp dụng bất đẳng thức trên với $k = 1$ rồi cho $r \to +\infty$ ta có

Định lý Louville. *Nếu $f \in H(\mathbf{C})$ và f giới nội, thì f là hàm hằng.*

Dựa vào định lý Louville ta có một chứng minh ngắn gọn cho định lý sau.

Định lý cơ bản của đại số. *Mọi đa thức bậc $n > 0$ trên trường số phức đều có nghiệm. Do đó có đúng n nghiệm (kể cả bội).*

Chứng minh: Cho $P(Z)$ là đa thức bậc $n > 0$. Nếu P vô nghiệm, thì $\dfrac{1}{P}$ chỉnh hình trên $\mathbf{C}$ và giới nội vì $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Vậy $P =$ const , i.e. bậc của P là 0, vô lý.
Khẳng định cuối suy từ phép chia đa thức. □

4.2 Định lý giá trị trung bình. *Nếu f chỉnh hình trên miền chứa đĩa đóng $\{z : |z - z_0| \leq r\}$, thì*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Để ý là biểu thức vế phải chính là giá trị trung bình của f trên đường tròn $|z - z_0| = r$.

Chứng minh: xem nhận xét ở 3.3 . □

Từ định lý trên suy ra:

Nguyên lý maxima. *Nếu f chỉnh hình trên miền D và $f \neq$ const , thì modul $|f|$ không thể đạt cực đại tại $z_0 \in D$.*

Chứng minh: Giả sử $|f(z_0)|$ là cực đại địa phương. Với mọi $r > 0$ đủ bé, theo định lý trên ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|)dt = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0 + re^{it})|dt \leq 0.$$

Do $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| \geq 0$, nên nó phải bằng 0, với mọi $t \in [0, 2\pi]$ và mọi $r > 0$ đủ bé, i.e. $|f|$ là hằng ở lân cận z_0.

Tập $\{z \in D : |f(z)|$ là cực đại địa phương $\}$ khác trống và theo chứng minh trên nó vừa đóng vừa mở trong D. Do tính liên thông tập đó phải trùng với D, i.e. $|f| =$ const . Suy ra $f =$ const (xem ví dụ 1.2.b). □

Hệ qủa. *Nếu f chỉnh hình trên miền giới nội D, liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó $|f|$ đạt giá trị lớn nhất ở trên biên: $\max\limits_{\overline{D}} |f| = \max\limits_{\partial D} |f|$. Hơn nữa, nếu tồn tại $z_0 \in D$ sao cho $|f(z_0)| = \max\limits_{\overline{D}} |f|$, thì $f \equiv$ const .*

Chú ý: Điều kiện D giới nội là cần thiết để tồn tại $\max\limits_{\overline{D}} |f|$. Khi miền không giới nội, chẳng hạn với $D = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, hàm e^z là chỉnh hình trên đó và có modul không giới nội. Tuy nhiên $\max\limits_{\partial D} |e^z| = 1$.

Sau đây là một áp dụng của nguyên lý trên.

Bổ đề Schwarz. *Giả sử f chỉnh hình trên đĩa đơn vị $D = \{|z| < 1\}$, $f(0) = 0$ và $|f| < 1$. Khi đó*
(1) $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D$.
(2) *Nếu tồn tại $z_0 \neq 0$, sao cho $|f(z_0)| = |z_0|$, thì $f(z) = \lambda z$, với $|\lambda| = 1$.*

Chứng minh: Vì $f(0) = 0$, nên $\dfrac{f(z)}{z}$ chỉnh hình trên D. Theo giả thiết $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| < \dfrac{1}{r}$, khi $|z| = r < 1$. Theo nguyên lý maxima $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| < \dfrac{1}{r}$, khi $|z| \leq r$.
Do r tùy ý nên $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D$.
Nếu $\left|\dfrac{f(z_0)}{z_0}\right|$, với $z_0 \neq 0$, thì theo nguyên lý maxima $\dfrac{f(z)}{z} = \lambda =$ const . □

4.3 Định lý duy nhất. *Cho f, g là 2 hàm chỉnh hình trên miền D. Nếu $f = g$ trên một tập có điểm giới hạn thuộc D, thì $f \equiv g$.*

Chứng minh: xem II.5.3 □

4.4 Định lý ánh xạ mở. *Mọi hàm chỉnh hình khác hằng là ánh xạ mở, i.e. nếu $f \in H(D)$, thì ảnh tập mở trong D qua f là mở. Đặc biệt, nếu D là miền, thì $f(D)$ là miền.*

Chứng minh: Chỉ cần chứng minh: với mọi $z_0 \in D$, với $f(z_0) = w_0$, tồn tại $\epsilon, \delta > 0$ sao cho $f(\{|z - z_0| < \epsilon\}) \supset \{|w - w_0| < \delta\}$.
Với z ở lân cận z_0, ta có $f(z) - w_0 = (z - z_0)^k g(z)$, với $g \neq 0$.
Với $\epsilon > 0$ đủ bé $|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|$, $|z - z_0| < \epsilon$. Suy ra tồn tại nhánh đơn trị $h(z)$ của $\sqrt[k]{g(z)}$ trên miền $|z - z_0| < \epsilon$.
Vậy $f(z) - w_0 = h^k(z)$. Vì $h'(z_0) \neq 0$, theo định lý ánh xạ ngược địa phương suy ra điều cần chứng minh. □

Từ chứng minh trên, ta có các hệ qủa sau:

Mệnh đề. *Giả sử f chỉnh hình tại z_0, $f(z_0) = w_0$ và z_0 là không điểm cấp k của $f(z) - w_0$. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$ đủ bé, tồn tại $\delta > 0$, sao cho khi $|w - w_0| < \delta$ phương trình $f(z) = w$, có đúng k nghiệm trong miền $|z - z_0| < \epsilon$.*

Định lý hàm ngược. *Giả sử f chỉnh hình tại z_0 và $f'(z_0) \neq 0$. Khi đó f là khả nghịch địa phương và f^{-1} là chỉnh hình tại $f(z_0)$.*

4.5 Định lý Weierstrass về hội tụ. *Giả sử dãy hàm $f_k \in H(D)$ hội tụ đều về hàm f trên mỗi tập compact $K \subset D$. Khi đó $f \in H(D)$ và dãy $f_k^{(n)}$ hội tụ đều về $f^{(n)}$ trên mỗi compact $K \subset D$.*

Chứng minh: Từ định lý Morera và tính hội tụ đều ta có

$$\oint_\gamma f = \oint_\gamma \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \oint_\gamma f_k = 0,$$

trong đó γ là đường cong kín trong D. Lại theo định lý Morera $f \in H(D)$.
Theo công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm ta có $f_k^{(n)} \to f^{(n)}$, đều trên mỗi đĩa đóng $\{|z - z_0| \leq r\} \subset D$. Sự hội tụ đều trên vẫn đúng trên mỗi compact $K \subset D$, vì có thể phủ K bởi hữu hạn đĩa trong D. $\square$

IV. Kỳ dị - Thặng dư

1. CHUỖI LAURENT

1.1 Chuỗi Laurent. Xét chuỗi hình thức với số mũ âm của Z dạng

$$\sum_{k<0} a_k Z^k = \frac{a_{-1}}{Z} + \frac{a_{-2}}{Z^2} + \frac{a_{-3}}{Z^3} + \cdots, \quad a_k \in \mathbf{C}.$$

Chuỗi trên chính là chuỗi lũy thừa của $\dfrac{1}{Z}$, nên theo định lý Abel tồn tại $r \geq 0$, sao cho chuỗi trên hội tụ khi $|z| > r$ và hội tụ đều trên miền $|z| \geq \rho > r$.
Chuỗi Laurent là chuỗi dạng:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k Z^k = \sum_{k<0} a_k Z^k \ + \ \sum_{k\geq 0} a_k Z^k \ .$$

Chuỗi trên gọi là hội tụ nếuu phần mũ âm và phần mũ không âm hội tụ.
Tồn tại các bán kính hội tụ R, r sao cho chuỗi có số mũ dương hội tụ khi $|z| < R$, còn chuỗi số mũ âm hội tụ khi $|z| > r$. Vậy chuỗi Laurent trên hội tụ khi $r < R$. Khi đó $f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, xác định một hàm chỉnh hình trên vành $r < |z| < R$. Ngược lại, ta có:

1.2 Khai triển Laurent. *Nếu f là hàm chỉnh hình trên vành $r < |z - z_0| < R$, thì f có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng chuỗi Laurent tại z_0*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \ , \ r < |z - z_0| < R,$$

trong đó hệ số $a_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad (r < \rho < R).$

Chứng minh: Với mỗi $z, r < |z - z_0| < R$, gọi r_1, R_1 sao cho $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. Theo công thức tích phân Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\oint_{|\zeta-z_0|=R_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \ - \ \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\Big).$$

Hơn nữa, cũng theo công thức tích phân Cauchy, 2 tích phân vế phải không phụ thuộc r_1, R_1, nên chúng bằng tích phân lấy dọc $|\zeta - z_0| = \rho$.
Tích phân đầu có khai triển Taylor (phần mũ không âm) như chứng minh định lý III.3.4.
Để khai triển tích phân sau dưới dạng chuỗi, ta có (chú ý vị trí của ζ với z)

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \ , \quad \text{vì } \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1.$$

Từ tính hội tụ đều có thể lấy tích phân qua dấu $\sum$ ta có tích phân thứ nhì là

$$\int_{|\zeta-z_0|=R_1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\right)d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{|\zeta-z_0|=R_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^k d\zeta\right)(z-z_0)^{-k-1}.$$

Từ đó suy ra khai triển cần tìm. □

Hệ quả. *Mọi hàm f chỉnh hình trên vành $r<|z-z_0|<R$, có phân tích một cách duy nhất: $f=f_1+f_2$, trong đó*

$$f_1(z)=\sum_{k\geq 0}a_k(z-z_0)^k\ \in H(|z-z_0|<R),$$ *gọi là* **phần đều** *của f tại z_0*

$$f_2(z)=\sum_{k<0}a_k(z-z_0)^k\ \in H(r<|z-z_0|),$$ *gọi là* **phần chính** *của f tại z_0.*

Nhận xét. Cũng như khai triển Taylor, do tính duy nhất, nhiều phương pháp được áp dụng để khai triển Laurent. Chẳng hạn, để viết khai triển hàm f trong vành $r<|z-z_0|<R$, tại z_0, phân tích f thành tổng hay tích các hàm mà khai triển Laurent đã biết: $\dfrac{1}{z-a}$, $e^{(z-z_0)^k}$, $\sin(z-z_0)^k,\cdots$.

