HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# MỘT SỐ ĐỀ DỰ TUYỂN OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC

NĂM 2009

# Chương 1

# Các bài toán đề nghị

## 1.1 Môn: Đại số, Trường: Học viện Phòng không - Không quân

**Câu I. (2,5 điểm)** Ma trận $A \in M_n(K)$ được gọi là luỹ linh bậc $p$ nếu $p$ là một số nguyên dương sao cho $A^{p-1} \neq [O]$ và $A^p = [O]$ (ma trận không).

a) Chứng minh rằng nếu $A$ là ma trận luỹ linh bậc $p$ thì $E - A$ là ma trận khả nghịch. Hãy tìm ma trận nghịch đảo $(E - A)^{-1}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

**Câu II. (3 điểm)**

a) Cho các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ khác nhau và khác các giá trị $0, -1, -2, \ldots, -n+1$. Hãy chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+1} & \dfrac{1}{\lambda_2+1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{\lambda_1+n-1} & \dfrac{1}{\lambda_2+n-1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Cho đa thức $P(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6$. Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có một nghiệm là $1 - i$. Hãy chứng minh rằng nếu $A$ là ma trận vuông cấp $n$ thoả mãn $P(A) = [O]$ (ma trận không), thì $A$ không có giá trị riêng là số thực.

**Câu III. (2,5 điểm)** Cho bất phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} > 2009$$

Giả sử bất phương trình có các nghiệm là một số khoảng. Tính tổng độ dài các nghiệm trên trục số.

**Câu IV. (2 điểm)** Cho các đa thức với hệ số phức:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n;$$
$$Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và tồn tại $k(k = 1, 2, \ldots, m)$ sao cho $|b_k| > C_m^k.2010^k$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất $a_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2009$.

## 1.2 Môn: Giải tích, Trường: Học viện Phòng không - Không quân

**Câu I. (2 điểm)** Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{\int_0^x 2t^2dt}.$$

**Câu II. (1,5 điểm)** Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 3; 3(x_{n+1} - x_n) = \sqrt{16 + x_n^2} + \sqrt{16 + x_{n+1}^2}\quad \forall n \geq 1$. Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số.

**Câu III. (1,5 điểm)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, đơn điệu tăng và thoả mãn điều kiện $f(x) > 0\ \ \forall x \in [a, b]$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a).$$

**Câu IV. (2,5 điểm)** Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng phương trình

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0 \qquad (1)$$

có đúng là một nghiệm dương duy nhất.

b) Giả sử $R$ là nghiệm dương của phương trình (1) và

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j;\ B = \sum_{j=1}^{n} ja_j.$$

Chứng minh rằng:

$$A^A \leq R^B.$$

**Câu V. (2,5 điểm)**

a) Tìm tất cả các hàm số $f : J \to J$ và thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) & \leq 4 + 2009x \\ f(x+y) & \leq f(x) + f(y) - 4 \end{cases} \quad \forall x, y \in J$$

b) Các hàm số $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục và thoả mãn điều kiện:

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)) \ \ \forall x \in J$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

## 1.3 Môn: Đại số, Trường: Đại học Thuỷ lợi

**Câu I.** Cho ma trận thực $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) $n$ là số lẻ,

ii) $a_{ii} = \lambda$,

iii) $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i \neq j$.

Tìm điều kiện của $\lambda$ để hệ phương trình

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

có nghiệm duy nhất.

**Câu II.** Gọi $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ là tất cả các căn bậc $n (n > 1)$ của đơn vị. Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận có

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 + \epsilon_i & \text{khi } i = j \\ \epsilon_i & \text{khi } i \neq j. \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của $A$.

**Câu III.** Tìm tất cả các số thực $a, b$ sao cho

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

**Câu IV.** Cho $A$ là ma trận thực có hạng bằng $r$. Chứng minh rằng các ma trận $A^TA$ và $AA^T$ cũng có hạng bằng $r$.

## 1.4 Môn: Đại số, Trường: Học viện Quân y

**Câu I.** Cho hai đa thức $P(x) = (x-a)^{2n} + (x-3a)^{2n}$ và $Q(x) = (x-a)^2.(x-3a)^2$ với $n \in N^*, a \in R^*$. Xác định đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

**Câu II.** Cho đa thức $P(x) = x^5 - x + 2 \in \mathbf{C}[x]$ có các nghiệm là $x_i$ $(i = \overline{1,5})$. Tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sum_{i=1}^{5} \frac{8x_i - 10}{(x_i^2 - 1)(x_i - 2)^2}$$

**Câu III.** Tìm tất cả các ma trận $A$ vuông cấp $n$ sao cho với mọi ma trận $B$ vuông cấp $n$ ta đều có $det(A + 2009.B) = det(A) + 2009.det(B)$.

