Bài tham gia thi thử đại học VMF
Đề số 5
Họ tên: Trần Ngọc Tiến
Trường: THPT Dương Quảng Hàm-Văn Giang-Hưng Yên
Nick diễn đàn: NGOCTIEN_A1_DQH

Bài làm

Câu I:

1/ *) tập xác định: D=R\{-1}

*) sự biến thiên:

+) Giới hạn: ta có: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{2x+2} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{2x+2} = \frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng y=-1 làm tiệm cận đứng, nhận đường thẳng $y = \frac{-1}{2}$ làm tiệm cận ngang

+) Đạo hàm: ta có: $f'(x) = \frac{4}{(2x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

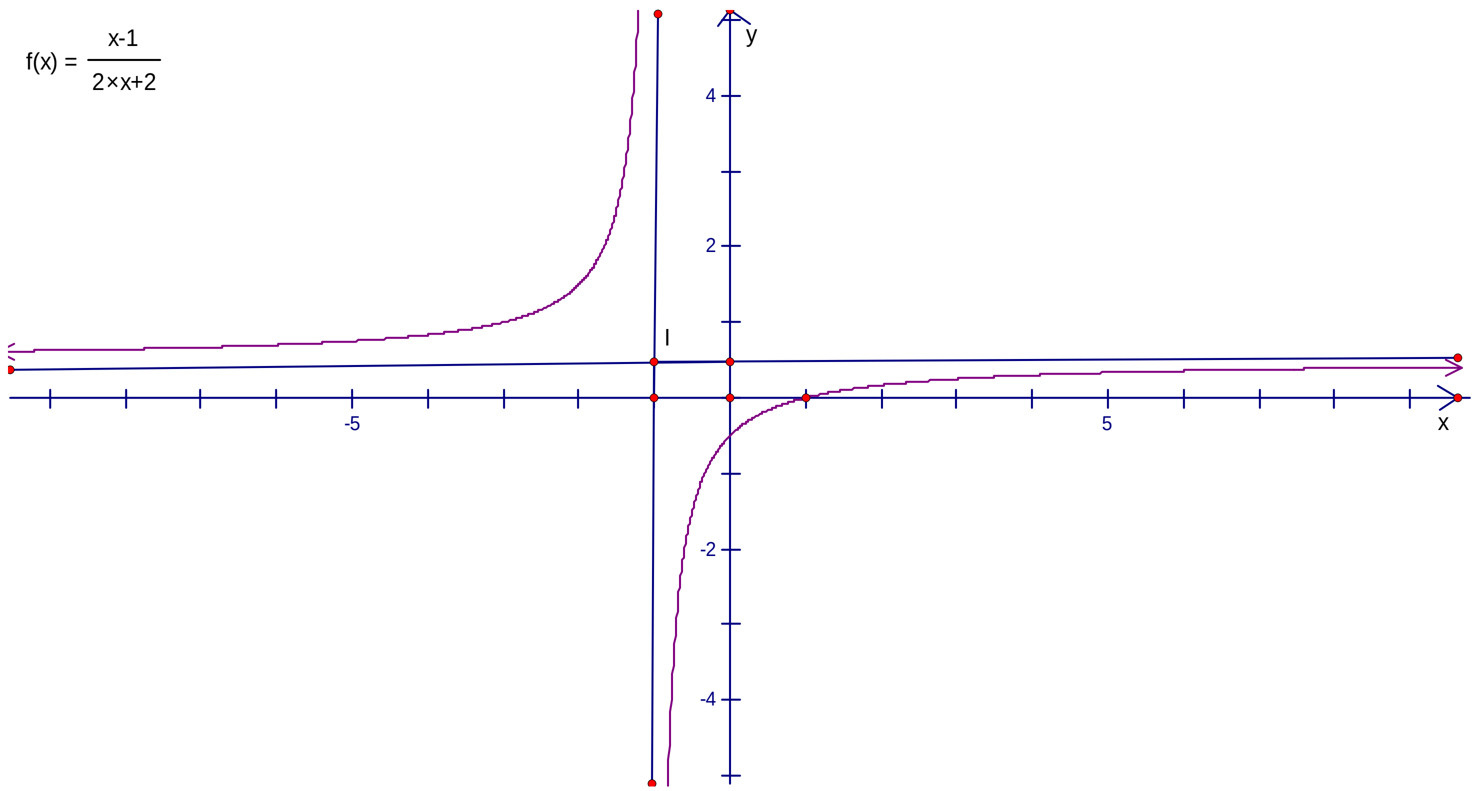
Nên hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị

+) bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		+	$\|$	+	
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

+) đồ thị:



+) nhận xét:

Đồ thị hàm số cắt Ox tại điểm $(1;0)$

Cắt Oy tại điểm $(0;-\frac{1}{2})$

Đồ thị hàm số nhận $I(-1;\frac{1}{2})$ làm tâm đối xứng

2/ gọi điểm $M(m,\frac{m-1}{2m+2})$ là 1 điểm thỏa mãn đề bài

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị hàm số là:

$$(d): y=\frac{1}{(m+1)^2}(x-m)+\frac{m-1}{2m+2}$$

Gọi $A=(d)\cap Ox$ thì tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{1}{(m+1)^2}(x-m)+\frac{m-1}{2m+2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-m^2+2m+1}{2}$$

$$\Rightarrow A(\frac{-m^2+2m+1}{2};0)$$

Gọi $B=(d)\cap Oy$ thì tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{m}{(m+1)^2}+\frac{m-1}{2m+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(0;\frac{m^2-2m-1}{2(m+1)^2})$$

Gọi $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm ΔOAB

$$\Rightarrow x_G=\frac{x_A+x_B+x_O}{3}=\frac{-m^2+2m+1}{6};$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{m^2-2m-1}{6(m+1)^2}$$

Mà $G\in(\Delta): 4x+y=0$ nên:

$$4.\frac{-m^2+2m+1}{6}+\frac{m^2-2m-1}{6(m+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m+1=0 \\ \dfrac{1}{(m+1)^2}=4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1+\sqrt{2} \Rightarrow \\ m=1-\sqrt{2} \Rightarrow . \end{array}\right.$$

+) $m^2-2m-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \\ m=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1+\sqrt{2} \Rightarrow M(1+\sqrt{2};\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}) \\ m=1-\sqrt{2} \Rightarrow M(1-\sqrt{2};\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}). \end{array}\right.$$

+) $\dfrac{1}{(m+1)^2}=4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow M(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}) \\ m=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow M(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}) \end{array}\right.$$

Vậy có 4 điểm M thỏa mãn là $M(1+\sqrt{2};\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2})$; $M(1-\sqrt{2};\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2})$; $M(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2})$; $M(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2})$.

Câu II:

1/ giải phương trình:

$\cos^2 3x+\cos^2 x+3cos^2 2x+\cos 2x=2$

$$\Leftrightarrow \frac{cos6x+1}{2}+\frac{cos2x+1}{2}+3\cos^2 2x+\cos 2x=2$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x-3\cos 2x+\cos 2x+6\cos^2 2x+2\cos 2x=2$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x+6\cos^2 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \\ \cos 2x=-1\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (K\in Z)$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ và $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ với $(k\in Z)$.

2/ giải hệ: $\begin{cases} x^2+y^2-xy+4y+1=0(1) \\ y[7-(x-y)^2]=2(x^2+1)(2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) của hệ ta có:

$$x^2+1=\frac{y[7-(x-y)^2]}{2}$$

Thế vào phương trình (1) ta được:

$$(1)\Leftrightarrow y[7-(x-y)^2]+2y^2-2xy+8y=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 7-(x-y)^2+2y-2x+8=0 \end{array}\right.$$

*) khi $y=0$ thì phương trình (2) trở thành $2(x^2+1)=0$, đây là điều vô lí nên trường hợp này vô nghiệm

*) khi $7-(x-y)^2+2y-2x+8=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+2(x-y)-15=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-y=-5 \end{array}\right.$$

+) $x-y=3$

$\Leftrightarrow y=x-3$

Thế vào phương trình (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow (x-3)(7-9)=2(x^2+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=-2 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$$

+) $x-y=-5$

$\Leftrightarrow y=x+5$

Thế vào (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow (x+5)(7-25)=2(x^2+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+18x+92=0$

Phương trình này vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm là $(1;-2)$ và $(-2;-5)$.

Câu III:

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$$

Ta có: $(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 x^3(\sqrt{x^2+1}-x)dx=-\int_0^1 x^4dx+\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx=-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1+\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx=-\frac{1}{5}+\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

Xét tích phân $J = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$

Đặt $\sqrt{x^2+1} = t \Rightarrow x = \sqrt{t^2-1}$

$\Rightarrow dx = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$

Khi $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$

Khi đó: $J = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{(t^2-1)^3}.t.\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2(t^2-1)dt = \dfrac{1}{5}t^5\Big|_1^{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{15}$

$\Rightarrow I = -\dfrac{1}{15} + J = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{15}$.