Ví dụ.

a) Khai triển hàm $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ tại z_0. Có 2 trường hợp:

- Khai triển trong đĩa $|z-z_0|<R$ (khi đó $|a-z_0|>R$):

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)}=-\frac{1}{a-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{a-z_0}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}.$$

- Khai triển phía ngoài đĩa $|z-z_0|>R$ (khi đó $|a-z_0|<R$)

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{a-z_0}{z-z_0}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

b) Cho $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(z+2)}$. Phân tích $f(z)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{z+2})$. Xét một số khai triển:

- Khai triển tại 0 trên vành $1<|z|<2$:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\ ,\ |z|>1.$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+z/2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{2^{k+1}}\ ,\ |z|<2.$$

Vậy $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{2^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\right)\ ,\ 1<|z|<2.$

- Khai triển tại 1 trên vành $1<|z-1|<3$:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3+(z-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+(z-1)/3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^k}{3^{k+1}}\ ,\ |z-1|<3.$$

Vậy $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{3^{k+2}} - \frac{1}{3(z-1)}$, $1 < |z-1| < 2$.

c) Khai triển Laurent hàm $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$, tại $z_0 = 1$. Phân tích

$$\sin \frac{z}{z-1} = \sin(1 + \frac{1}{z-1}) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1}.$$

Từ khai triển Taylor hàm sin và cos suy ra

$$\cos \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(z-1)^{2k}} \ , \ z \neq 1.$$

$$\sin \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(z-1)^{2k+1}} \ , \ z \neq 1.$$

Từ đó suy ra khai triển Laurent của $f(z)$, $z \neq 1$.

2. ĐIỂM KỲ DỊ CÔ LẬP

2.1 Định nghĩa. a gọi là **điểm kỳ dị cô lập** của hàm f nếuu f chỉnh hình trên một lân cận thủng $0 < |z-a| < R$ của a. Điểm kỳ dị của hàm f được phân loại:

- **Kỳ dị khử được**: nếu tồn tại $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbf{C}$.
- **Cực điểm** : nếu $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
- **Kỳ dị cốt yếu** : nếu không tồn tại $\lim_{z\to a} f(z)$ (trong $\overline{\mathbf{C}}$).

Bài tập: Chứng minh các hàm sau có kỳ dị khử được, cực điểm và kỳ dị cốt yếu tại $a = 0$ tương ứng: $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$, $e^{1/z}$.

2.2 Phân loại điểm kỳ dị theo khai triển Laurent. *Giả sử hàm f có kỳ dị cô lập tại a và có khai triển Laurent*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z-a)^k + \sum_{k<0} a_k (z-a)^k, \ 0 < |z-a| < R,$$

Khi đó
(1) *a là khử được khi và chỉ khi phần chính $f_2 \equiv 0$.*
(2) *a là cực điểm khi và chỉ khi phần chính $f_2 \neq 0$ và chỉ có hữu hạn số hạng.*
(3) *a là cốt yếu khi và chỉ khi phần chính f_2 có vô số số hạng.*

Chứng minh: (1) Nếu f có kỳ dị khử được tại a, thì $|f| \leq M$ ở lân cận a. Với $k < 0$,

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}} \right| \leq M\rho^{-k} \to 0 \quad \text{khi } \rho \to 0.$$

Vậy $a_k = 0$ nếu $k < 0$, i.e. phần chính $f_2 \equiv 0$.
Ngược lại, nếu $f_2 \equiv 0$, thì $\lim_{z\to a} f(z) = a_0$. Vậy a là kỳ dị khử được.

(2) f có cực điểm tại a khi và chỉ khi $\dfrac{1}{f}$ có kỳ dị khử được tại a. Theo (1), tồn tại $m \in \mathbf{N}$: $\dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z)$, với g chỉnh hình tại a, $g(a) \neq 0$.
Viết cách khác $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, với $h = \dfrac{1}{g}$ là chỉnh hình tại a, $h(a) \neq 0$.
Nghĩa là khai triển Laurent có phần chính khác 0 và hữu hạn số hạng:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}(a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1}) + f_1(z).$$

(3) là trường hợp còn lại. □

Nhận xét. Từ chứng minh trên, ta có đặc trưng của các loại kỳ dị:
(1) a là kỳ dị khử được của f khi và chỉ khi f bị chặn tại lân cận a. Hơn nữa, vì khai triển thành chuỗi Laurent chỉ có phần đều f_1, nên f có thể thác triển thành f_1 là hàm chỉnh hình tại a.
Chẳng hạn, ta có khai triển Laurent:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{31} + \frac{z^5}{5!} - \cdots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \quad 0 < |z|.$$

Vậy hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ có thể thác triển thành hàm giải tích tại 0 khi cho giá trị $f(0) = 1$.
(2) Nếu a là cực điểm của f, thì theo chứng minh trên tồn tại $m > 0$, sao cho

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \text{ phần đều},$$

trong đó $h(a) = a_{-m} \neq 0$. Khi đó m gọi là **cấp của cực điểm** a.
Như vậy tại các cực điểm hàm có tính chất như phân thức hữu tỉ $\dfrac{c}{(z-a)^m}$. Cũng như tập không điểm của một hàm chỉnh hình, tập các cực điểm của một hàm là tập rời rạc.
(3) Tại lân cận điểm kỳ dị cốt yếu dáng điệu hàm rất xấu. Trước hết xét ví dụ sau. Ta có khai triển Laurent tại 0:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \quad |z| > 0.$$

Nên hàm $e^{\frac{1}{z}}$ có kỳ dị cốt yếu tại 0. Hơn nữa ta có khẳng định sau:
Với mọi $\epsilon > 0$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, có thể nhận mọi giá trị $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ với $0 < |z| < \epsilon$.
Thật vậy, với $w = \rho e^{i\theta} \neq 0$, phương trình $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = w$, luôn có nghiệm dạng $z_k = 1/(\ln\rho + i(\theta + 2k\pi))$, $k \in \mathbf{Z}$. Hơn nữa $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = 0$. Vậy khi k đủ lớn $f(z_k) = w, |z_k| < \epsilon$.
Một cách tổng quát, ta có các định lý sau:

Định lý (Cosorati-Weierstrass). *Giả sử a là kỳ dị cốt yếu của f. Khi đó với mọi*

$w \in \mathbf{C}$, tồn tại dãy $z_n \to a$ sao cho $f(z_n) \to w$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh: Phản chứng, giả sử tồn tại $w \in \mathbf{C}$, $\epsilon > 0$ sao cho $|f(z) - w| \geq \epsilon$, với mọi z thuộc lân cận a. Suy ra hàm $g(z) = \dfrac{f(z) - w}{z - a}$ có cực điểm tại a. Vậy tồn tại $m \geq 1$: $g(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, với $h(a) \neq 0$. Do đó $f(z) - w = \dfrac{h(z)}{(z-a)^{m-1}}$, i.e. a là cực điểm hay kỳ dị khử được của f. Vô lý. □

Như ở ví dụ trên, ta nêu ở dây kết qủa sâu sắc hơn sau đây: [1]

Định lý (Picard). *Tại lân cận thủng của điểm kỳ dị cốt yếu, hàm chỉnh hình nhận mọi giá trị thuộc $\mathbf{C}$ có thể loại trừ một điểm.*

Sau đây là một áp dụng của các kết qủa nêu trên.

Phân tích hàm hữu tỉ thành các phân thức hữu tỉ. *Cho 2 đa thức P, Q. Giả sử $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ là nghiệm của Q với cấp $m_1, \cdots, m_n$ tương ứng. Khi đó ta có*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = G(z) + \sum_{j=1}^{n} G_j\left(\frac{1}{z - \alpha_j}\right) \ ,$$

trong đó G, G_j là các đa thức và $\deg G_j \leq m_j$.

Chứng minh: Trước hết chia đa thức ta có $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = G(z) + \dfrac{R(z)}{Q(z)}$,
trong đó R là đa thức với $\deg R < \deg Q$.
Gọi g_j là phần chính của khai triển Laurent của $\dfrac{R}{Q}$ tại α_j. Do α_j là cực điểm của $\dfrac{R}{Q}$ cấp $\leq m_j$, nên $g_j(z) = G_j\left(\dfrac{1}{z - \alpha_j}\right)$, với G_j là đa thức với $\deg G_j \leq m_j$. Theo hệ qủa ở 1.2, $\dfrac{R}{Q} - g_j$ là chỉnh hình trên $\mathbf{C}$ trừ tại các điểm $\alpha_k \neq \alpha_j$. Suy ra hàm $h = \dfrac{R}{Q} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j$ là chỉnh hình trên $\mathbf{C}$. Hơn nữa h giới nội, nên theo định lý Louville $h =$ const . Từ đó suy ra phân tích trên.
Các hệ số của các G_j có thể xác định bởi phương pháp hệ số bất định.

2.3 Kỳ dị tại vô cùng. Như đã đề cập ở chương I, để xét hàm f tại lân cận ∞, ta đa về xét hàm $\varphi(z) = f(\dfrac{1}{z})$ tại 0. Khi đó các khái niệm tương ứng tại ∞ được định nghĩa một cách tự nhiên, chẳng hạn:

Khai triển Laurent của f tại ∞ là $f(z) = \displaystyle\sum_k a_k z^k$ nếuu $\varphi(z) = \displaystyle\sum_k a_k z^{-k}$.

[1] Một chứng minh đơn giản có thể tham khảo: E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2nd ed., Ch.VIII §8, Oxford University Press 1939.

∞ gọi là **không điểm** (t.ư. **cực điểm, kỳ dị cốt yếu**) của f nếuu 0 là không điểm (t.ư. cực điểm, kỳ dị cốt yếu) của φ.
Cấp của không điểm (cực điểm) của f tại ∞ được định nghĩa là cấp của không điểm (cực điểm) của φ tại 0.

Mệnh đề. *Một hàm nguyên có cực điểm cấp m tại ∞ là đa thức bậc m.*

Chứng minh: Do giả thiết $\varphi(z) = f(\dfrac{1}{z}) = a_{-m}z^{-m} + a_{-m+1}z^{-m+1} + \cdots,\ z \neq 0$.
Hơn nữa một hàm nguyên có khai triển Taylor trên toàn $\mathbf{C}$, i.e. có phần chính bằng 0. Vậy $f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + a_0$. □

Từ kết qủa trên, suy ra nếu $f(z)$ là hàm nguyên không là đa thức, thì $f(\dfrac{1}{z})$ có $z = 0$ là kỳ dị cốt yếu. Chẳng hạn, các hàm: $e^{1/z}, \sin(1/z), \cos(1/z)$.

Một **hàm phân hình** trên D là hàm chỉnh hình trên D loại trừ một tập các điểm kỳ dị loại cực điểm. Chẳng hạn, hàm hữu tỉ là phân hình trên $\mathbf{C}$, hàm $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ phân hình trên $\mathbf{C}$ không là hữu tỉ. Ta có kết qủa sau.