**Câu IV.** Cho $a \in R^*$, chứng tỏ rằng ma trận $A$ khả nghịch và tìm $A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

**Câu V.** Cho ma trận nguyên $A$ vuông cấp $n$. Chứng minh rằng nếu với mọi $b \in \mathbf{Z}^n$ hệ phương trình $Ax = b$ đều có nghiệm nguyên thì $det(A) = \pm 1$.

**Câu VI.** Cho $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A^TA$.

## 1.5 Môn: Đại số , Trường: ĐH Sư phạm Tp Hồ Chí Minh

**Câu I.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \dfrac{1}{2^{2009}}x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \dfrac{1}{2^{2009}}x_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \dfrac{1}{2^{2009}}x_n; \end{cases}$$

biết rằng $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ và $2^{2008}a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $1 \leq i \neq j \leq n,\ 2 \leq n \in \mathbb{N}$.

**Bài II.** Cho ma trận $A$ vuông cấp $n$ khả nghịch ($0 < n \in \mathbb{N}$). Giả sử $\{P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$ là hệ $n$ đa thức một biến $x$ thoả mãn đẳng thức ma trận

$$A \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng luôn tìm được $n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [2008, 2009]$ sao cho $det(P_i(a_j))_n \neq 0$.

## 1.6 Môn: Giải tích , Trường: Học viện Kỹ thuật quân sự

**Câu I. (4 điểm)** Giả sử $a_0$ là một số dương cho trước và $\{a_n\}$ là một dãy số thực được xác định bằng công thức truy hồi sau:

$$a_n = \frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\Big);\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh $\{a_n\}$ là dãy số hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Câu II. (4 điểm)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 2]$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2$ trong đoạn $[0, 2]$ sao cho $x_2 - x_1 = 1$ và $f(x_2) = f(x_1)$.

**Câu III. (4 điểm)** Cho hàm $f : [a, b] \to R,\ b - a \geq 4$, là hàm khả vi trên khoảng mở $(a, b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

**Câu IV. (4 điểm)** Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

**Bài V. (4 điểm)** Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên $[a,b],\ f(a) = f(b) = 0$ và $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Chứng minh rằng:

a) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1}{4} \leq \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \int_a^b x^2 f^2(x)dx$.

## 1.7 Môn: Đại số , Trường: CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu

**Câu I. (5 điểm)** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

trong đó $C_n^k$ là tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử.

**Câu II. (5 điểm)** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính $f(A)$ biết $f(x) = 2009x^{2009} - 2008x^{2008} + \dots + x$.

**Câu III. (5 điểm)** Cho $n \in \square^*$ và $A, B$ là hai ma trận cấp $n$ thoả mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $AB^{2009} = B^{2009}(A + 2009E)$ trong đó $E$ là ma trận đơn vị cấp $n$.

**Câu IV. (5 điểm)** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} XYX = I_2 \\ YXY = I_2 \end{cases}$$

trong đó $X, Y$ là các ma trận vuông cấp 2 và $I_2$ là ma trận đơn vị cấp 2.

**Câu V. (5 điểm)** Cho $A$ và $B$ là các ma trận vuông cấp $n$ thoả mãn $E - AB$ khả nghịch. Chứng minh $E - BA$ khả nghịch.

**Câu VI. (5 điểm)** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và có $n$ nghiệm thực. Chứng minh rằng: $(n-1)[P'(x)]^2 \geq nP(x)P''(x) \ \ \forall x \in \square$.

## 1.8 Môn: Giải tích , Trường: CĐSP Hà Nội

**Câu I.** Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} \cdots \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}}$$

**Câu II.** Tìm hàm $f$ xác định với $x \neq 1$ sao cho thoả mãn phương trình

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2009f(x) + arctg\frac{x}{x-1}.$$

**Câu III.** Chứng minh

$$2009^{2008^{2009}} > 2008^{2009^{2008}}$$

**Câu IV.** Cho hàm $f$ khả vi trên $[0,1], f'(0) = 1, f'(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0,1)$, sao cho $f'(c) = c$.

**Câu V.** Tìm tất cả các hàm $f$ liên tục trên $\mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x) = f(\sin x).$$

## 1.9 Môn: Đại số, Trường: ĐH Bà rịa - Vũng tàu

**Câu I. (6 điểm)** Cho

$$a, b, c, d \in \square,\ A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính $|A-\lambda E|$

**Câu II. (6 điểm)** Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in$ □*.

**Câu III. (6 điểm)** Cho $n \in$ □* và $A$ là ma trận phản đối xứng cấp $n$. Chứng minh rằng $I + A$ khả nghịch trong đó $I$ là ma trận đơn vị cấp $n$.

