Bài tham gia thi thử đại học VMF
Họ tên: Trần Ngọc Tiến
Lớp: 11A1
Trường: THPT Dương Quảng Hàm- Hưng Yên
Nick diễn đàn: NGOCTIEN_A1_DQH

Đề số 4

Bài làm

Bài I.1:

Khi $m=1$ thì $y=2x^3-9x^2+12x+1$

*) Tập xác định: $D=R$

*) sự biến thiên:

+) giới hạn ở vô cùng:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-9x^2+12x+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-9x^2+12x+1)=-\infty$

+) đạo hàm và cực trị:

$y'=f'(x)=6x^2-18x+12$

Xét phương trình $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 6x^2-18x+12=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=6 \\ x=2\Rightarrow y=5 \end{array}\right.$

+) điểm uốn:

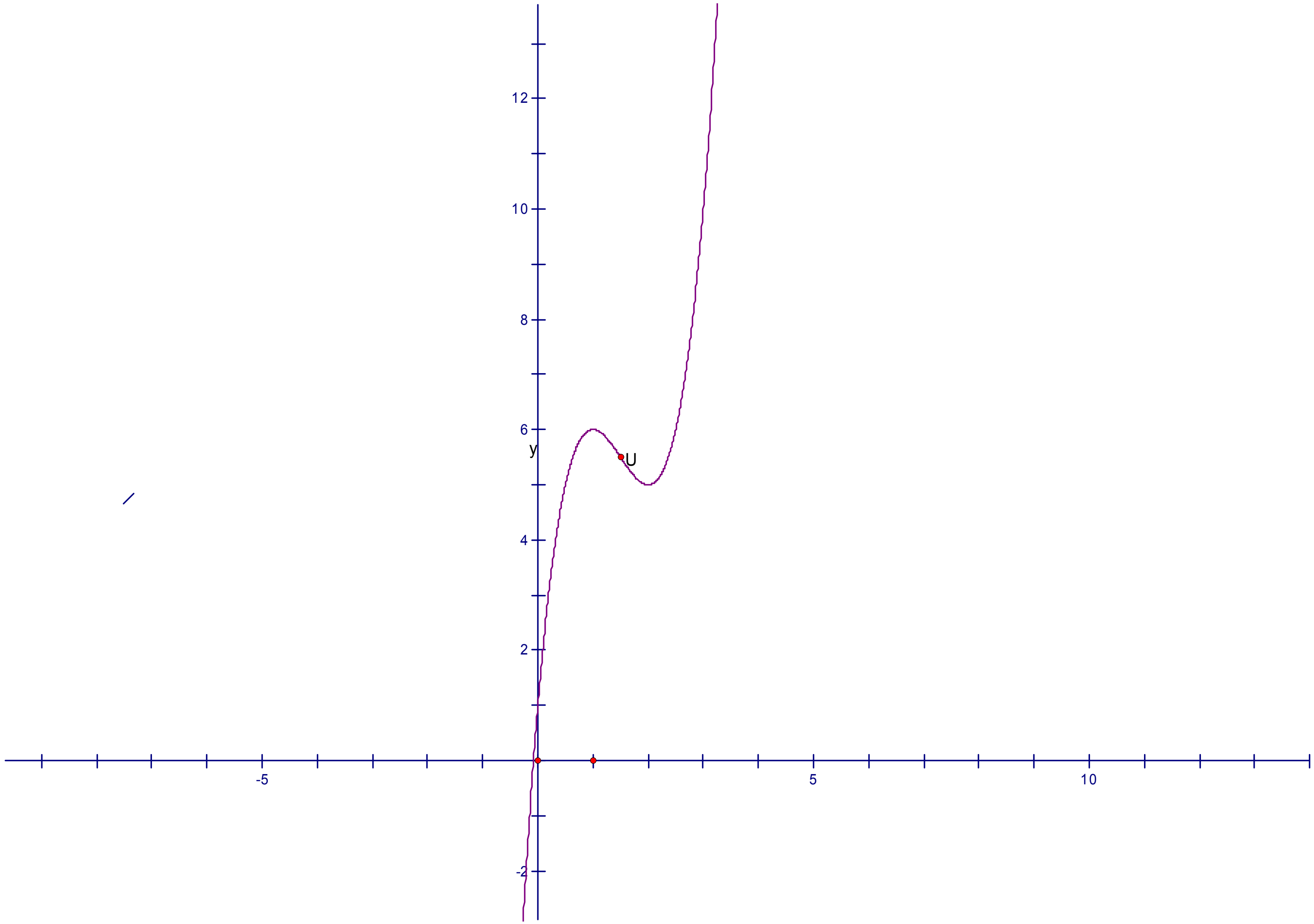
$y''=f''(x)=12x-18$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2}$

+) bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'(x)		+			-			+	
f''(x)			-				+		
f(x)	$-\infty$	↗	6	↘		↘	5	↗	$+\infty$

+) đồ thị:


12
10
8
6
y
U
4
2
-2
-5
5
10

*) nhận xét:
Hàm số đạt cực đại tại $x_{CD} = 1$, khi đó, $y_{CD} = 6$
Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 2$, khi đó $y_{CT} = 5$

Đồ thị hàm số cắt Ox tại một điểm, cắt Oy tại một điểm
Đồ thị hàm số lồi trên $(-\infty;\frac{3}{2})$, lõm trên $(\frac{3}{2};+\infty)$

Đồ thị hàm số là một đường cong nhận điểm uốn $U(\frac{3}{2};\frac{11}{2})$ làm tâm đối xứng.

I.2/

Ta có: $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$

Xét phương trình $y' = 0$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0$$

Coi đây là phương trình bậc 2 với x ta có:

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

f'(x) đổi dấu từ dương sang âm qua $x = m$ nên f(x) đạt cực đại tại đây
f'(x) đổi dấu từ âm sang dương qua $x = m+1$ nên f(x) đạt cực tiểu tại đây
vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu với mọi giá trị của m
hàm số đạt cực đại tại $x = m$, khi đó:

$$y_{CD} = 2m^3 - 3m^2(2m+1) + 6m^2(m+1) + 1 = 2m^3 + 3m^2 + 1$$

Giá trị cực đại của hàm số lớn hơn 1 khi và chỉ khi:

$$2m^3 + 3m^2 + 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow m^2(2m+3)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m > \dfrac{3}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$ thì hàm số có giá trị cực đại lớn hơn 1.

Bài II.1:

$$2\cos(3x+\frac{\pi}{3}) = \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - \sqrt{3}\sin x(3-4\sin^2 x) = 2sinx$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2+2\sin 2x + \sqrt{3}(3-4sin^2 x) = 0 \end{array}\right.$$

*) $\sin x = 0 \ \Leftrightarrow x = k\pi (k \in Z)$

*) $2+2\sin 2x + \sqrt{3}(3-4sin^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2+2\sin 2x + \sqrt{3}(1+2\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}-2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\arcsin(\dfrac{-\sqrt{3}-2}{4}) + m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}\arcsin(\dfrac{-\sqrt{3}-2}{4}) + n\pi \end{array}\right. \quad (m,n \in Z)$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm là $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arcsin(\frac{-\sqrt{3}-2}{4}) + m\pi$, $x = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\arcsin(\frac{-\sqrt{3}-2}{4}) + n\pi$ với $(k, m, n \in Z)$.

II.2:

$x^3 - 1 = \sqrt{x}(-3x^2 + 5x - 3)$

Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt : $\sqrt{x} = t \geq 0$, phương trình trở thành:

$t^6 + 3t^5 - 5t^3 + 3t - 1 = 0$ (*)

Xét khi $t = 0$ thì phương trình (*) tương đương với:

$-1 = 0$, đây là điều vô lý nên $t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, ta chia cả hai vế của (*) cho t^3 ta được:

(*) $\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 5 + \frac{3}{t^2} - \frac{1}{t^3} = 0$

$\Leftrightarrow (t^3 - 3t + \frac{3}{t} - 1) + 3(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}) + 3(t - \frac{1}{t}) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t - \frac{1}{t})^3 + 3(t - \frac{1}{t})^2 + 3(t - \frac{1}{t}) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t - \frac{1}{t} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{array}\right.$$

Suy ra nghiệm $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Với $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài III:

$$I=\int_0^{\ln 9}\sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}}dx$$

Đặt $e^x=t\Rightarrow x=\ln t$, $dx=\frac{1}{t}dt$

Khi $x=0$ thì $t=1$

Khi $x=\ln 9$ thì $t=9$

Khi đó:

$$I=\int_1^9\sqrt{\frac{t}{\sqrt{t}+1}}.\frac{1}{t}dt=\int_1^9\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{t}+t}}dt$$