Mệnh đề. *Một hàm phân hình trên* $\mathbf{C}$ *mà chỉ có hữu hạn cực điểm và ∞ là cực điểm là hàm hữu tỉ.*

Chứng minh: Gọi g và g_j là phần chính của khai triển Laurent hàm phân hình f tại ∞ và tại các cực điểm. Do giả thiết g là đa thức còn các g_j là các hàm hữu tỉ. Theo hệ qủa 1.2, ta có $f - g - \sum g_j$ là hàm giải tích, giới nội trên $\mathbf{C}$. Do đó $f = g + \sum g_j +$ const. □

3. THẶNG DƯ

Như đã xét ở chương III, việc tính tích phân dọc theo đường cong kín của một hàm được đưa về tính các tích phân theo đường tròn bao quanh các điểm kỳ dị của hàm đó. Sau đây là thuật ngữ và các công thức để cụ thể hóa kết qủa đó.

3.1 Định nghĩa.

Thặng dư của $f \in H(0 < |z-a| < R)$ tại a là số

$$\operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz\ ,\ 0 < r < R.$$

Thặng dư tại vô cùng của $f \in H(|z| > R)$ là số

$$\operatorname*{Res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz\ ,\ r > R.$$

Nhận xét. Theo định lý Cauchy, tích phân trên không phụ thuộc đường cong kín bao

quanh a, nên không phụ thuộc r.
Từ "thặng dư " (residue) có thể giải thích như sau:
Từ khai triển Laurent của f tại a, ta có

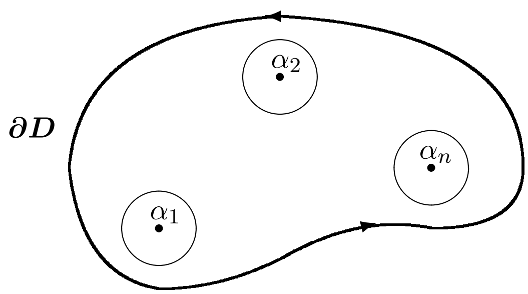
$$\operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-a)^k)dz = a_{-1}.$$

Suy ra $f(z) - \dfrac{\operatorname*{Res}_a f}{z-a}$ có tích phân trên mọi đường cong kín ở lân cận a triệt tiêu, nên hàm đó có nguyên hàm.

3.2 Định lý thặng dư. *Cho D là miền có biên định hớng. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên $\overline{D}$ trừ tại hữu hạn điểm kỳ dị $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in D$. Khi đó*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_j \operatorname*{Res}_{\alpha_j} f \ .$$

Chứng minh: Có thể lập luận như ở các ví dụ ở III.3, i.e. 'khoét' miền D bởi các đĩa tâm α_j, rồi dùng định lý Cauchy cho miền có biên định hướng đưa tích phân cần tính về tích phân trên các đường tròn tâm α_k, $k = 1, \cdots n$.



Sau dây là một chứng minh khác.
Gọi g_j là phần chính của f tại α_j. Khi đó $f - \sum_j g_j$ có bất thường khử được. Theo định lý Cauchy $\displaystyle\int_{\partial D}(f - \sum_j g_j) = 0$. Với chú ý là $\operatorname*{Res}_{\alpha_j} f = \operatorname*{Res}_{\alpha_j} g_j$, ta có công thức cần chứng minh. □

Hệ qủa. *Nếu $f \in H(\mathbf{C} \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\})$, thì* $\operatorname*{Res}_{\infty} f = -\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\alpha_j} f$.

Ví dụ. Hàm $\dfrac{z^8+z^3}{z^9+1}$, có 9 cực điểm là các căn bậc 9 của -1 . Từ hệ qủa trên ta có

$$\int_{|z|=2} \frac{z^8+z^3}{z^9+1}dz = 2\pi i \sum_{a=\sqrt[9]{-1}} \operatorname*{Res}_a \frac{z^8+z^3}{z^9+1} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{\infty} \frac{z^8+z^3}{z^9+1} = \boxed{\ ?\ }.$$

Nh vậy, thay vì tính thặng dư tại 9 điểm, ta chỉ cần tính thặng dư tại vô cùng tiết

kiệm nhiều công sức.
Bài tập: Dùng công thức 3 ở phần sau điền vào ô trên.

Theo công thức thặng dư ta có thể dùng thặng dư để tính tích phân đường. Sau đây là một số cách tính thặng dư một cách đơn giản và hiệu lực.

3.3 Tính thặng dư.

Công thức 1: *Khai triển Laurent hàm f. Khi đó*

Nếu $f(z) = \sum_k a_k(z-a)^k$, $0 < |z-a| < R$, *thì* $\operatorname*{Res}_a f = a_{-1}$.
Nếu $f(z) = \sum_k a_k z^k$, $|z| > R$, *thì* $\operatorname*{Res}_\infty f = -a_{-1}$.

Nhận xét. Như vậy nếu a là kỳ dị khử được, thì $\operatorname*{Res}_a f = 0$.

Ví dụ. Ta có

$$
\begin{aligned}
&z\cos\frac{1}{z-1} = (z-1)\cos\frac{1}{z-1} + \cos\frac{1}{z-1}\\
&= (z-1)\left(1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} + \cdots\right) + (1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} + \cdots)
\end{aligned}
$$

Vậy $\operatorname*{Res}_1 z\cos\frac{1}{z-1} = a_{-1} = -1/2! = -1/2$.

Công thức 2: *Nếu a là cực điểm cấp m của f, thì*

$$\operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}.$$

Đặc biệt, nếu $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, *thì* $\operatorname*{Res}_a f = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Chứng minh: Theo giả thiết

$$f(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + a_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \cdots \quad (a_{-m} \neq 0).$$

Suy ra $(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \cdots$.
Từ $\operatorname*{Res}_a f = a_{-1}$, suy ra công thức trên. □

Ví dụ.

a) $\operatorname*{Res}_{z=a} \dfrac{e^z}{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} \dfrac{e^a}{a-b} & \text{neu} \quad a \neq b \\ e^a & \text{neu} \quad a = b \end{cases}$

b) $\operatorname*{Res}_{z=z_k} \dfrac{1}{\cos z} = \dfrac{1}{-\sin z_k}$, trong đó $z_k = (k+1/2)\pi$.

Công thức 3: *Nếu ∞ là không điểm cấp $m \geq 2$ của f, thì* $\operatorname*{Res}_\infty f = 0$.

Nếu ∞ *là không điểm cấp 1 của* f*, thì* $\operatorname{Res}_{\infty} f = -\lim_{z\to\infty} zf(z)$.

Chứng minh: Theo giả thiết $f(\frac{1}{z}) = z^m(a_m + a_{m+1}z + \cdots)$ $(a_m \neq 0)$. Vậy $f(z) = \frac{a_m}{z^m} +$ [số hạng bậc $\leq m+1$]. Từ công thức 1 cho ta kết quả. □

4. THẶNG DƯ LOGA - NGUYÊN LÝ ARGUMENT

4.1 Thặng dư logarithm. Cho hàm f giải tích trên miền $0 < |z-a| < R$. Khi đó **thặng dư loga** của f tại a định nghĩa là $\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f}$.

Nhận xét. Giả sử a là không điểm hay cực điểm cấp $|m|$. Khi đó ở lân cận a, $f(z) = (z-a)^m f_1(z)$, với $f_1(a) \neq 0$. Suy ra

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Vậy $\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = m$ (= $\pm$ cấp của không điểm hay cực điểm của a).
Ký hiệu:

$$\omega(f,a) = \begin{cases} m & \text{nếu } a \text{ là không điểm cấp } m \text{ của } f \\ -m & \text{nếu } a \text{ là cực điểm cấp } m \text{ của } f \end{cases}$$

Từ nhận xét trên ta có:

4.2 Định lý. *Cho* D *là miền có biên định hướng. Giả sử* f *là hàm phân hình trên miền chứa* $\overline{D}$*,* f *có tập không điểm* $Z \subset D$ *và tập cực điểm* $P \subset D$ *đều hữu hạn. Khi đó với mọi* $g \in H(\overline{D})$ *ta có*

$$\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{a\in Z\cup P} g(a)\omega(f,a).$$

Ví dụ. Theo mệnh đề III.4.4 nếu $f - w_0$ có không điểm cấp k tại z_0, thì với $|w - w_0| < \delta$, phương trình $f(z) = w$, có k nghiệm $z_1(w), \cdots, z_(w)$ trong đĩa $|z - z_0| < \epsilon$.
a) Áp dụng định lý với $g(z) = z^n$, ta có

$$z_1^n(w) + \cdots + z_m^n(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon} z^n \frac{f'(z)dz}{f(z)-w} \ .$$

b) Khi f khả nghịch địa phương ($m = 1$), ta có biểu diễn hiện của hàm ngược

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon} z\frac{f'(z)dz}{f(z)-w} \ .$$

Áp dụng định lý trên với $g = 1$, ta có:

4.3 Nguyên lý argument. *Với giả thiết nh định lý trên. Nếu*
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ *là các không điểm với cấp* $m_1, \cdots, m_p$ *tương ứng,*
- $\beta_1, \cdots, \beta_q$ *là các cực điểm với cấp* $n_1, \cdots, n_q$ *tương ứng, thì*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{q} m_j = N_D(f) - P_D(f).$$

Ký hiệu $N_D(f)$ là số không điểm của f trong miền D kể cả bội.
$P_D(f)$ là số cực điểm của f trong miền D kể cả bội.

Nhận xét. Định lý trên gọi là **nguyên lý argument** vì lý do sau:
Cho f chỉnh hình trên đĩa đóng $\overline{D} = \{|z-a| \leq R\}$ và γ là đường tròn $|z-a| = R$. Xét **tuyến đóng** $\Gamma : W(t) = f(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Cho $w \notin \Gamma([0, 2\pi])$. Khi đó số không điểm (kể cả bội) của $f - w$ trong D là

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}\frac{f'(z)dz}{f(z)-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{W'(t)dt}{W(t)-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dW}{W-w}.$$

Về mặt hình học tích phân cuối (là số nguyên) biểu thị số vòng tuyến Γ quay quanh điểm w theo chiều thuận. Ký hiệu

$$I(w, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dW}{W-w}.$$

gọi là **chỉ số của** w **đối với** Γ.

4.4 Định lý Rouché. *Cho* f, g *là các hàm chỉnh hình trên* $\overline{D}$*, là miền có biên định hướng. Giả sử* $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \partial D$. *Khi đó* $N_D(f+g) = N_D(f)$.