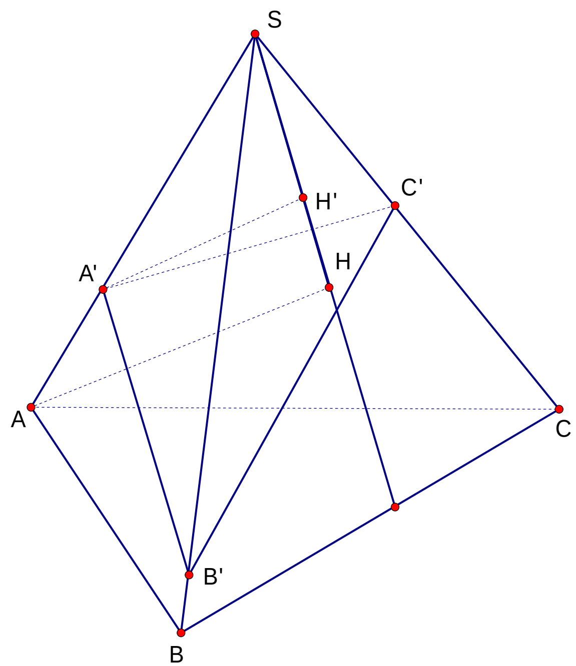
Vậy $I = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{15}$.

Câu IV:

trước hết ta chứng minh tính chất sau:

Cho tứ diện SABC, các điểm A’, B’, C’ lần lượt thuộc các cạnh SA,SB,SC. Khi đó ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$

Chứng minh:



Kẻ AH và A’H’ cùng vuông góc với (SBC)

$\Rightarrow AH\,//\,A'H'$

Và $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{A'H'}{AH}$.

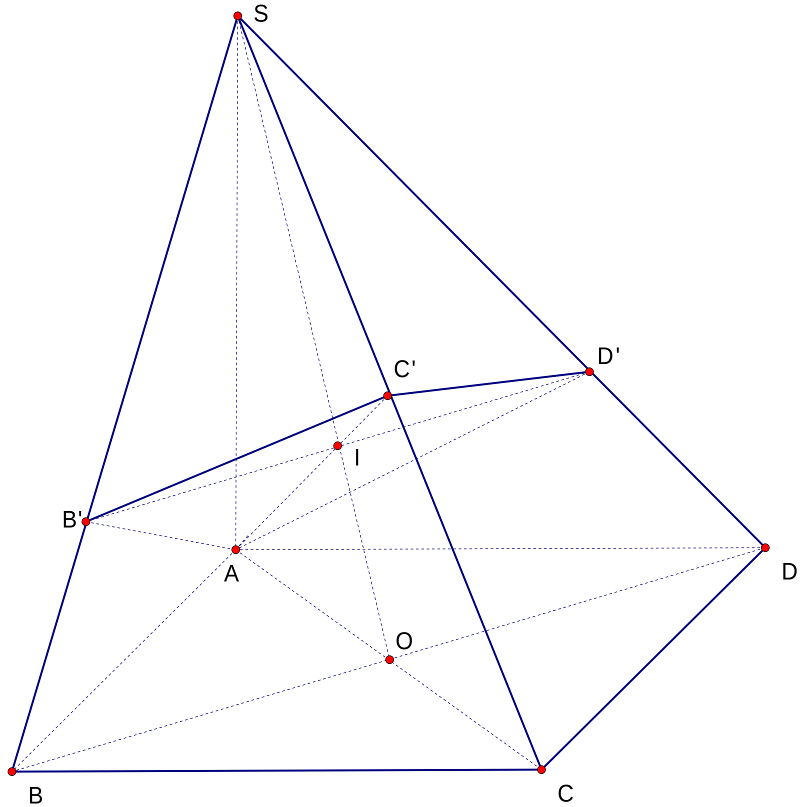
Mà ta có: $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{6}.SB'.SC'.A'H'.\sin BSC$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SB.SC.AH.sinBSC$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Quay trở lại với bài toán IV:



Gọi O là giao của AC và BD

SO cắt AC' tại I

Trong mặt phẳng (SBD), qua I kẻ đường thẳng song song với BD và cắt SB, SD lần lượt tại B', D'

Thì mặt phẳng (P) cần dựng chính là mặt phẳng (AB'C'D').

Mặt khác ta có: I là trọng tâm tam giác SAC $\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Và $B'D'//BD$

Áp dụng định lí thales ta có:

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$$

Theo tính chất đã chứng minh ở trên thì:

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}}=\frac{SA.SC'.SD'}{SA.SC.SD}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}}=\frac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{9}.SA.2S_{ABD}=\frac{1}{9}a.2.\frac{1}{2}.a.a.sin60^0=\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$$

Vậy $V_{S.AB'C'D'}=\dfrac{a^3}{6\sqrt{3}}$.