Đặt $\sqrt{t}=a$

$\Rightarrow t=a^2$

$\Rightarrow dt=2ada$

Khi $t=1$ thì $a=1$

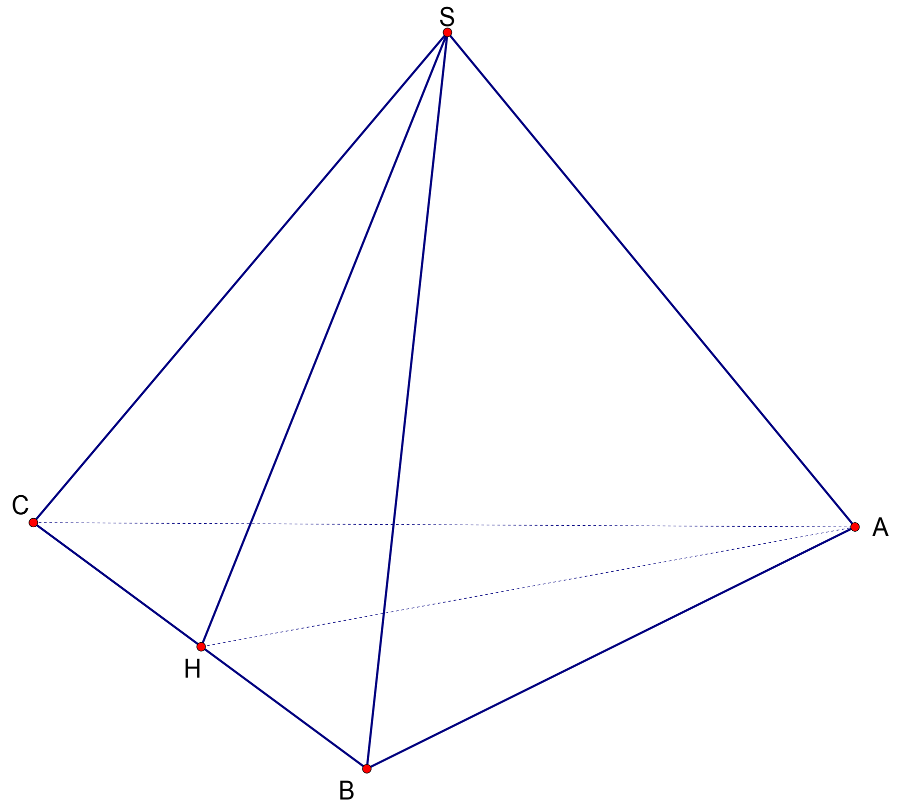
Khi $t=9$ thì $a=3$

Lúc đó:

$$I=\int_1^3\frac{2ada}{\sqrt{a^3+a^2}}=2\int_1^3\frac{da}{\sqrt{a+1}}=4\sqrt{a+1}\Big|_1^3=8-4\sqrt{2}$$

Vậy $I=8-4\sqrt{2}$

Bài IV:



Trong tam giác SBC kẻ $SH \perp BC$
Vì $\triangle SBC$ đều nên H là trung điểm BC
$\Rightarrow AH \perp \mathrm{BC}$ (do tam giác ABC đều)

$\Rightarrow \mathrm{BC} \perp (\mathrm{SAH})$ và $\angle \mathrm{SHA}=60^o$
Xét $\triangle SAH$ cân tại H có $\angle \mathrm{SHA}=60^o$

Suy ra $\triangle SAH$ đều

$\Rightarrow SA = SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét trong $\triangle SAC$ có:

$\cos \angle SCA = \frac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2.SC.CA} = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \sin \angle SCA = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$\Rightarrow S_{SAC} = \frac{1}{2}.SC.AC.\sin \angle SCA = \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{a^2.\sqrt{39}}{16}$

Gọi h là khoảng cách từ B đến (SAC) thì:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}h.S_{SAC} = \frac{a^2h.\sqrt{39}}{48}$ (1)

Mặt khác ta có:

$V_{S.ABC} = V_{B.AHS} + V_{C.AHS} = \frac{1}{3}HB.S_{SAH} + \frac{1}{3}HC.S_{SAH} = \frac{1}{3}BC.\frac{1}{2}SH.AH.sin\angle \text{AHS} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\frac{a^2h.\sqrt{39}}{48} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

$\Leftrightarrow h = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Vậy khoảng cách từ B đến (SAC) là $h = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

Bài V:

cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\geq\frac{3}{8}(*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$.\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$\Rightarrow VT(*)\geq\frac{3}{2}.(\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2})$$

Ta sẽ chứng minh :

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{3}{4}(**)$$

Vì xyz=1 nên đặt:

$x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$, thì $(**)$ trở thành:

$$\sum\frac{a^4}{(a^2+bc)^2}\geq\frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy-schwarz ta có:

$$(a^2+bc)^2\leq(a^2+b^2)(a^2+c^2)$$

$$(b^2+ca)^2\leq(b^2+c^2)(b^2+a^2)$$

$$(c^2+ab)^2\leq(c^2+a^2)(c^2+b^2)$$

$$\Rightarrow VT(**) \geq \sum \frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$$