Chứng minh: Ta có $f + g = f(1 + \frac{g}{f})$ nên $N_D(f+g) = N_D(f) + N_D(1+\frac{g}{f})$. Ta cần chứng minh $N_D(1+\frac{g}{f}) = 0$.
Cách 1: Theo giả thiết $\left|(1+\frac{g}{f}) - 1\right| = \left|\frac{g}{f}\right| < 1$ trên ∂D, i.e. $(1+\frac{g}{f})(\partial D) \subset \{w : |w-1| < 1\}$. Suy ra tuyến $\Gamma = (1+\frac{g}{f})(\partial D)$ không quay quanh điểm 0. Vậy theo nhận xét trên $N_D(1+\frac{g}{f}) = I(0, \Gamma) = 0$
Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} N_D(1+\frac{g}{f}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(1+g/f)'}{(1+g/f)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{g}{f}\right)'\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{g}{f}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{g}{f}\right)'\left(\frac{g}{f}\right)^k = 0 \end{aligned}$$

Giải thích: Do giả thiết $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ trên ∂D, ta có dẳng thức thứ nhì. Sau đó chuyển dấu tích phân vào dấu tổng, điều này có thể được do tính hội tụ đều của chuỗi trên ∂D.

Các hàm $\left(\dfrac{g}{f}\right)'\left(\dfrac{g}{f}\right)^k$, có nguyên hàm là $\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{g}{f}\right)^{k+1}$ nên tích phân trên ∂D bằng 0. □

Sau đây là một chứng minh khác của định lý cơ bản của đại số:

Hệ qủa. *Mọi đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số phức luôn có n nghiệm (kể cả bội).*

Chứng minh: Trước hết, để ý là nếu đa thức P có bậc $n \geq 1$, thì $\lim\limits_{z\to\infty}|P(z)| = \infty$, nên mọi nghiệm của P chứa trong đĩa $|z| < R$, khi R đủ lớn.
Viết P dưới dạng: $P(z) = a_n z^n + g(z)$, với $a_n \neq 0$ và g là đa thức bậc $< n$.
Rõ ràng khi R đủ lớn $|g(z)| < |a_n z^n|$, với $|z| = R$. Theo định lý Rouché số nghiệm (kể cả bội) của $P(z)$ và $a_n z^n$ trong $|z| < R$ là bằng nhau, vậy bằng n. □

Ví dụ. Có thể dùng định lý Rouché để xác định số nghiệm phương trình trong một miền như được minh họa trong các ví dụ sau.
a) Xét sự phân bố nghiệm đa thức $p(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$.
Xét trong đĩa đơn vị $|z| < 1$. Áp dụng định lý Rouché với $f(z) := 5z^3$ và $g(z) := p(z) - f(z)$. Khi $|z| = 1$, $|g(z)| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4 < |f(z)| = 5$. Vậy trong đĩa đơn vị $|z| \leq 1$, $p = f + g$ có 3 nghiệm.
Xét trong đĩa $|z| < 2$. Đt $f(z) := z^8$. Khi $|z| = 2$, ta có $|p(z) - f(z)| \leq 5|z|^3 + |z| + 2 = 44 < |f(z)| = 256$. Vậy trong đĩa $|z| \leq 2$, p có 8 nghiệm.
Suy ra trong vành $1 < |z| < 2$ đa thức có 5 nghiệm.
b) Cho $f \in H(|z| \leq 1)$. Giả sử $|f(z)| < 1$, khi $|z| = 1$. Phương trình $f(z) = z^n$ $(n \geq 1)$ có bao nhiêu nghiệm ?
Để trả lời, xét $f_1(z) = z^n - f(z)$. Khi đó với $|z| = 1$ ta có $|f_1(z) - z^n| = |f(z)| < 1$. Vậy trong đĩa $|z| \leq 1$, f_1 có cùng số nghiệm với $g(z) = z^n$, nghĩa là n nghiệm.

5. ỨNG DỤNG THẶNG DƯ ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Thặng dư cho ta công cụ để tính một số tích phân xác định một cách khá hữu hiệu. Sau đây là một vài dạng.

5.1 Tích phân dạng: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$,
với $R(x, y)$ là hàm hữu tỉ, mẫu khác 0 khi $x^2 + y^2 = 1$.

Phương pháp. Đặt $z = e^{it}$. Ta có

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),\ \sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})),\ dz = izdt.$$

Nên tích phân trên có dạng

$$\oint_{|z|=1} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{dz}{iz} = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname*{Res}_a \frac{1}{z} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})).$$

Ví dụ. Với $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$ $(a > 1)$, ta có

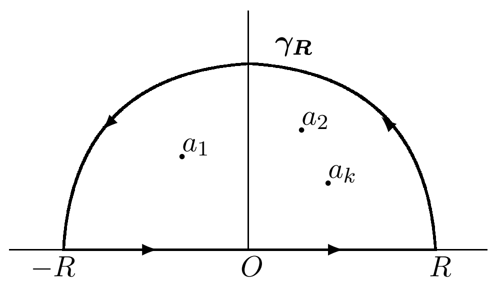
$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{2\pi dz}{z^2 + 2iaz - 1} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z_0} \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1},$$

trong đó $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$. Vậy $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

5.2 Tích phân dạng: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, trong đó

(1) f là hàm hữu tỉ không có cực điểm trên đường thẳng thực $\mathbf{R}$
(2) $\lim_{z \to \infty} zf(z) = 0$, i.e. bậc mẫu > bậc tử +1.

Phương pháp. Với $R > 0$, gọi γ_R là đường cong trong nửa mặt phẳng trên $\text{Im}z > 0$, và có các đầu mút lần lượt là R và $-R$, chẳng hạn nửa đường tròn hay 3 cạnh hình chữ nhật.



Với R đủ lớn, mọi cực điểm trong nửa mặt phẳng trên của f đều chứa trong miền giới hạn bởi các cung $[-R, R]$ và γ_R, khi đó ta có

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}a>0} \operatorname*{Res}_a f,$$

Nếu tích phân suy rộng tồn tại, khi $R \to \infty$, thì

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}a>0} \operatorname*{Res}_a f + \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz.$$

Bổ đề. *Nếu* $\lim_{|z| \to +\infty} zf(z) = 0$, *thì giới hạn cuối ở trên là* 0 *nên ta có*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}a>0} \operatorname*{Res}_a f.$$

Chứng minh: Chỉ là việc đánh giá tích phân. (bài tập) □

Ví dụ. Với $a \in \mathbf{R} \setminus 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3} \\
&= \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=|a|i} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} \\
&\overset{(3.3)}{=} \pi i \frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{(z+|a|i)^3}\right)'' |_{z=|a|i}.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Để tính $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.
Hàm $\dfrac{1}{1+z^6}$ có 6 cực điểm đơn, 3 nằm ở nửa mặt phẳng trên: $e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{5i\frac{\pi}{6}}$.
Thặng dư tại các điểm đó là $\dfrac{1}{6z^5} = -\dfrac{z}{6}$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{\pi}{6}(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{5i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{3}$.

5.3 Tích phân dạng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos kx dx$ hay $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin kx dx$, với $k > 0$ và

(1) f là hàm hữu tỉ không có cực điểm trên đường thẳng thực $\mathbf{R}$
(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, i.e. bậc mẫu $>$ bậc tử.

Phương pháp. Các tích phân trên là phần thực và phần ảo của tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx.$$

Tương tự như lập luận ở 5.2, từ bổ đề sau đây, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a f(z)e^{ikz}.$$

Bổ đề (Jordan). *Giả sử f chỉnh hình trên nửa mặt phẳng* $\mathrm{Im} z \geq 0$ *trừ tại hữu hạn cực điểm không nằm trên trục thực. Nếu* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ *, thì ta có công thức tính tích phân nêu trên.*

Chứng minh: Gọi γ_R là nửa đường tròn bán kính R thuộc nửa mặt phẳng trên. Như lập luận ở 5.3, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{ikz}dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{ikRe^{it}} iRe^{it}dt\right| \\
&\leq \max_{\gamma_R^*}|f| \int_0^{\pi} e^{-kR\sin t}Rdt.
\end{aligned}$$

Với chú ý là $\displaystyle\int_0^{\pi} g(\sin t)dt = 2\int_{\pi/2}^{\pi} g(\sin t)dt$ và $\sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$, khi $0 \leq t \leq \pi/2$, ta có tích phân cuối:

$$\int_0^{\pi} e^{-kR\sin t}Rdt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}kRt}Rdt \leq 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}kRt}Rdt = \pi/k.$$

Từ giả thiết suy ra $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{ikz}dz = 0$. Vậy ta có đẳng thức trên. $\square$

Ví dụ. Ta có $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx\right)$

Do $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \frac{z}{z^2+1} = 0$, theo bổ đề Jordan ta có

$$I = \mathrm{Im}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\right) = \mathrm{Im}(2\pi i\frac{ie^{-1}}{2i}) = \frac{\pi}{e}\ .$$

Nhận xét. Khi $k<0$ có thể đổi biến, hay lập luận như trên vớ tổng các thặng dư ở nửa mặt phẳng dưới.

Nhận xét. Vì $\cos kz$ và $\sin kz$ không bị chặn trên $\mathbf{C}$, nên tích phân trên γ_R của $f(z)\cos kz$ hay $f(z)\sin kz$ không triệt tiêu khi $R\to+\infty$. Vậy hai tích phân dạng trên *không bằng* $2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}a>0} \operatorname*{Res}\limits_{a} f(z)\cos kz$ hay $2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}a>0} \operatorname*{Res}\limits_{a} f(z)\sin kz$.

5.4 Tính tổng chuỗi. Một áp dụng hữu ích khác của thặng dư là tính tổng chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ đối với một số dạng hàm f.

Mệnh đề. *Giả sử f chỉnh hình trên $\mathbf{C}$ trừ tại hữu hạn điểm $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ khác các số nguyên và $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$. Khi đó*

(1) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \pi\ cotg\pi\alpha_j \operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} f\ .$

(2) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\sin\pi\alpha_j} \operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} f\ .$

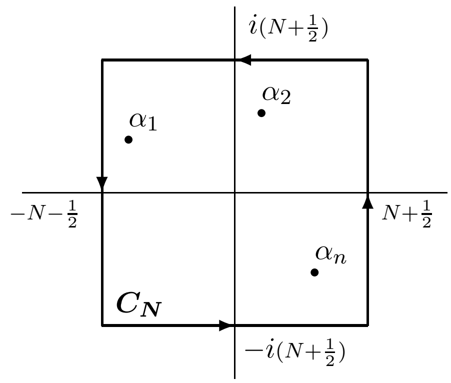
(3) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f(\frac{2k+1}{2}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi\ tg\pi\alpha_j \operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} f\ .$

(4) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(\frac{2k+1}{2}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\cos\pi\alpha_j} \operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} f\ .$

Chứng minh: Đặt $g(z)=\pi\ \mathrm{cotg}\pi z f(z)$. Khi đó g có kỳ dị tại $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ và cực điểm đơn tại các $k\in\mathbf{Z}$.