**Câu IV. (6 điểm)** Cho $n \in$ □*, $A$ là ma trận thực cấp $n$. Chứng minh rằng ta có thể phân tích $A$ thành tổng của 2 ma trận thoả mãn ma trận nào cũng có $n$ giá trị riêng khác nhau.

**Câu V. (6 điểm)** Cho $a_i \neq b_j$ với $i, j = \overline{1,n}$ và $b_i \neq b_j$ $\forall i \neq j$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1-b_1} + \dfrac{x_2}{a_1-b_2} + \dfrac{x_3}{a_1-b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_1-b_n} = 0 \\ \dfrac{x_1}{a_2-b_1} + \dfrac{x_2}{a_2-b_2} + \dfrac{x_3}{a_2-b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_2-b_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1}{a_n-b_1} + \dfrac{x_2}{a_n-b_2} + \dfrac{x_3}{a_n-b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n-b_n} = 0 \end{cases}$$

## 1.10 Môn: Giải tích , Trường: ĐH Bà rịa - Vũng tàu

**Câu I. (5 điểm)** Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3}.$$

**Câu II. (5 điểm)** Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ biết

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx;\quad n \in □^*$$

**Câu III. (5 điểm)** Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn điều kiện

$f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f\Big(x + \dfrac{1}{n}\Big)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0, 1]$.

**Câu IV. (5 điểm)** Cho $f(x)$ khả vi liên tục 2 lần trên $[a, b]$ và trên đoạn này phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn 2 nghiệm khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại $h \in [a, b]$ sao cho $f(h) + f''(h) = 2f'(h)$.

**Câu V. (5 điểm)** Liệu có tồn tại hàm $f(x)$ xác định trên $[0, 2]$ thoả mãn các điều kiện sau đây: $f(x)$ khả vi và liên tục trên $[0, 2], f(0) = f(2) = 1, |f'(x)| \leq 1, \left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq 1$.

**Câu VI. (5 điểm)** Tìm tất cả các hàm số $f : \square^+ \to \square^+$ thoả mãn điều kiện

$$xf[xf(y)] = f[f(y)]\ \forall x, y \in \square^+ \tag{1}$$

## 1.11 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Hàng hải

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bằng quy nạp

$$x_1 = 2009, x_2 = 2008, x_{n+2} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)x_{n+1} + \frac{x_n}{n}\ (\forall n \in N^*)$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Câu II. (2,5 điểm)** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên khoảng mở $(0, 1)$ thoả mãn:

i) $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$.

ii) Tồn tại số $k \in (0, 1)$ sao cho $\left|f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\right| \geq \dfrac{\sqrt{1-k}}{2}$.

Chứng minh rằng tìm được 2 số $x_1, x_2$ phân biệt thuộc khoảng $(0, 1)$ sao cho:

$$f'(x_1)f'(x_2) = k.$$

**Câu III. (2,5 điểm)** Tính

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$$

**Câu IV. (2,5 điểm)** Tồn tại hay không một hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ thoả mãn

$$f(f(x)) = x^2 - 2\ \ (\forall x \in \mathbf{R}).$$

## 1.12 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Nha trang

**Câu I.** Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn

$$x_n = \frac{1}{2010}\Big(2009x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{2009}}\Big); \quad n \geq 2, a > 0, x_1 > 0.$$

Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Câu II.** Cho $f(x), g(x)$ dương và liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = 1.$$

**Câu III.** Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_0^1 f(x)dx\Big] = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Sử dụng kết quả trên, tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{1^{2009} + 2^{2009} + \cdots + n^{2009}}{n^{2010}} - \frac{1}{2010}\Big].$$

**Câu IV.** Cho $p, q$ là các số thực dương và $p + q = 1$, hãy tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(px+qy); \quad x, y \in R; \ x \neq y.$$

**Câu V.** Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ và $f'(0) \neq 0$. Giả sử $\theta(x)$ thoả mãn

$$\int_0^x f(t)dt = f(\theta(x)).x, \text{ với } x \in (0,1].$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\theta(x)}{x}$.

## 1.13 Môn: Đại số , Trường: Học viện Tài chính

**Câu I.** Cho đa thức

$$P_n(x) = x^n - x - 2009 \ \ (n \in N,\ n > 1).$$

Chứng minh rằng:

1. Đa thức $P_n(x)$ có một nghiệm duy nhất trong khoảng $(1, 2009)$, ký hiệu nghiệm đó là $x_n$.
2. Dãy số $\{x_n\}$ là dãy số giảm.

