Đáp án đề thi thử số 4

Ngày 8 tháng 3 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ với m là tham số.

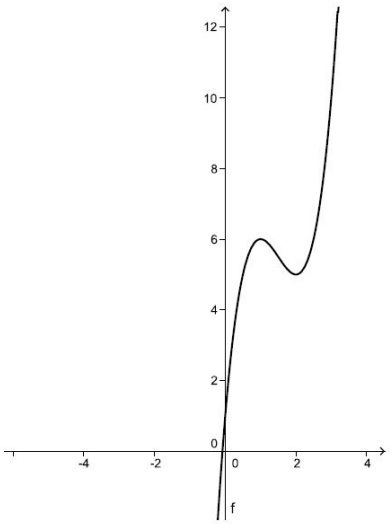
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

Lời giải : Với $m = 1$: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

- Tập xác định : $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên :
  + Chiều biến thiên :
    – Ta có : $y' = 6x^2 - 18x + 12$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
    – Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.
    – Hàm số nghịch biến trong $(1; 2)$.
  + Cực trị : Hàm số đạt cực đại tại $x_{\text{CD}} = 1; y_{\text{CD}} = 6$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 2; y_{\text{CT}} = 5$.
  + Giới hạn : $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
  + Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị hàm số :



□

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số đã cho luôn có cực đại, cực tiểu. Tìm m để giá trị cực đại của hàm số lớn hơn 1.

Lời giải : Đặt hàm số đã cho là $y = f(x)$. Ta có :

$$f'(x) = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$
$$\Delta' = 9(2m+1)^2 - 36m(m+1) = 9 > 0, \forall m$$

Vậy hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m. Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là :

$$x = m; x = m+1$$

Dễ thấy $x_{\text{CĐ}} = m$. Do đó

$$f\left(x_{\text{CĐ}}\right) = 2m^3 + 3m^2 + 1$$

Điều kiện của bài toán tương đương với :

$$2m^3 + 3m^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow m^2(2m+3) > 0 \Leftrightarrow 0 \neq m > -\frac{3}{2}$$

□

Câu II *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình : $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + 2\sin x$

Lời giải : Viết lại phương trình như sau :

$$\begin{aligned}
&\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \cos x + 2\sin x \\
\Leftrightarrow &(4\cos^3 x - 3\cos x) - \sqrt{3}(3\sin x - 4\sin^3 x) = \cos x + 2\sin x \\
\Leftrightarrow &4\cos^3 x + 4\sqrt{3}\sin^3 x = \left[4\cos x + \left(2 + 3\sqrt{3}\right)\sin x\right]\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\
\Leftrightarrow &\left(2 - \sqrt{3}\right)\sin^3 x + 4\sin^2 x\cos x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\sin x\cos^2 x = 0
\end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)\tan^3 x + 4\tan^2 x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\tan x = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)\tan^2 x + 4\tan x + \left(2 + \sqrt{3}\right) = 0 \end{array}\right. \\
&\qquad\qquad \ldots.
\end{aligned}$$

□

2. Giải phương trình : $x^3-1=\sqrt{x}(-3x^2+5x-3)$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{aligned}&(x-1)(x^2+x+1)=-\sqrt{3}x(x^2+x+1)+8x\sqrt{x}\\ \Leftrightarrow&(x-1+3\sqrt{x})(x^2+x+1)=8x\sqrt{x}\end{aligned}$$

Suy ra :

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=8$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, khi đó phương trình trở thành :

$$(t+3)(t^2+3)=8\Rightarrow(t+1)^3=0\Rightarrow t=-1$$

...

□

Câu III (1 điểm) Tính tích phân :

$$I=\int_0^{\ln 9}\sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}}dx$$

Lời giải : Đặt $u=e^{\frac{x}{2}}$ ta có : $2du=e^{\frac{x}{2}}dx$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=1; x=\ln 9\Rightarrow u=3$.

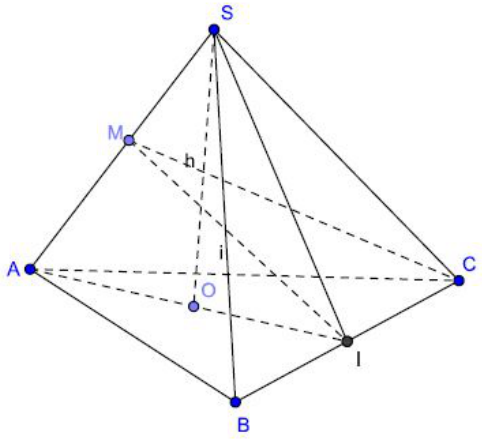
Từ đó ta có :

$$\begin{aligned}&I=\int_0^{\ln 9}\sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}}dx=\int_1^3\frac{2du}{\sqrt{u+1}}=\int_1^3\frac{2d(u+1)}{\sqrt{u+1}}\\ &I=8-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

□

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có góc nhị diện của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải :



Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có : ΔABC đều suy ra $AI \perp BC$ và ΔSBC đều suy ra $SI \perp BC$. Vậy $\widehat{SIA} = 60^0$
Do đó ΔSIA đều có cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra

$$S_{\Delta SIA} = \frac{1}{2}AI.SI.\sin 60^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

Ta có :

$$\frac{V_{B.SAI}}{V_{B.SAC}} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } V_{B.SAC} = 2V_{B.SAI} = \frac{2}{3}BI.S_{\Delta SIA} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi M là trung điểm của SA. Tam giác SAC cân tại C có $CS = CA = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Suy ra

$$CM^2 = CA^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

Do đó

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}CM.SA = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

Mặt khác :

$$V_{B.SAC} = \frac{1}{3}d\left(B,(SAC)\right)S_{\Delta SAC}. \text{ Do đó } d\left(B,(SAC)\right) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}.\frac{16}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

□

Câu V(1 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geqslant \frac{3}{8}$$

Lời giải : Ta có :

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{8} \geqslant \frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^2}$$

Tương tự, ta được :

$$2VT \geqslant \frac{3}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}\right] - \frac{3}{8}$$

Do đó ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geqslant \frac{3}{4} \qquad (1)$$

Ta có $xyz = 1$ nên có thể giả sử $xy \geqslant 1$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geqslant \frac{2}{1+xy} \qquad (2)\\ \Leftrightarrow &2xy + \left(x^2+y^2\right)xy \geqslant x^2 + y^2 + 2x^2y^2\\ \Leftrightarrow &2xy\left(1-xy\right) + \left(x^2+y^2\right)\left(xy-1\right) \geqslant 0\\ \Leftrightarrow &\left(xy-1\right)\left(x-y\right)^2 \geqslant 0 \ \left(\text{đúng do } \ xy \geqslant 1\right) \end{aligned}$$

Áp dụng (2) ta được :

$$\begin{aligned} VT_{(1)} &\geqslant \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2\left(1+y^2\right)} + \frac{1}{(1+z)^2} \quad \left(\text{vì } \ 2\left(1+x^2\right) \geqslant (1+x)^2, 2\left(1+y^2\right) \geqslant (1+y)^2\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+xy}\right) + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{z}} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2}\\ &= \frac{z^2+z+1}{(1+z)^2} = \frac{4z^2+4z+4}{4(1+z)^2} = \frac{3(1+z)^2+(z-1)^2}{4(1+z)^2} = \frac{3}{4} + \frac{(z-1)^2}{4(1+z)^2} \geqslant \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng. Suy ra bất đẳng thức đã cho được chứng minh hoàn toàn.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ □

PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Câu VI.a (2 điểm)

1. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của $x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ và có tâm trên $x + 6y - 6 = 0$

   Lời giải : Theo giả thiết hai đường tròn cắt nhau tại hai giao điểm. Do đó tọa độ giao điểm của hai đường tròn đã cho là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0\\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

tương đương

$$\begin{cases} 7x - y - 10 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình

$$x^2 + (7x - 10)^2 - 10x = 0$$

tương đương

$$50x^2 - 150x + 100 = 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 2$. Với $x = 1$ ta được $y = 4$. Gọi $A(1, 4)$. Với $x = 2$ ta được $y = -3$. Gọi $B(1, -3)$. Đường tròn cần tìm qua 2 điểm A, B nên tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực Δ của AB. Gọi M là trung điểm của AB khi đó $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Đường trung trực Δ của ABqua $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nhận vec tơ $\overrightarrow{AB} = (-1; -7) = -(1; 7)$ làm vectow pháp tuyến nên có phương trình

$$1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 7\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

tương đương

$$x + 7y - 5 = 0$$

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 6y - 6 = 0 \\ x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

giải ra $x = 12; y = -1$. Đường tròn cần tìm có bán kính $R = IA = \sqrt{(2 - 12)^2 + (4 + 1)^2} = 5\sqrt{5}$, tâm $I(12, -1)$ nên có phương trình

$$(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$$

□

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 1; 2), B(3; 5; -2)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và tạo với (P) một góc 45^0.

Lời giải : Gọi mp(Q) là mặt phẳng cần tìm khi đó mp(Q) có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Khi đó mp(Q) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(A, B, C)$. Theo giả thiết ta có vec tơ pháp tuyến mp(P) là $\overrightarrow{n_P}(1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (4, 4, -4)$ Vì góc giữa mp(P) và mp(Q) là 45^0 nên ta có :

$$\cos 45^0 = \frac{|A - 2B + 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + c^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

tương đương

$$2\,|A - 2B + 2C| = 3\sqrt{2(A^2 + B^2 + C^2)} \qquad (1)$$

mặt khác vì mp(Q) qua hai điểm A,B nên

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 4A + 4B - 4C = 0 \Leftrightarrow A + B = C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$2\,|A - 2B + 2(A + B)| = 3\sqrt{2(A^2 + B^2 + (A + B)^2)}$$