Suy ra $\operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} g = \pi\ \mathrm{cotg}\pi\alpha_j \operatorname*{Res}\limits_{\alpha_j} f$ và $\operatorname*{Res}\limits_{k} g = \lim\limits_{z\to k}(z-k)g(z) = f(k)$.

Gọi $C_N, N\in\mathbf{N}$, là biên hình vuông với các đỉnh $\pm(N+\frac{1}{2})\pm i(N+\frac{1}{2})$.



Khi N đủ lớn $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ đều nằm trong hình vuông C_N. Vậy

$$\begin{aligned}\int_{C_N} g &= 2\pi i(\sum_{k=-N}^{N} \operatorname*{Res}_{k} g + \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{\alpha_j} g) \\ &= 2\pi i \left(\sum_{k=-N}^{N} f(k) + \sum_{j=1}^{n} \pi \operatorname{cotg} \pi\alpha_j \operatorname*{Res}_{\alpha_j} f \right).\end{aligned}$$

Chỉ cần chứng minh khi $N \to +\infty$, tích phân vế trái tiến về 0. Do $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, nên điều này suy từ bổ đề sau.

Bổ đề. *Tồn tại $M > 0$ sao cho $|\operatorname{cotg}\pi z| \le M$, $\forall z \in C_N$.*

Để chứng minh bất đẳng thức trên, xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $z = x + iy,\ y > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}|\operatorname{cotg}\pi z| &= \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| = \left|\frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}\right| \le \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{e^{-i\pi x + \pi y}| - |e^{i\pi x - \pi y}|} \\ &\le \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = M_1.\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $z = x + iy,\ y < -\frac{1}{2}$. Tương tự

$$|\operatorname{cotg}\pi z| \le \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = M_1.$$

Trường hợp 3: $z = N + \frac{1}{2} + iy,\ -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.

$$|\operatorname{cotg}\pi z| = |\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} + i\pi y)| = |\tanh \pi y| \le \tanh\frac{\pi}{2} = M_2$$

Tương tự, với $z = -N - \frac{1}{2} + iy,\ -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.

$$|\operatorname{cotg}\pi z| = |\tanh \pi y| \le \tanh\frac{\pi}{2} = M_2.$$

Vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh với $M = \max(M_1, M_2)$.

Việc chứng minh (ii)(iii)(iv) tiến hành tương tự. (bài tập) □

Ví dụ.

a) Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}$ $(a > 0)$. Hàm $f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}$ có các cực điểm đơn tại $\pm a$. Theo mệnh đề, ta có

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = -\pi \text{ cotg}\pi a \operatorname*{Res}_{a} f - \pi \text{ cotg}(-\pi a) \operatorname*{Res}_{-a} f = -\frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

Vậy $\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \coth \pi a$.

b) Tính tổng $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Hàm $f(z) = \frac{1}{z^2}$ có cực điểm cấp 2 tại 0 nên không áp dụng trực tiếp mệnh đề được. Tuy nhiên lập luận tương tự, với $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \text{cotg}\pi z$, ta có $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = \operatorname*{Res}_{0} g$. Khai triển Laurent

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\pi}{z^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z^3} \frac{(1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \frac{\pi^4}{4!} z^4 + \cdots)}{(1 - \frac{\pi^3}{3!} z^2 + \frac{\pi^5}{5!} z^4 + \cdots)} \\ &= \frac{1}{z^3} (1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \cdots)(1 + \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \cdots) = \frac{1}{z^3} (1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 + \cdots) \end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname*{Res}_{0} g = -\frac{\pi^2}{3}$. Vậy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bài tập

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Chứng minh $\mathbf{R}$ là trường con của $\mathbf{C}$. Còn $i\mathbf{R} = \{iy : y \in \mathbf{R}\}$ là trường con?

2. Tìm Re và Im của: z^4, $\frac{1}{z}^2$, $\frac{z-1}{z+1}$, trong đó $z = x + iy$.
   $\frac{1-i}{1+i}$, $(1+i\sqrt{3})^5$, $\sqrt{3+i\sqrt{3}}$, $(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})^{24}$, $(1+i)^n + (1-i)^n$.

3. Chứng minh các tính chất ở 1.2.

4. Cho $z = x + iy$. Chứng minh:

$$\mathrm{Arg}z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi & \text{nếu} \quad x > 0 \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

5. Tìm modul và argument: $1+i,\ 2+5i,\ 4-7i$.

6. Giải các phương trình theo z:
   a) $az + b\bar{z} + c = 0 \ \ (a, b, c \in \mathbf{C})$.
   b) $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$.
   c) $z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R})$
   d) $\bar{z} = z^{n-1},\ n \in \mathbf{N}$.

7. Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Tìm số phức $z = x + iy, z^2 = a + ib$.

8. Lập luận sau vì sao sai ?
   $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Vậy $2 = 0$.

9. Công thức sau đúng hay sai: $\sqrt{z} + \sqrt{z} = 2\sqrt{z}$.

10. Cho $z = e^{i\varphi}$. Chứng minh $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi, n \in \mathbf{N}$.

11. Tính $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt{1-i}$. Vẽ các căn đó trong mặt phẳng phức.

12. Biểu diễn $\cos 3x$, $\sin 5x$ qua $\cos x, \sin x$.
    Tổng quát chứng minh $\cos nx, \sin nx$ $(n \in \mathbf{N})$ có thể biểu diễn như các đa thức của $\cos x, \sin x$.

13. Từ công thức Euler, chứng minh:

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}(\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)x + \cdots + R_n),$$

trong đó

$$R_n = \begin{cases} \cos x & \text{neu} \quad n \text{ lẻ} \\ \dfrac{n!}{[(n/2)!]^2} & \text{neu} \quad n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Tìm công thức tương tự cho $\sin^n x$.

14. Chứng minh với $n \in \mathbf{N}$, ta có:

$$\cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cdots + \cos(\theta+n\alpha) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\cos(\theta+\frac{n}{2}\alpha)$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \cdots + \sin(\theta+n\alpha) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\sin(\theta+\frac{n}{2}\alpha)$$

(Hướng dẫn. Sử dụng $1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$, với $z = e^{i\alpha}$.)

15. Chứng minh tổng và tích các nghiệm đa thức $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ là $-\dfrac{a_1}{a_0}$ và $(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}$. Suy ra

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

16. Phân tích thành thừa số các đa thức sau trên trường phức và trường thực: $z^3 \pm 1, z^4 \pm 1, z^5 \pm 1, z^6 \pm 1$.

17. Chứng minh $x^{2n} + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - 2\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1)$.

18. Cho ω là một căn bậc n của đơn vị ($n \in \mathbf{N}$). Tính $1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}$.

19. Gọi $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị.

Tính $S = \omega_0^p + \omega_1^p + \cdots + \omega_{n-1}^p$,

với a) p là bội của n. b) p không là bội của n.

20. Chứng minh, với các số phức ta có:

a) $|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}a\bar{b}$.

b) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

c) $\left|\dfrac{a}{|a|} - 1\right| \leq |\arg a|$.

d) $|a+b| \geq \dfrac{1}{2}(|a| + |b|)\left|\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|}\right|$.

e) $|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k\bar{b_j} - \bar{a_j} b_k|^2.$

f) $(n-2)\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + |\sum_{j=1}^{n} a_j|^2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k + a_j|^2.$

g) $n\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - |\sum_{j=1}^{n} a_j|^2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k - a_j|^2.$

21. Xác định tính chất hình học tập các $z \in \mathbf{C}$:
a) $|z-2| + |z+2| = 5$. b) $|z-a| = |z-b|$. c) $\alpha <$ arg$z < \beta$.
d) $\text{Im}\dfrac{z-a}{z-b} = 0$. e) $\text{Re}\dfrac{z-a}{z-b} = 0$. f) $\text{Im}\dfrac{z-a}{b} < 0$.
Trong đó $a, b \in \mathbf{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

22. Đúng hay sai: Phép chiếu nổi
a) Biến đường tròn trên mặt cầu Riemann S thành đường thẳng hay đường tròn.
b) Bảo toàn độ lớn của góc.

23. Xét sự hội tụ của các dãy:
a) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$ b) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$ c) $z_n = n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$
d) $u_n = 1 + a\cos\varphi + \cdots + a^n \cos n\varphi$, $v_n = a\sin\varphi + \cdots + a^n \sin n\varphi$.
(Hướng dẫn. áp dụng $1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ với $z = ae^{i\varphi}$)
e) $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + \dfrac{1}{z_n})$, $-\dfrac{\pi}{2} <$ arg$z_0 < \dfrac{\pi}{2}$.
(Hướng dẫn. Chứng minh: $|z_n| \geq 1$, dãy (Rez_n) dương và không tăng, dãy (Imz_n) giảm về 0. Suy ra $\lim z_n = 1$.)

24. Đúng hay sai: đối với mọi dãy số (z_n)
a) $z_n \to z_0$ khi và chỉ khi $\bar{z}_n \to \bar{z}_0$
b) $z_n \to z_0$ khi và chỉ khi $|z_n| \to |z_0|$.
c) $z_n \to z_0, z_n \neq 0$ thì $\dfrac{1}{z_n} \to \dfrac{1}{z_0}$.
d) $z_n \in \mathbf{R}, \forall n, z_n \to z_0$ thì $z_0 \in \mathbf{R}$.

25. Hoàn tất các chứng minh đợc phát biểu ở 2.2. Cụ thể hoá ghi nhận ở ví dụ 2.2.

26. Cho $X \subset \mathbf{C}$. Khoảng cách từ $z \in \mathbf{C}$ đến X định nghĩa:

$$d(z,X) = \inf\{d(z,x) : x \in X\}$$

Chứng minh: $d(z,X) = 0$ khi và chỉ khi $z \in \overline{X}$. Suy ra nếu X đóng, thì $d(z,X) > 0, \forall z \notin X$.

27. Xác định ảnh qua ánh xạ $w = f(z) = z^2$ của họ các đường thẳng:
a) Re$z = const$. b) Im$z = const$.

28. Tìm ảnh qua ánh xạ $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$, của các tập $z \in \mathbf{C}$:
a) $|z| = R$. b) Re$z =$ Imz. c) Re$z = 1$. d) $1 <$ Re$z < 2$.

29. Tìm ảnh của tập $\{z \in \mathbf{C}: \ \arg z = \alpha\}, \ (\alpha \in \mathbf{R})$, qua ánh xạ $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

30. Chứng minh ánh xạ $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biến đường thẳng hay đường tròn thành đường thẳng hay đường tròn.

31. Cho $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, với $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Chứng minh f là song ánh từ nửa mặt phẳng $\text{Im}z > 0$ lên $\text{Im}w > 0$ hay lên $\text{Im}w < 0$, tùy thuộc $ad - bc$ dương hay âm.