**Câu II.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2}{2!} + \cdots + \dfrac{x_{2009}}{2009!} + \dfrac{x_{2010}}{2010!} = x_{2010} \\ \dfrac{x_1}{2!} + \dfrac{x_2}{3!} + \cdots + \dfrac{x_{2009}}{2010!} + x_{2010} = x_{2009} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1}{2010!} + x_2 + \cdots + \dfrac{x_{2009}}{2008!} + \dfrac{x_{2010}}{2009!} = x_1 \end{cases}$$

## 1.14 Môn: Giải tích , Trường: CĐSP Nam Định

**Câu I. (4 điểm)** Tính

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}.$$

**Câu II. (4 điểm)** Cho dãy $(a_n)$ thoả mãn

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n^2 + n + 2.$$

Tính $a_{2009}$.

**Câu III. (4 điểm)** Cho hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng $(-\infty, 0]$ và thoả mãn điều kiện

$$\lim_{x\to-\infty} (2f(x) - f'(x)) = 4$$

a) Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Giả sử $f(0) = -1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm.

**Câu IV. (4 điểm)** Cho hàm $f(x) \in C^2[0,2]$ và $f(0) = 2008, f(1) = 2009, f(2) = 2010$. Chứng minh rằng $\exists x_0 \in (0,2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.

**Câu V. (4 điểm)** Giả sử $f(x), g(x) \in C[a,b]$ thoả mãn $f(x), g(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng $\exists \theta \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f(\theta)}{\int_a^\theta f(x)dx} - \frac{g(\theta)}{\int_\theta^b g(x)dx} = 1$$

## 1.15 Môn: Đại số , Trường: ĐH Đồng Tháp

**Câu I. (3 điểm)** Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$ với $n \in \mathbb{N}^*, a_{ij} \in \mathbb{R}$, trong đó $a_{ii} = \alpha$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_{ij} = \beta$ với $i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Tìm điều kiện để ma trận $A$ khả nghịch. Khi đó, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A$.

**Câu II. (3 điểm)** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{3}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{3}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

**Câu III. (3 điểm)** Giả sử $A, B$ là các ma trận thực cấp $n$ bất kỳ và $E$ là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng nếu $E - AB$ là một ma trận khả nghịch thì $E - BA$ cũng là một ma trận khả nghịch.

**Câu IV. (3 điểm)** Ma trận $A = (a_{ij})_n$ thực vuông cấp $n$ được gọi là ma trận phản đối xứng khi $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Hãy tính tổng các giá trị riêng của ma trận phản đối xứng $A$.

**Câu V. (3 điểm)** Gọi $M_n(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp $n$. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, chứng minh rằng với mọi $B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA$ khi và chỉ khi

$A = \alpha E$ với $E$ là ma trận đơn vị cấp $n$.

**Câu VI. (3 điểm)** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2009 & 2008 & 2007 \\ -2007 & 2009 & 0 \\ 2008 & 0 & 2009 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $A^{2010}$.

**Câu VII. (3 điểm)** Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ có bậc bằng 5, biết rằng đa thức $f(x)+1$ chia hết cho $(x-1)^3$ và đa thức $f(x)-1$ chia hết cho $(x+1)^3$.

## 1.16 Môn: Đại số , Trường: Đại học Quy Nhơn

**Câu I.** Cho $M$ là ma trận cấp $3 \times 2$ và $N$ là ma trận cấp $2 \times 3$ thoả mãn

$$MN = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận $NM$?

**Câu II.** Tồn tại hay không một ma trận thực $A$ vuông cấp 2 thoả mãn

$$A^{2010} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\epsilon \end{bmatrix},$$

trong đó $\epsilon$ là một hằng số dương.

**Câu III.** Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Câu IV.** Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực, nguyên tố cùng nhau, có bậc dương lần lượt là $m$ và $n$. Giả sử $r(x)$ là một đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ thua $m+n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai đa thức với hệ số thực $f$ và $g$ sao cho $deg(f) < n$ và $deg(g) < m$ và $pf + qg = r$.

## 1.17 Môn: Giải tích, Trường: Đại học Quy Nhơn

**Câu I.** Cho hàm số khả vi trên $[0,1]$ thoả mãn $f(0)=0$ và

$$16|f'(x)| \leq 4|f(x)|^{2009}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $[0,1]$.

**Câu II.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0)=0,\ f'(0)=-2,\ f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c)f'(c)+f''(c)=0.$$

**Câu III.** Chứng minh rằng với mỗi đa thức $P(x)$ bậc 1999 ta luôn có

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx \geq \frac{|f(0)|}{3000^{2000}}.$$

**Câu IV.** Tồn tại hay không một hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,2]$ và thoả mãn $f(0)=f(2)=1,\ |f'(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [0,2]$ và $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq 1$.