tương đương

$$2A^2 = 2A^2 + 2AB + 2B^2$$

Giải ra được $B = 0$ hoặc $B = -A$. Với $B = 0$ ta có : $A = C$, Chọn $A = C = 1$ ta được phương trình mp(Q) : $x + z + D = 0$ vì (Q) qua $A(-1, 1, 2)$ nên ta có $-1 + 2 + D = 0$ hay $D = -1$. vậy ta có phương trình mp(Q) là $x + z - 1 = 0$. Với $A = -B$ ta có $C = 0$. Chon $A = -B = 1$ ta có phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $x - y + D = 0$ vì (Q) qua $A(-1, 1, 2)$ nên ta có $-1 - 1 + D = 0$ hay $D = 2$. vậy ta có phương trình mp(Q) là $x - y + 2 = 0$. Tóm lại có 2 mặt phẳng thỏa mãn bài toán là : $mp(Q_1) : x + z - 1 = 0$. và $mp(Q_2) : x - y + 2 = 0$ □

Câu VII.a (1 điểm) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = -1 \\ x_1x_2 - y_1y_2 = 4 \\ x_1y_2 + x_2y_1 = -3 \end{cases}$$

Lời giải : Xét 2 số phức : $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$
Ta có : $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)i = 3-i$ và $z_1.z_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i = 4-3i$
Như vậy, theo định lý Vi-et : $z_1;\ z_2$ là các nghiệm của phương trình :

$$z^2 - (3 - i)z + (4 - 3i) = 0 \ \ (1)$$

Ta có : $\Delta = (3 - i)^2 - 4(4 - 3i) = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$
Do đó ta có : $\sqrt{\Delta} = \pm(1 + 3i)$
Hai nghiệm của phương trình (1) là $z = \dfrac{3 - i + 1 + 3i}{2} = 2+i$ hoặc $z = \dfrac{3 - i - 1 - 3i}{2} = 1 - 2i$

Tương ứng, hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là : $(x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ y_1 = 1;\ y_2 = -2)$ hoặc $(x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ y_1 = -2;\ y_2 = 1)$ □

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2; 1)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(0; 7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

   Lời giải : Gọi N' là điểm đối xứng của N qua I thì N' thuộc AB, ta có :
   $\begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N = 4 \\ y_{N'} = 2y_I - y_N = -5 \end{cases}$ suy ra $N'(4; -5)$
   Phương trình đường thẳng $AB : 4x + 3y - 1 = 0$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB : $d(I,AB)=\dfrac{|4.2+3.1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

Ta có $AC=2BD$ suy ra $AI=2BI$. Đặt $BI=x, AI=2x$. Trong tam giác vuông ABI, ta có :

$$\frac{1}{[d(I,AB)]^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^2} \text{ suy ra } x=\sqrt{5} \text{ suy ra } BI=\sqrt{5}$$

Do đó B là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{5}$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2=5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ vì $x_B>0$

Vậy tọa độ của đỉnh B là $B(1;-1)$ □

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$, $(d_2):\begin{cases} x=2-t \\ y=3+t \\ z=4+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-y+z-6=0$. Tìm trên (d_2) những điểm M sao cho đường thẳng qua M song song với (d_1), cắt (α) tại N sao cho $MN=3$.

Lời giải : Ta có : $M\in(d_2)$ suy ra $M(2-m;3+m;4+m)$

Đường thẳng (d) qua M và song song với (d_1) nên $(d):\begin{cases} x=2-m+2t \\ y=3+m+t \\ z=4+m-2t \end{cases}$

Lại có $N=(d)\cap(\alpha)$ nên tọa độ của điểm N thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x=2-m+2t \\ y=3+m+t \\ z=4+m-2t \\ x-y+z-6=0 \end{cases} \Rightarrow t=-3-m \Rightarrow N(-3m-4;0;3m+10)$$

Suy ra :

$$\overrightarrow{NM}=(6+2m;3+m;-2m-6)\Rightarrow NM^2=(2m+6)^2+(m+3)^2+(-2m-6)^2$$

Do đó :

$$MN=3\Leftrightarrow 9(m+3)^2=9\Leftrightarrow m+3=\pm1\Leftrightarrow m=-2 \text{ hoặc } m=-4$$

Vậy tồn tại hai điểm M thỏa mãn bài toán : $M_1(4;1;2)$, $M_2(6;-1;0)$ □

Câu VII.b (1 điểm) Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5}=5^{-y-4} \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8 \end{cases}$

Lời giải : Phương trình thứ nhất tương đương với :

$$3^{|x^2-2x-3|}.3^{-\log_3 5}=5^{-y-4}\Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|}.5^{-1}=5^{-y-4}\Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|}=5^{-y-3}$$

$$\Leftrightarrow 5^{-y-3}=3^{\left|x^2-2x-3\right|}\geq 3^0\Rightarrow -y-3\geq 0\Rightarrow y\leq -3 \qquad (1)$$

Do đó, bất phương trình thứ hai tương đương với :

$$-4y+y-1+y^2+6y+9\leq 8\Leftrightarrow y^2+3y\leq 0\Leftrightarrow -3\leq y\leq 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y=-3$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có :

$$3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-1}\Leftrightarrow 3^{\left|x^2-2x-3\right|}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm : $(x;y)=(-1;-3),(3;-3)$ □