32. Chứng minh các kết qủa phát biểu ở 3.3.

33. Xét sự liên tục của hàm f với $f(0) = 0$ và $z \neq 0$:
a) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ b) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ c) $f(z) = \dfrac{\text{Re}z}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{z\,\text{Re}z}{|z|}$

34. Chứng minh hàm $f(z) = \dfrac{z}{z^4+1}$ liên tục trên đường tròn $|z| = 1$ ngoại trừ 4 điểm mà cần chỉ rõ.

35. Cho $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ và ký hiệu $Z_f = \{z \in \mathbf{C} : f(z) = 0\}$. Chứng minh nếu f liên tục thì Z_f là tập đóng.

36. Có tồn tại hàm liên tục f trên $\mathbf{C}$ sao cho:
a) $Z_f = \{c_1, \cdots, c_n\}$ với $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{C}$ cho trớc. b) $Z_f = \mathbf{Z}$. c) $Z_f = \overline{D(a,r)}$. d) $Z_f = \mathbf{Q}$.
Trong trường hợp tồn tại xây dựng f.

37. Hàm $f: X \longrightarrow \mathbf{C}$, $X \subset \mathbf{C}$, gọi là **hằng địa phương** nếuu $\forall z \in X, \exists r(z) > 0$ sao co f là hằng trên $X \cap D(z, r(z))$. Chứng minh: nếu f là hằng địa phương và X liên thông, thì $f =$ constant.

38. Chứng minh các hàm sau là không liên tục đều trên D:
a) $f(z) = \dfrac{1}{z}, z \in D = \{0 < |z| < 1\}$. b) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}, z \in D = \{|z| < 1\}$.

39. Cho $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$. Cho $z_1 \in \mathbf{C}$. Xét dãy định nghĩa qui nạp bởi $z_{n+1} = f(z_n)$.
a) Chứng minh nếu (z_n) hội tụ về z_0, thì z_0 là **điểm bất động của** f, i.e. $f(z_0) = z_0$.
b) Chứng minh f có điểm bất động.
c) Gọi z_0, z_0' là các điểm bất động của f. Xét $g(w) = \dfrac{w - z_0}{w - z_0'}$. Chứng minh tồn tại $\lambda \in \mathbf{C}$, sao cho $g(f(z)) = \lambda g(z)$.
d) Suy ra nếu $|\lambda| < 1$, thì dãy (z_n) hội tụ.

40. Áp dụng các kết qủa bài tập trên, tìm giới hạn dãy (z_n), với:
a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z+1}, \ z_1 = i$.
b) $f(z) = \dfrac{z+i}{z+1}, \ z_1 = 1$.

41. Giả sử f là hàm liên tục đều trên $D = \{|z| < 1\}$ và dãy (z_n) với $|z_n| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ với $|z_0| = 1$. Chứng minh tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Chứng minh: khẳng định ở ví dụ 1.4.b), công thức đạo hàm hình thức ở 1.5

2. Cho $a_0, a_1, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Xét dãy định nghĩa đệ qui:
$$a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2}, k \geq 2$$
Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - \alpha z - \beta$. Chứng minh $a_k = Az_1^k + Bz_2^k$, với $A, B \in \mathbf{C}$ là các số phụ thuộc a_0, a_1, α, β.
(Hướng dẫn. Chứng minh hàm sinh $G(Z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, thỏa $(1 - \alpha Z - \beta Z^2)G(Z)$ là đa thức bậc nhất.)

3. Bài tập này tổng quát bài trên. Cho $a_0, \cdots, a_{m_1} \in \mathbf{C}$ và $c_0, \cdots, c_{m-1} \in \mathbf{C}$. Xét dãy cho bởi **phương trình sai phân**:
$$a_k = c_0 a_{k-1} + c_1 a_{k-2} + \cdots + c_{m-1} a_{k-m}, \ (k \geq m)$$
Gỉa sử $Z^m - (c_{m-1}Z^{m-1} + c_{m-2}Z^{m-2} + \cdots + c_0)$ có các nghiệm $z_1, \cdots z_m$ khác nhau. Chứng minh tồn tại $A_1, \cdots A_m \in \mathbf{C}$:
$$a_k = A_1 z_1^k + \cdots + A_m z_m^k$$

4. Xác định các chuỗi hình thức $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$, là nghiệm phương trình vi phân:
a) $S''(Z) = S(Z)$, thỏa điều kiện đầu $S(0) = 1, S'(0) = 0$.
b) $(1 - Z^2)S''(Z) - 4ZS'(Z) - 2S(Z) = 0$, $S(0) = 0, S'(0) = 1$.

5. Cụ thể hoá các chứng minh các phát biểu ở 2.1 và bổ đề ở 3.2

6. Xét sự hội tụ của các chuỗi:
a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{3}+i)^k}{5^{k/2}}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^k}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{z+1}\right)^k$ d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{(1+z^{2k})}$.

7. Chứng minh dãy hàm $f_n(z) = 1 + \dfrac{z}{n^2}, z \in \mathbf{C}$, không hội tụ đều về $f \equiv 1$.

8. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ trên miền chỉ ra:
a) $f_k(z) = \dfrac{1}{(z+k)^2}$, $\mathrm{Re}z > 0$ b) $f_k(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^k}$, $\mathrm{Re}z \geq \mathrm{Im}z$
c) $f_k(z) = \dfrac{1}{1+k^2z}$, $|z| \geq 2$ d) $f_k(z) = \dfrac{z^k}{k(k+1)}$, $|z| \leq 1$
e) $f_k(z) = \dfrac{1}{k^2+z^2}$, $1 < |z| < 2$.

9. Các phát biểu sau đúng hay sai?
a) Nếu các hàm f_n liên tục đều và dãy f_n hội tụ đều về f, thì f liên tục đều.
b) Nếu f_n, g_n hội tụ đều về f, g tương ứng, thì $f_n + g_n, f_n g_n$ hội tụ đều về $f+g, fg$ tương ứng.

10. Chứng minh
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^k}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1-z^k)^2}, \ |z| < 1$$
(Hướng dẫn. Khai triển thành chuỗi lũy thừa hàm dưới dấu tổng rồi hoán vị dấu tổng)

11. Xác định bán kính hội tụ các chuỗi lũy thừa:
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ $(s > 0)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!z^k}{k^k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}((-1)^{k+1}k - k)z^k$
e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})^{k^2} z^k$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{(-1)^k} kz^k$ g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k+1}$ h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k z^{2k}$ $(|q| < 1)$
i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^p z^k$ j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, với $a_{2k+1} = a^{2k+1}, \ a_{2k} = b^{2k}$ $(0 < a < b)$.
k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k)}{b(b+1)\cdots(b+k)} z^k, \ (a, b \in \mathbf{C}, -b \not\in \mathbf{N})$

12. Xét sự hội tụ trên đường tròn hội tụ của các chuỗi cho ở ví dụ 3.1.c)

13. Cho $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k, \ T = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k, \ U = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^p Z^k, \ V = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k Z^k$ và
$W = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} Z^k$ (với giả thiết $b_k \neq 0$). Gọi $R(.)$ là bán kính hội tụ.
Chứng minh:
$R(U) = R(S)^p, \ R(V) \geq R(S)R(T), \ R(W) \leq R(S)/R(T)$ (nếu $R(T) \neq 0$)

14. Tìm phần thực và ảo của hàm $\sin z$ và $\cos z$.

15. Xác định giá trị: $\sin i, \ \cos i, \ \operatorname{tg}(1+i), \ 2^i, \ i^i, \ (-1)^{2i}, \ i^{\pi}$.

16. Cho $z = x + iy$. Chứng minh các công thức:
$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x).$$
$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x).$$

17. Giải phương trình $e^z = w$. Khi $w = i, -\frac{i}{2}, -1-i, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

18. Đúng hay sai: $Lnab = Lna + Lnb$ $, a, b \in \mathbf{C}$

19. Chứng minh nhánh chính hàm logarithm ln thoả: $\ln ab = \ln a + \ln b + 2\pi\delta i$, trong đó

$$\delta = \begin{cases} -1 & \text{neu} \quad \pi < \arg a + \arg b \leq 2\pi \\ 0 & \text{neu} \quad -\pi < \arg a + \arg b \leq \pi \\ 1 & \text{neu} \quad -2\pi < \arg a + \arg b \leq -\pi. \end{cases}$$

20. Biểu diễn chuỗi lũy thừa hàm $f(z) = \ln(3 - iz)$, với f là nhánh thỏa $f(0) = \ln 3$. Xác định bán kính hội tụ.

21. Tìm hàm (đơn trị) ngược và chỉ ra miền xác định các hàm: arccos, arcsin, arccosh . Chứng minh: $\arccos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1})$, $\arcsin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2})$, arccosh $z = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

22. Chứng minh nhánh thoả $\sqrt{1} = 0$, có biểu diễn:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1.3}{2.4}z^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^9 + \cdots, \ |z| < 1.$$

23. Tìm 4 số hạng đầu của khai triển Taylor: a) $f(z) = e^{z-1}$ tại $z = 2$
b) $f(z) = z^3 \sin z$ tại $z = \pi/2$ c) $f(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$ tại $z = 0$

24. Dùng các phép toán trên chuỗi lũy thừa, chứng minh:
a) $\dfrac{1}{z^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z+1)^k$, $|z+1| < 1$ b) $\dfrac{1}{(1-z^2)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^{2k}$, $|z| < 1$
c) $\dfrac{\ln(1+z)}{1+z} = z - (1 + \dfrac{1}{2})z^2 + (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3})z^3 - \cdots$, $|z| < 1$ (ln là nhánh chính)
d) $\{\ln(1+z)\}^2 = z^2 - (1 + \frac{1}{2})\frac{2}{3}z^3 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\frac{2}{4}z^4 - \cdots$, $|z| < 1$
e) $e^{\sin z} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^4}{8} - \dfrac{z^5}{15} + \cdots$

25. Khai triển $\dfrac{1}{(1-z)^n}$, với $n \in \mathbf{N}$, thành chuỗi lũy thừa.

26. Tìm 4 số hạng đầu của khai triển thành chuỗi lũy thừa:
a) $e^z \sin z$ b) $\dfrac{1}{1 - \sin z}$ c) $e^{\,\mathrm{tg} z}$.

27. Tìm chuỗi lũy thừa ngược của các chuỗi sau đến số hạng bậc 5
a) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots$
b) $\mathrm{arctg} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} + \cdots$

28. Các số Bernouli B_k được định nghĩa: $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$. Chứng minh

$$\frac{B_0}{k!0!} + \frac{B_1}{(k-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{k-1}}{1!(k-1)!} = 0, \text{ nếu } k > 1$$

Hãy xác định 5 số Bernouli đầu tiên.