**Câu V.** Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn phương trình

$$P(x^2+x)=P(x)P(x+1).$$

## 1.18 Môn: Đại số , Trường: Đại học An Giang

**Câu I. (5 điểm)** Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tính $A^{2008}$

**Câu II. (5 điểm)** Cho $A$ là ma trận vuông cấp 2009 có $a_{ij}=\max\{i,j\}$. Tính $detA$.

**Câu III. (5 điểm)** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thoả mãn

$$AB-2A-2B=0.$$

a) Chứng minh rằng $AB = BA$.
b) Với $A + B = -E$. Chứng minh rằng $rank(A - E) + rank(B - E) = n$.

**Câu IV. (5 điểm)** Cho $m$ là một số nguyên khác 0 và $\pm 1$, còn $a_{ij}$ là các số nguyên cho trước. Hãy giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{m}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{m}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

**Câu V. (5 điểm)** Biết rằng đa thức $P(x)$ có ít nhất 2 nghiệm thực, đa thực $P(P(x))$ không có nghiệm thực.

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm thực của $P(x)$ đều khác 0 và cùng dấu.

**Câu VI. (5 điểm)** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ với $\beta$ dương.

a) Chứng minh rằng tồn tại ma trận khả nghịch $P \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

b) Giả sử $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ và hệ phương trình cho bởi

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}.$$

Hãy xác định $u_{2009}$.

## 1.19 Môn: Giải tích , Trường: Đại học An Giang

**Câu I. (5 điểm)** Cho hàm số $f$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{8}}.$$

Tính tích phân $\int_{-2009\pi}^{2009\pi} f(x)dx$.

**Câu II. (5 điểm)** Cho hàm số $f$ liên tục trên $[0, +\infty)$ và thoả mãn

$$0 < 3xf(x) < 1, \ \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \int_0^x t^3 f(t)dt - 3\Big(\int_0^x tf(t)dt\Big)^3$ là hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

**Câu III. (5 điểm)** Tìm tất cả hàm $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ thoả mãn

$$\forall x \geq 0,\ f(f(x)) + f(x) = 2009.2010x.$$

**Câu IV. (5 điểm)** Cho hàm số $f$ và $f'(x)$ là hàm đồng biến trong $[a, b]$, ngoài ra

$$f(a) = \frac{1}{2}(a - b);\ f(b) = \frac{1}{2}(b - a).$$

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta, \gamma$ phân biệt trong $(a, b)$ sao cho

$$f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1.$$

**Câu V. (5 điểm)** Chứng minh rằng nếu $\sum\limits_{i=0}^{2009} \dfrac{a_i}{2008 + 2i + 1} = 0$ thì phương trình $\sum\limits_{i=0}^{2009} a_i x^i = 0$ luôn có nghiệm trong $(0, 1)$.

**Câu VI. (5 điểm)** Cho $f$ là hàm liên tục, dương, giảm. Đặt

$$S_n = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(n+kn) \quad (k, n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng

$$f(n+kn) + \int_n^{n+kn} f(x)dx \leq S_n \leq f(n) + \int_n^{n+kn} f(x)dx.$$

## 1.20 Môn: Toán , Trường: Học viện An ninh

**Câu I.** Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0, 2]$ và $f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 [f'(x)]^2 dx \geq \frac{3}{2}\Big[\int_0^2 f(x)dx\Big]^2.$$

**Câu II.** Cho $A, B$ là các ma trận thực, vuông cấp $n$ thoả mãn $A + B = I$ (ma trận đơn vị). Biết rằng $rank(A) + rank(B) = n$. Chứng minh rằng

$$A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O \text{ (ma trận không)}$$

## 1.21 Môn: Toán , Trường: Học viện ngân hàng

**Câu I.** Cho $P(x) = x^2 - 1$. Hỏi phương trình

$$\underbrace{P(P(P\dots P}_{2009}(x))) = 0$$

có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

**Câu II.** Cho hai dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ \forall n \geq 1$$

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3,\ \forall n \geq 2$.
Ngoài ra chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

## 1.22 Môn: Đại số , Trường: Đại học Huế

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng

1. $A^3 = 3A^2 - 2A$'
2. $A^n = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$ với mọi $n$ nguyên dương.

**Câu II. (2,5 điểm)** Cho $A, B$ là các ma trận vuông cấp $n$ hệ số thực sao cho

$$rank(A) = rank(B).$$

Chứng minh rằng tồn tại các ma trận vuông khả nghịch $C, D$ sao cho $AD = CB$.

**Câu III. (2,5 điểm)** Cho $A_1, \dots, A_m$ là các ma trận vuông cấp $n$ và $A_1A_2\dots A_m = 0$. Chứng minh rằng

$$rank(A_1) + \dots + rank(A_m) \leq n(m-1).$$

**Câu IV. (2,5 điểm)** Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $p(x)$ hệ số thực sao cho

$$p(x) - p'(x) = \frac{a}{2009!}x^{2009} + 2008,\quad a > 0.$$

Hãy tìm đa thức $p(x)$ nói trên (chú ý ký hiệu $p'(x)$ để chỉ đạo hàm của đa thức $p(x)$).