Ta sẽ chứng minh $\sum \frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \geq \frac{3}{4}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4 \geq 6a^2b^2c^2$$

Đây là điều luôn đúng theo AM-GM nên ta có điều phải chứng minh, dấu "=" xảy ra khi a=b=c hay x=y=z=1

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài VI.A.1:

Ta có: $(C_1): x^2+y^2-10x=0$

$(C_2): x^2+y^2+4x-2y-20=0$

Xét hệ tọa độ giao điểm của 2 đường tròn này:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x=0(1) \\ x^2+y^2+4x-2y-20=0(2) \end{cases}$$

Trừ cả 2 vế của (2) cho (1) ta được:

$14x-2y=20$

$\Leftrightarrow y=7x-10$

Thế vào phương trình (1) ta được:

$(1) \Leftrightarrow x^2+(7x-10)^2-10x=0$

$\Leftrightarrow 50x^2-150x+100=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=4 \\ x=1 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$$

Hay (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm $A(2;4)$ và $B(1;-3)$

Gọi I là tâm đường tròn (C_3) cần lập:

Vì $I \in (d): x+6y-6=0$ nên có thể gọi $I(6a;1-a)$.

Mà $A, B \in (C_3)$

$\Rightarrow IA = IB$

$\Leftrightarrow (6a-2)^2+(3+a)^2=(6a-1)^2+(4-a)^2$

$\Leftrightarrow a=2$

$\Rightarrow I(12,-1)$ và $R=IA=IB=5\sqrt{5}$

$\Rightarrow (C_3):(x-12)^2+(y+1)^2=125$

Vậy đường tròn cần lập là $(C_3):(x-12)^2+(y+1)^2=125$.

Bài VII.A.2:

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-2;2)$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần lập có vecto pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(a,b,c)$

Vì $A \in (Q)$ nên phương trình (Q) có dạng:

$(Q): a(x+1)+b(y-1)+c(z-2)=0$

Mà (Q) lại chứa điểm B nên:

$\Rightarrow a(3+1)+b(5-1)+c(-2-2)=0$

$\Leftrightarrow a+b-c=0 (1)$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q) thì ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|1.a-2.b+2.c|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Mà theo bài ra thì $\alpha=45^o$

$$\Rightarrow |a-2b+2c|=3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

Kết hợp với phương trình (1) ta được:

$$|a|=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=0(2)$$

Từ phương trình (1) suy ra: $c=a+b$

Thay vào (2) ta được:

$$(2)\Leftrightarrow b^2+a^2+2ab+b^2-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2+ab=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right.$$

*) khi $b=0$, chọn $a=1$ thì $c=1$, khi đó, phương trình (Q) là: $(Q): x+z-1=0$

*) khi $a=-b$, chọn $a=1$ thì $b=-1, c=0$, khi đó, phương trình (Q) là: $(Q): x-y+2=0$

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn là $(Q): x+z-1=0$ hoặc $(Q): x-y+2=0$.

Bài VII.A:

$$\begin{cases} x_1+x_2=3(1) \\ y_1+y_2=-1(2) \\ x_1x_2-y_1y_2=4(3) \\ x_1y_2+x_2y_1=-3(4) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_1=3-x_2 \\ y_1=-1-y_2 \end{cases}$

Thế vào (3) và (4) ta được hệ:

$$\begin{cases} (3-x_2)x_2+y_2(1+y_2)=4 \\ (3-x_2)y_2-x_2(1+y_2)=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2^2+y_2^2+y_2+3x_2=4(5) \\ 3y_2-2x_2y_2-x_2=-3(6) \end{cases}$$

Từ (6) $\Rightarrow x_2 = \dfrac{3y_2 + 3}{2y_2 + 1}$

Thế vào (5) ta được:

$$(5) \Leftrightarrow -(\frac{3y_2 + 3}{2y_2 + 1})^2 + y_2^2 + y_2 + \frac{9y_2 + 9}{2y_2 + 1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4y_2^4 + 8y_2^3 - 2y_2^2 - 6y_2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_2 - 1)(y_2 + 2)(2y_2^2 + 2y_2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{array}\right. \quad \text{(vì } 2y_2^2 + 2y_2 + 1 > 0\text{)}$$

*) với $y_2 = 1$ thì $x_2 = 2$, $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 = 1 \\ y_1 = -1 - y_2 = -1 \end{cases}$

*) với $y_2 = -2$ thì $x_2 = 1$, $\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 = 2 \\ y_1 = -1 - y_2 = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 bộ nghiệm $(x_1; y_1; x_2; y_2)$ là $(1; -2; 2; 1)$ và $(2; 1; 1; -2)$