29. Các số Euler E_k đợc định nghĩa: $\dfrac{1}{\cos z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} E_k z^k$.
Hãy xác định 5 số Euler đầu tiên.

30. Tìm cấp không điểm của $z = 0$ của hàm:
a) $z^2(e^{z^2} - 1)$ b) $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ c) $e^{\sin z} - e^{\,\mathrm{tg} z}$.

31. Xác định các không điểm và cấp của chúng của các hàm: a) $\sin^3 z$ b) $z \sin z$ c) $\sin z^3$ d) $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$.

32. Tìm hàm giải tích trên $\mathbf{C}$ có các không điểm tại $z_1, \cdots, z_n$ với cấp $k_1, \cdots, k_n$ tương ứng. Lời giải có duy nhất?

33. Cho $f \in A(D)$, có các không điểm tại $z_1, \cdots, z_n$ với cấp $k_1, \cdots k_n$ tương ứng. Chứng minh tồn tại $g \in A(D)$, $g(z) \neq 0, \forall z$ sao cho
$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_n)^{k_n} g(z).$$

34. Đặt Z_f là tập mọi không điểm của hàm giải tích f. Đúng hay sai:
a) Z_f hữu hạn, thì f là đa thức.
b) Z_f vô hạn, thì f không thể là đa thức.

35. Chứng minh nếu $f, g \in A(D(0, R))$ và $f(x) = g(x). \forall x \in (-R, R)$. Chứng minh $f \equiv g$.

36. Tồn tại hay không hàm giải tích trên $\mathbf{C}$ thoả:
a) $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$
b) $f(\dfrac{1}{n}) = f(-\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbf{N}$
c) $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n^2}, n \neq 1$; còn $f(1) = 0$.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Xét tính khả vi của hàm $f(z)$ với $z = x + iy$: a) $f(z) = \bar{z}$ b) $f(z) = z^2\bar{z}$
c) $f(z) = \sqrt{|xy|}$ d) $f(z) = x^2 + iy^3$ e) $f(z) = \dfrac{z^2 - |z|^2}{iz}$.
Các hàm trên hàm nào chỉnh hình tại 0 ?

2. Xét tính chỉnh hình tại 0 của hàm:
a) $f(z) = z\,\mathrm{Re} z$ b) $f(z) = |z|^4$ c) $f(z) = e^{z^2}$

3. Tìm miền trên đó hàm $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ chỉnh hình.

4. Cho $z = e^{i\varphi}$, $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Viết điều kiện để f khả vi trong tọa độ cực.

5. Chứng minh các công thức tính đạo hàm 1.3.

6. Cho $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ là hàm chỉnh hình trên $\mathbf{C}$. Giả sử u chỉ phụ thuộc x, v chỉ phụ thuộc y. Chứng minh $f(z) = rz + c$, với $r \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{C}$.

7. Chứng minh các khẳng định ở ví dụ 1.?.

8. Chứng minh: Nếu f và $\bar{f}$ đều chỉnh hình trên miền D, thì $f = const$.

9. Chứng minh: Nếu $f = u + iv$ chỉnh hình, thì $h = v - iu$ và $g = -v + iu$ cũng chỉnh hình.

10. Tìm góc quay θ của đường thẳng đi qua z_0 hệ số góc k qua các ánh xạ $f(z) = z^2$ và $g(z) = z^3$, với: a) $z_0 = 1$ b) $z_0 = -\dfrac{1}{4}$ c) $z_0 = 1 + i$ d) $z_0 = -3 + 4i$.

11. Tìm miền mà $w = f(z)$ thực hiện phép co (dãn):
a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = z^2 + 2z$ c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

12. Cho $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z \in D = \{|z| \leq 1\}$. Giả sử f đơn ánh. Chứng minh diện tích miền $f(D)$ cho bởi công thức: $S = \pi \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k|c_k|^2$.
Suy ra nếu $f'(0) = 1$, thì $S \geq$ diện tích hình tròn D. (Hướng dẫn. Dùng tọa độ cực)

13. Hàm thực 2 biến thực $u(x,y), (x,y) \in D$ gọi là **hàm điều hòa** nếuu u khả vi đến cấp 2 và thỏa **phương trình Laplace**:
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ,\ (x,y) \in D$$
a) Chứng minh: nếu f chỉnh hình trên D, thì phần thực và phần ảo của f là các hàm điều hòa trên D. (điều kiện khả vi đến cấp 2 được chứng minh ở 3.3)
b) Kiểm tra hàm $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ là hàm điều hòa trên $\mathbf{R}^2$. Từ điều kiện Cauchy-Rieman, bằng phương pháp tích phân hãy tìm hàm v sao cho $f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ là chỉnh hình trên $\mathbf{C}$.
c) Tương tự câu b) đối với $v(x,y) = 2x(x - y)$

14. Cho $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy$.
a) Chứng minh: $u(x,y) = \dfrac{1}{2}(f(z) + \bar{f}(\bar{z}))$. Suy ra: nếu f chỉnh hình trên D, thì
$$f(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) + const$$
b) Tương tự khi f chỉnh hình ta có:
$$f(z) = 2iv(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) + const$$
Nhận xét. Vậy nếu biết phần thực (phần ảo) của một hàm chỉnh hình là hoàn toàn xác định được hàm đó. Đây cũng là phương pháp để xác định phần ảo (phần thực) như bài tập b), c) ở trên.
c) Từ nhận xét trên, tìm hàm chỉnh hình nếu biết phần thực $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

15. Cho $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ và $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$, là 2 đường cong nối z_0 với z_1 và z_1 với z_2 tương ứng. Hãy nêu tính chất các đường định nghĩa bởi:
$\gamma_1^-(t) = \gamma_1(1-t)$, $t \in [0,1]$, và
$$\gamma(t) = \gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{neu} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{neu} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

16. Dùng định nghĩa, tính $\int_\gamma f(z)dz$, trong đó:
a) $f(z) = \text{ Re}z$, γ là đường thẳng từ 0 đến z_0.
b) $f(z) = \text{ Im}z$, γ là nửa đường tròn đơn vị trên từ 1 đến -1.
c) $f(z) = |z|\bar{z}$, γ như bài b).
d) $f(z) = \bar{z}^2$, γ là đường tròn $|z-1| = 1$, hướng thuận.
e) $f(z) = (z-a)^n$ $(n \in \mathbf{N})$, γ là đường tròn $|z-a| = R$, hớng thuận.
f) $f(z)$ nh bài e) , γ là biên hình chữ nhật tâm a có các cạnh song song với các trục thực và ảo.
g) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ nhánh $\sqrt{1} = 1$, γ như bài b).

17. Tìm một chặn trên cho $\left|\int_\gamma e^z dz\right|$, trong đó $\gamma(t) = t^2 + i2t, t \in [0,2]$.

18. Tính các tích phân:
a) $\int_\gamma z^2 dz$, với γ là đường gấp khúc lần lượt qua: $-2, -1+i, 1+i, 2$.
b) $\int_0^i z \sin z dz$.
c) $\int_\gamma (ze^z + 1)dz$, γ là nửa trên đường tròn đơn vị tâm 1 từ 2 đến 0.

19. Tìm điều kiện để khẳng định: $\oint_\gamma Lnz dz = 0$, với γ là đường cong kín , là có nghĩa và đúng.

20. Dùng công thức tích phân Cauchy, tính $\int_\gamma f(z)dz$, trong đó:
a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$, $\gamma := \gamma_1 : |z| = 3$ và $\gamma := \gamma_2 : |z| = 1$.
b) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2+1}$, $\gamma : |z| = 2$.
c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$, γ là đường cong kín không qua $\pm 3i$.
d) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+a}$, γ là đường cong kín bao quanh miền chứa đĩa $|z| \le a$.
e) $f(z) = \dfrac{ze^z}{(z-a)^3}$, γ là đường cong kín không qua a.
f) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^3}$, $\gamma := \gamma_1 : |z-1| = r$; $\gamma := \gamma_2 : |z+1| = r$; $\gamma := \gamma_3 : |z| = r$. $(1 < r < 2)$
g) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^3}$, γ là đường cong kín không qua 0 và 1.

h) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^n}$ $(n \in \mathbf{Z})$, $\gamma : |z| = 1$.
i) $f(z) = z^n(1-z)^m$ $(n, m \in \mathbf{Z})$, $\gamma : |z| = 2$.

21. Chứng minh:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}dz}{z^2+1} = \sin t\ .$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}dz}{(z^2+1)^2} = \ ?$$

22. Cho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ là đường cong có ảnh là Ellip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tính tích phân $\oint_\gamma \dfrac{1}{z}dz$ bằng hai cách, suy ra
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

23. Chứng minh các hàm sau không có nguyên hàm, trên miền tương ứng:
a) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z-1}$, $0 < |z| < 1$. b) $\dfrac{z}{1+z^2}, 1 < |z|$ c) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}, 0 < |z| < 1$.

24. Cho $f \in H(D)$, D là miền đơn liên và $f(z) \neq 0, \forall z$. Chứng minh tồn tại $h \in H(D)$ sao cho $f = e^h$. (Hướng dẫn. $\dfrac{f'}{f} \in H(D)$, nên tồn tại h_1 sao cho $h_1' = \dfrac{f'}{f}$)

25. Cho $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $|z| < R$, và $0 < r < R$.

a) Chứng minh **công thức Parseval**: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k}$.

b) Suy ra bất đẳng thức Cauchy: $|c_k| \leq \dfrac{M(r)}{r^k}$, với $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

c) Chứng minh nếu tồn tại k sao cho $|c_k| = M(r)/r^k$, thì $f(z) = c_k z^k$.

26. Cho $f \in H(|z| \leq r)$ với $|f| \leq M$. Tìm chặn trên cho $|f^{(n)}(z)|$ với $|z| \leq \rho < r$.

27. Chứng minh hàm giải tích f trên $\mathbf{C}$ không thể thỏa: $|f^{(n)}(z_0)| > n!n^n, \forall n \in \mathbf{N}$, tại một điểm $z_0 \in \mathbf{C}$.

28. Cho $f \in H(\mathbf{C})$. Giả sử tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho $|f(z)| < |z|^n$ khi $|z|$ đủ lớn. Chứng minh f là đa thức.

29. Cho $f \in H(\mathbf{C})$, thoả: $f(z) = f(z+1) = f(z+i), \forall z$. Chứng minh $f = const$. (Hướng dẫn. Chứng minh $|f|$ giới nội)

30. Chứng minh **nguyên lý minima**: Cho $f \in H(\overline{D})$, D là miền giới nội, $f \neq const$. Khi đó hoặc f có không điểm trong D hoặc $|f|$ đạt minimum trên ∂D.