## 1.23 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Huế

**Câu I. (2 điểm)** Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực dương $(x_n)_n$ sao cho

$$x_n^n \arctan x_n = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng $(x_n)_n$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(x_n)_n$.

**Câu II. (2 điểm)** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2009$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$.

**Câu III. (2 điểm)** Tồn tại hay không hàm khả vi liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) > 0$ và $f'(x) = f(f(x))$?

**Câu IV. (2 điểm)** Cho hàm $f$ khả vi liên tục trên $[a, b]$ sao cho $f(a) = 0$ và $f(x), f'(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b (f(x))^{2009} dx < (b - a)^2.$$

**Câu V. (2 điểm)** Cho $f$ là một hàm khả vi đến cấp 2 trên $[0, 1]$ sao cho $f''(x) \geq 0$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 (1 - t)f(t)dt \leq \int_0^1 f(t^2)dt.$$

## 1.24 Môn: Đại số , Trường: CĐSP KonTum

**Câu I. (2 điểm)** Cho 3 ma trận vuông cấp hai:

$$Q = \begin{bmatrix} d & h \\ q & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \text{và } C = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ 4 & 2009 \end{bmatrix},$$

trong đó $d, h, q, b$ là bốn số thực thoả mãn $(h - q)^2 \neq (b - d)^2$.

Đặt $A = \left[(QB - BQ)^{2009}\right]^4 .C. \left[(QB - BQ)^{-4}\right]^{2009} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Tính tổng

$$S = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}.$$

**Câu II. (2 điểm)** Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Đặt $P = A^n + B^n,\ n \in N\backslash\{0\}$. Tính $det(P)$.

**Câu III. (2 điểm)** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4 = 2009x_1 \\ bx_1 + ax_2 + dx_3 + cx_4 = 2009x_2 \\ cx_1 + dx_2 + ax_3 - bx_4 = 2009x_3 \\ -dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4 = 2009x_4 \end{cases},$$

trong đó $a, b, c, d \in R$ và $a > 2009$.

**Câu IV. (2 điểm)** Cho hai ma trận

$$K = \begin{pmatrix} c & d & s & p \\ d & u & m & k \\ s & m & t & o \\ p & k & o & n \end{pmatrix} \text{ và } T = \begin{pmatrix} c & \frac{2}{3}d & \frac{2}{5}s & \frac{2}{7}p \\ \frac{3}{2}d & u & \frac{3}{5}m & \frac{3}{7}k \\ \frac{5}{2}s & \frac{5}{3}m & t & \frac{5}{7}o \\ \frac{7}{2}p & \frac{7}{3}k & \frac{7}{5}o & n \end{pmatrix},$$

với $c, d, s, p, k, o, n, t, u, m$ là 10 số thực tuỳ ý.

Chứng minh rằng $K$ và $T$ là hai ma trận đồng dạng.

**Câu V. (2 điểm)** Cho đa thức $f(x) = x^5 - 3x^4 - 19x^3 + ax^2 + bx + c$ thuộc $\mathbf{Z}[x]$.

a) Trong trường hợp chia $f(x)$ cho đa thức $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ được dư là 1, hãy xác định $a, b, c$.

b) Giả sử rằng phương trình $f(x) - 1 = 0$ có 4 nghiệm nguyên phân biệt, hãy chứng tỏ phương trình $f(x) + 1 = 0$ không có nghiệm nguyên nào.

## 1.25 Môn: Giải tích , Trường: CĐSP KonTum

**Câu I. (2 điểm)** Cho dãy số thực bị chặn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thoả mãn:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{x_{2009n}}{2009}) = 0.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Câu II. (2 điểm)** Cho $f$ là hàm liên tục trên $[0, 2009]$, biết rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}, 0 < n_0 \leq 2009$ sao cho

$$\int_0^{n_0} f(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in [0, 2009]$ sao cho:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha+1} f(x)dx.$$

**Câu III. (2 điểm)** Cho $f$ và $g$ là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \not\equiv 0$ và $f(x)$ bị chặn thì $|g(y)| \leq 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

**Câu IV. (2 điểm)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ $(a > 0)$, khả vi trên $(a, b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = (a + b)\frac{f'(x_2)}{4x_2} + (a^2 + ab + b^2)\frac{f'(x_3)}{6x_3^2}.$$

**Câu V. (2 điểm)** Cho $f$ là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho $f > 0, f' \leq 0$ và $f''$ bị chặn trên $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

## 1.26 Môn: Đại số , Trường:

**Câu I.** Cho hai ma trận thực vuông cấp hai $A = \begin{pmatrix} a^{2009} - b^{2010} & b \\ c & a^{2009} - c^{2010} \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} a^{2009} - c^{2010} & c \\ b & a^{2009} - b^{2010} \end{pmatrix}$. Tính $(A - B)^{2010}$.

**Câu II.** Cho 2009 đa thức $f_j(x) = a_{0,j} + a_{1,j}x + \cdots + a_{2007,j}x^{2007}$ với $j \in$

$\{1, 2, \ldots, 2009\}$ và ma trận vuông cấp 2009

$$A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(2009) \\ f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(2009) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{2009}(1) & f_{2009}(2) & \cdots & f_{2009}(2009) \end{pmatrix}$$

Hãy tính $det(A)$.

**Câu III.** Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2009} = 0 \\ 2009x_0 + 2010x_1 + (2008 + 2^2)x_2 + \cdots + (2008 + 2^{2009})x_{2009} = 0 \\ 2009x_0 + 2011x_1 + (2008 + 3^2)x_2 + \cdots + (2008 + 3^{2009})x_{2009} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2009x_0 + 4018x_1 + (2008 + 2010^2)x_2 + \cdots + (2008 + 2010^{2009})x_{2009} = 0 \end{cases}$$

**Câu IV.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 15 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$. Gọi $n$ là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $A^n$ có 3 giá trị riêng phân biệt $k_1, k_2, k_3$. Hãy tìm tổng $S = (k_1 + k_2 + k_3)^{2009}$.

**Câu V.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn

$$P[x + P(y)] + x^2 = [P(y) + x]^2 + P(-x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

## 1.27 Môn: Toán , Trường:

**Câu I.** Cho $A \in M_n(\mathbf{R}$ thoả mãn: $A + A^T = 0$. Chứng minh rằng

$$det(I + \alpha A^2) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

**Câu II.** Cho $A \in M_4(\mathbf{R})$ thoả mãn $A^3 = I_4$. Tính $det(A + I)$.

**Câu III.** Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thoả mãn $AB + A + B = 0$. Chứng minh rằng

$$RankA = RankB$$

**Câu IV.** Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thoả mãn $trace(AA^T + BB^T) = trace(AB + A^T B^T)$. Chứng minh rằng $A = B^T$.

**Câu V.** Giải phương trình

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ X \in M_2(\mathbf{R})$$

**Câu VI.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc $n$ với hệ số thực có $n$ nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức: $Q(x) = x^2 P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$ là thực và phân biệt.

## 1.28 Môn: Giải tích , Trường:

**Câu I.** Cho dãy số $(x_n)_{n\in N}$ xác định bởi công thức

$$x_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2}).$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Câu II.** Cho dãy số $(x_n)_{n\in N}$ bị chặn và thoả mãn

$$x_{n+2} \le \frac{1}{3} x_{n+1} + \frac{2}{3} x_n, \quad \text{với mọi} \quad n \ge 0.$$

Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n\in N}$ hội tụ.

**Câu III.** Cho hàm số $f : (0, +\infty) \to R$ có đạo hàm cấp hai liên tục và thoả mãn điều kiện

$$|f''(x) + 2xf'(x) + (1 + x^2) f(x)| \le 2008,\ \text{với mọi } x \in (0, +\infty).$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

**Câu IV.** Tìm tất cả các hàm số $f : [0, 1] \to R$ liên tục và thoả mãn điều kiện sau:

$$f(x) = \frac{1}{2008}[f(\frac{1}{2008}) + f(\frac{x+1}{2008}) + \cdots + f(\frac{x+2007}{2008})],$$

với mọi $x \in [0,1]$.

**Câu V.** Chứng minh rằng

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$$

**Câu VI.** Tính tích phân sau

$$I = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

## 1.29 Môn: Đại số , Trường: CĐSP Bắc Ninh

**Câu I.** Cho dãy số $(a_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} a_1 = 1, \;\; a_2 = -1 \\ a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Tìm giá trị biểu thức $A = 2a_{2008}^2 + a_{2008}.a_{2009} + a_{2009}^2$.

**Câu II.** Cho hàm số $f : R \to R$ xác định bởi $y = f(x) = 1999^x + 1999^{2-x}$. Với giá trị nào của $a$ thì hàm $y = f(x+a)$ là hàm số chẵn.

**Câu III.** Cho dãy số $(x_n)$ xác định như sau:

$$x_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2}), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} (lnx_n)$.

**Câu IV.** Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ liên tục thoả mãn các điều kiện

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \;\; \forall x \in R.$$

**Câu V.** Cho $a, b, c \in R, \; n \in N^*$ sao cho $c = -\dfrac{6(3a+2b)}{5(n+2)}$. Chứng minh rằng phương trình sau: $3a \sin^n x + 2b \cos^n x + c \cos x + c = 0$ có nghiệm thuộc $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

## 1.30 Môn: Giải tích , Trường: CĐSP Bắc Ninh

**Câu I.** a) Cho 2 ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính $AB - BA$.

b) Có hay không 2 ma trận $A, B$ vuông cấp $n$ thoả mãn $AB - BA$ là ma trận đơn vị.