31. Cho $f \in H(\overline{D})$, D là miền giới nội. Giả sử $|f(z)| = const$ trên ∂D. Chứng minh: hoặc f có không điểm trong D, hoặc $f = const$.

32. Cho $f \in H(D)$, $f \neq const$. Chứng minh $|\,\mathrm{Re} f|$ không thể đạt cực đại hay cực tiểu trong D. (Hướng dẫn. Xét $g = e^f$)
Suy ra, nếu u là hàm điều hòa trên tập mở $D \subset \mathbf{R}^2$, thì $|u|$ không thể đạt max hay min trong D.

33. Cho f và g là 2 hàm chỉnh hình trên đĩa đơn vị đóng D, và không có không điểm trên D. Chứng minh nếu $|f(z)| = |g(z)|, \forall z : |z| = 1$, thì $f = cg$, với c là hằng số, $|c| = 1$.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Khai triển Laurent các hàm sau tại điểm được chỉ ra, xác định miền hội tụ:
a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, tại $z = 1$. b) $f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$, tại $z = -2$.
c) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$, tại $z = 0$ d) $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$, tại $z = 2$.

2. Khai triển Laurent trên miền tương ứng:
a) $f(z) = \dfrac{(z-1)}{(z-2)(z-3)}$, trên các miền: $2 < |z| < 3$; $|z| > 5$.
b) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$, trên các miền: $|z| < 1$; $1 < |z| < 2$; $1 < |z-1|$; $0 < |z-1| < 2$.

3. Chứng minh các công thức sau đúng trên miền $|z| > |b|$:
a) $\dfrac{1}{z-b} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} b^{-k-1} z^k$

b) $\dfrac{z^2}{z^2+b^2} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k b^{-2k} z^{2k}$

c) $\dfrac{1}{(z-b)^2} = -\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-2} (k+1) b^{-k-2} z^k$

4. Xác định phần chính tại cực điểm hàm:
a) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ b) $\mathrm{cotg}\pi z$ c) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ d) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$

5. Chứng minh: f có cực điểm tại a khi và chỉ khi tồn tại $m \geq 2$ sao cho $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = 0$.

6. Đúng hay sai: f có cực điểm cấp m tại ∞, thì $\dfrac{1}{f}$ có không điểm cấp m tại 0.

7. Giả sử f có cực cấp m tại a, P là đa thức bậc n. Chứng minh $p \circ f$ có cực cấp $m+n$ tại a.

8. Chứng minh f và e^f không thể có cùng cực điểm. Chứng minh kỳ dị cô lập của f không thể là cực điểm của e^f. Ví dụ $e^{-\frac{1}{z^2}}$ hay $ze^{-\frac{1}{z^2}}$.

9. a) Cho f là hàm nguyên. Giả sử tồn tại $n \in \mathbf{N}, K > 0$: $|f(z)| \le K|z|^n$, khi $|z| > R$. Chứng minh f là đa thức (bậc ?).

   b) Cho f là hàm chỉnh hình trên $\mathbf{C}$ trừ ra hữu hạn cực điểm. Giả sử tồn tại $n \in \mathbf{N}, K > 0 : |f(z)| \le K|z|^n, \forall |z| > R$. Chứng minh f là hàm hữu tỉ.

10. Cho f và g là 2 hàm có không điểm hay cực điểm tại a. Ký hiệu $\omega(f,a)$ là cấp của a của f. Chứng minh: $\omega(fg,a) = \omega(f,a) + \omega(g,a)$, $\omega(\frac{1}{f},a) = -\omega(f,a)$, và $\omega(f,a) < \omega(g,a) \Rightarrow \omega(f \circ g, a) < \omega(f,a)$.

11. Phân loại kỳ dị tại 0, tìm cấp cực điểm: $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $\dfrac{z+i}{z^2+1}$, $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $\dfrac{(\cos z - 1)}{z}$, $z\sin\dfrac{1}{z}$, $e^{-\frac{1}{z^2}}$, $e^{\frac{z+1}{z-1}}$, $\dfrac{1}{z^n(e^z-1)}$

12. Phân loại các điểm kỳ dị hàm: a) $\dfrac{\sin z}{\cos z - 1}$ b) $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{1+z^2}$ c) $e^{(z+\frac{1}{z})}$ d) $e^{-\frac{1}{z^2}}\sin\dfrac{1}{z}$ e) $\cos(z^2 + \dfrac{1}{z^2})$.

13. Đúng hay sai: ∞ là cực điểm bậc n của đa thức P nếu và chỉ nếu P là đa thức bậc n.

14. Tính thặng dư tại các điểm kỳ dị các hàm:

    a) $\dfrac{z}{(z+1)(z^2+2)}$ b) $\dfrac{z}{\sin z}$ c) $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$ d) $\dfrac{z^3+5}{(z^4-1)(z+1)}$

15. Cho $P(z), Q(z)$ là các đa thức. Giả sử bậc $Q(z) >$ bậc $P(z)$ và $Q(z)$ có n nghiệm đơn $z = a_k$ $(k = 1, \cdots, n)$. Chứng minh khi đó ta có

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)(z-a_k)}$$

16. Xác định các số A_k, B_k, p_k trong phân tích

$$\frac{1}{z^{2n}+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k z + B_k}{z^2 + p_k z + 1}$$

17. Tính $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz$, với:

    a) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, $\gamma : |z| = 3$

    b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-1)(z^2+1)}$, $\gamma : |z| = 3$

    c) $f(z) = \dfrac{e^{tz}}{z(z^2+1)}$ $(t > 0)$, γ là biên hình vuông đỉnh $\pm 1 \pm 2i$

18. Khai triển Laurent tính $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1} e^{\frac{t}{z}} z^n dz$

19. Tính: a) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z^2}} dz$ b) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} dz$ c) $\displaystyle\int_{|z|=10} \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{(z-1)^2}$ d) $\displaystyle\int_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}} dz$.

20. Giả sử f, g là các hàm chỉnh hình, có các không điểm cấp $k, k+1$ tại a tương ứng. Chứng minh $\operatorname{Res}_a \dfrac{f}{g} = (k+1)\dfrac{f^{(k)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}$.

21. Cho $g(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Tính $\operatorname{Res}_a g$, nếu a là:
    a) Không điểm cấp m của f. b) Cực điểm cấp m của f.

22. Cho $p_n(z) = 1 + z + \cdots + \dfrac{z^n}{n!}$. Chứng minh: $\forall R > 0, \exists n_0$, khi $n \geq n_0$ thì p_n không có không điểm trên đĩa $|z| \leq R$.

23. Tìm số nghiệm đa thức:
    a) $z^4 + 6z^2 + z + 2$, trên các miền: $|z| < 1$; $1 < |z| < 3$
    b) $z^5 - 12z^2 + 14$, trên các miền: $1 < |z| < 5/2$; $|z| < 2$
    c) $z^5 + z - 16i$, trên các miền: $|z| < 1$; $|z| < 2$

24. Chứng minh trong hình tròn đơn vị phương trình:
    a) $z^3 e^{\frac{1}{1-z}} = 1$ có 2 nghiệm. b) $e^z = 2z + 1$ có 1 nghiệm.
    c) $az^n = e^z$ $(a > e)$, có n nghiệm.

25. Chứng minh phương trình: $z^{n+3} + e^z = 0$ có $n+3$ nghiệm trong đĩa $|z| \leq e$.

26. Tính các tích phân:
    a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t + c\sin t}$ $(a^2 > b^2 + c^2)$. ĐS. $\dfrac{2\pi}{(a^2 - b^2 - c^2)^{1/2}}$
    b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2}$ $(a > b > 0)$. ĐS. $\dfrac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$
    c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t dt}{5 - 4\cos t}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{12}$.
    d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 - 3\sin t)^2}$. ĐS. $\dfrac{5\pi}{32}$.
    e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$ ĐS. $2\pi n$
    f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t}$ $(a > |b|)$. g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a + \sin^2 t}$ $(a > 0)$.

27. Cho P và Q là 2 đa thức bậc $Q \geq$ bậc P+2, và Q không có không điểm thực. Chứng minh:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}a > 0} \operatorname{Res}_a \frac{P}{Q}$$

28. Tính các tích phân:
 a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$
 b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^4}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{4}$.
 c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^6+a^6}$ $(a>0)$. ĐS. $\dfrac{\pi}{3a^2}$.
 d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.
 e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$. ĐS. $\dfrac{\pi}{2a}$.
 f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$. ĐS. $\dfrac{3\pi}{16}$
 g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a,b>0)$. ĐS. $\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$.

29. Tính:
 a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos kxdx}{a^4+x^4}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{2a^3}e^{-ak/2}(\cos\dfrac{ak}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{ak}{\sqrt{2}})$.
 b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos kxdx}{(x^2+a^2)^2}$. ĐS. $\dfrac{\pi}{4a^3}e^{-ak}(ak+1)$.
 c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a,b,k>0)$. ĐS. $\dfrac{\pi}{a^2-b^2}(\dfrac{e^{-b}}{b}-\dfrac{e^{-a}}{a})$.
 d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}dx$. ĐS. $\dfrac{\pi}{2e}$
 e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi xdx}{x^4+x^2+1}$. ĐS. $-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\pi/\sqrt{3}}$.
 f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin xdx}{x^2+a^2}$ $(a\in\mathbf{R})$.
 g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx$ $(\alpha,\beta\geq 0)$.
 h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 xdx}{x^2+1}$.

30. Tính các tích phân:
 a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. đs: $\dfrac{\pi}{2}$
 (Hướng dẫn. Tích phân hàm e^{iz}/z dọc theo biên miền $\{\epsilon<|z|<R,\ \mathrm{Im}z>0\}$ bằng 0. Sau đó cho $\epsilon\to 0$ và $R\to+\infty$.)
 b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\cos x^2dx$ và $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\sin x^2dx$ **(Tích phân Fresnel)** ĐS. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
 (Hướng dẫn. Tích phân e^{iz^2} dọc theo biên miền $\{|z|<R, 0<\arg z<\pi/4\}$. Cho $R\to\infty$, với chú ý $\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\sqrt{\pi}/2$ và $\sin\varphi\geq 2\varphi/2, 0\leq\varphi\leq\pi/2$, suy ra kết qủa)
 c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 kx}{x^2}dx$ $(k>0)$.

31. Chứng minh (2) (3) và (4) của mệnh đề 5.4.

32. Tính các tổng sau với $a > 0$:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$. ĐS. $-\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}$ cothπa.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}$. ĐS. $\frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a \text{ sinh}\pi a}$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^1 - a^2}$ ĐS. $\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \text{ sinh}\pi a}$.

33. Chứng minh:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$

34. Tính: a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a + bk^2}$ b) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^4 + k^2 + 1}$ c) $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k(2k+1)}$.