**Câu II.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + x_n^2x_n = b^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

với $a_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),\ b$ là các tham số, các hệ số $a_i$ đôi một khác nhau.

**Câu III.** Cho $A$ là ma trận vuông, ký hiệu $I$ là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng

a) Nếu $A^2 = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là hai ma trận khả nghịch của nhau.

b) Nếu có số nguyên dương $n$ để $A^n = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là các ma trận khả nghịch.

c) Nếu $P, Q$ là hai ma trận vuông cùng cấp thoả mãn $PQ = QP$ và tồn tại hai số nguyên dương $r, s$ thoả mãn $P^r = Q^s = 0$ thì ma trận $I + P + Q$ là khả nghịch.

**Câu IV.** Cho ma trận $A$ và $k_1, k_2$ là 2 giá trị riêng phân biệt. Giả sử $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}$ là 2 véc tơ riêng lần lượt tương ứng với $k_1, k_2$. Hỏi $\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}$ có là véc tơ riêng của $A$ được không?

**Câu V.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 + x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}$, trong đó $x_1, x_2, x_3$ là 3 nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + ax + 2009$.

a) Tính $detA$.

b) Tìm $a$ để ma trận $A$ có một giá trị riêng là 2009.

## 1.31 Môn: Đại số , Trường: Đại học Ngân hàng Th-pHCM

**Câu 1.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính $A^{2009}$. **Câu 2.** Cho hệ phương trình phụ thuộc tham số $a \neq 0$

$$\begin{cases} ax_2 + a^2x_3 + \cdots + a^{2008}x_{2009} = 1 \\ \frac{x_1}{a} + a_2x_3 + \cdots + a^{2007}x_{2009} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1}{a^{2007}} + \frac{x_2}{a^{2006}} + \cdots + ax_{2009} = 1 \\ \frac{x_1}{a^{2008}} + \frac{x_2}{a^{2007}} + \cdots + \frac{x_{2009}}{a} = 1 \end{cases}$$

**Câu 3.** Tính định thức cấp $n$ sau

$$D_n(x,y) = \det \begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ y & 0 & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & y & 0 \end{pmatrix}$$

**Câu 4.** Cho $A$ là ma trận vuông cấp 2 có các giá trị riêng $\lambda_1,\ \lambda_2 \in (-1,1)$.

Chứng minh rằng

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

**Câu 5.**Cho ma trận $A = (a)$. Chứng minh rằng nếu $A$ không khả nghịch thì có thể thay $a_{ii}$ bởi 0 hoặc 1 để được ma trận mới khả nghịch. **Câu 6.** Cho đa thức

$f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $\deg f = n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 1.32 Môn: Giải tích, Trường: CĐSP Hà Tây

**Câu 1.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} \text{ khi } \ x \neq 0 \\ 0 \text{ khi } \ x = 0. \end{cases}$$

**Câu 2.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2009} dx}{(\cos x)^{2009} + (\sin x)^{2009}}$$

**Câu 3.** Cho $n$ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

**Câu 4.** Chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

**Câu 5.** Cho hai hàm số $f : [0,1] \to [0,1]$, $g : [0,1] \to [0,1]$.

1, Chứng minh rằng $g$ có điểm bất động.
2. Biết rằng $f$ là hàm đơn điệu và $f(g(x)) = g(f(x))\ \forall x \in [0,1]$.
Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0,1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. **Câu 6.** Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big).$$

## 1.33 Môn: Đại số, Trường: ĐHSP Hà Nội 2

**Câu 1.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2009 & 1 \\ 2009 & 1 & 2009 \\ 1 & 2009 & 1 \end{pmatrix}$$

có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm. **Câu 2.** Chứng minh rằng tồn tại ma trận thực cấp $n \times n$ thỏa mãn

$$A^2 + 2A + 5I = 0.$$

**Câu 3.** Cho $A, B$ là 2 ma trận thực cấp $2 \times 2$ thỏa mãn

$$A^2 = B^2 = I, \quad AB + BA = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại ma trận không suy biến $T$ sao cho

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Câu 4.** Cho $M$ là ma trận thực cấp $3 \times 2$, $N$ là ma trận thực cấp $2 \times 3$, thỏa mãnewcommand

$$MN = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tính $NM$.

**Câu 5.** Cho đa thức $P_1(x) = x^2 - 1$. Định nghĩa

$$P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)),\ \forall n \geq 1.$$

Xác định số nghiệm thực của đa thức $P_{2009}(x)$.