Câu V:

cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=12 \end{cases}$ chứng minh rằng: $a\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\sqrt[3]{a^2+b^2}\le 12$

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\sum \sqrt[3]{4a}.\sqrt[3]{2a^2}.\sqrt[3]{b^2+c^2}\le 24 \qquad (*)$$

Áp dụng AM-GM ta có: $VT(*)\le \sum \dfrac{4a+2a^2+b^2+c^2}{3}=\dfrac{4(a+b+c)}{3}+16$

Ta đi chứng minh:

$$\frac{4(a+b+c)}{3}+16\le 24$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với:

$a+b+c\le 6$.

Mà theo bất đẳng thức Cauchy-schwarz thì:

$a+b+c\le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=6$

Nên ta có điều phải chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu VI.B.1:

Gọi $K(x_K;y_K)$ là trung điểm của BC.

Vì G là trọng tâm ΔABC nên:

$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GK}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}=2(x_K-\frac{4}{3}) \\ -\frac{10}{3}=2(y_K-\frac{2}{3}) \end{cases}$$

$\Rightarrow K(2;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AO}=(0;-4)$

$AO\perp BC$.

Đường thẳng BC đi qua $K(2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AO}=(0;-4)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình là:

$BC: y+1=0$

Gọi $B(b;-1)$ và $C(c;-1)$ (với $b<c$)

Vì $K(2;-1)$ là trung điểm của BC nên:

$b+c=2x_K=4(1)$

Mà ta có:

$\overrightarrow{BO} = (-b;1)$

$\overrightarrow{AC} = (c;-5)$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BO} = 0$

$\Leftrightarrow -bc - 5 = 0$

$\Leftrightarrow bc = -5(2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} b = -1 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(-1;-1); C(5;-1)$

$BC = 6$

$d_{(A;BC)} = 5$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.BC.d_{(A;BC)} = \frac{1}{2}.6.5 = 15(dvdt)$

Vậy $B(-1;-1); C(5;-1)$ và $S_{ABC} = 15(dvdt)$.

Câu VI.B.2:

Gọi I là giao điểm của (d_1) và (d_2) thì tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1} (1) \\ 5x - 6y - 6z + 13 = 0 (2) \\ x - 6y + 6z - 7 = 0 (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) suy ra: $x = y$. Thế vào 2 phương trình còn lại ta được:

$$\begin{cases} -y-6z+13=0 \\ -5y+6z-7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

$\Rightarrow I(1;1;2)$.

Ta có: $\begin{matrix} \overrightarrow{u_{d_1}}=(2;2;1) \\ \overrightarrow{u_{d_2}}=(6;3;2) \end{matrix}$.

Gọi α là góc giữa 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) thì:

$$\cos\alpha = \frac{|6.2+3.2+2.1|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}.\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{20}{21}$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{41}}{21}$.

Gọi A;B là 2 điểm thỏa mãn thì:

$$S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.IB.sinIAB = \frac{1}{2}IA.IB.sin\alpha = IA.IB.\frac{\sqrt{41}}{42}$$

Mà $S_{IAB} = \frac{41}{42} \Rightarrow IA.IB = 1 \Rightarrow IA = IB = 1$ (vì ΔIAB cân tại I).

Suy ra A và B thuộc mặt cầu (T) có tâm I và bán kính R=1

$(T):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$.

Vì $A \in (d_1)$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1} (4) \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 1 (5) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra: $x = y = 2z-3$

Thế vào phương trình (5) ta được:

$$(5) \Leftrightarrow 2(2z-4)^2+(z-2)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{7}{3} \Rightarrow x=y=\frac{5}{3} \\ z=\frac{5}{3} \Rightarrow x=y=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$.

Vì $B \in (d_2)$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1(6) \\ 5x-6y-6z+13=0(7) \\ x-6y+6z-7=0(8) \end{cases}$$

Cộng từng vế của 2 phương trình (7) và (8) ta được:

$$x-2y+1=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{2}$$

Trừ từng vế của (7) cho (8) ta được:

$$4x-12z+20=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{x+5}{3}$$

Thay vào phương trình (6):

$$(6) \Leftrightarrow (x-1)^2+(\frac{x+1}{2}-1)^2+(\frac{x+5}{3}-2)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{36}{49}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{7}, y=\frac{10}{7}, z=\frac{16}{7} \\ x=\frac{1}{7}, y=\frac{4}{7}, z=\frac{12}{7} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 cặp điểm A;B thỏa mãn là:

$A(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3})$ và $B(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7})$;

$A(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3})$ và $B(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7})$;

$A(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3})$ và $B(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7})$;

$A(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3})$ và $B(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7})$.

Câu VIIB:

Gọi S là số cách chọn 8 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh

Gọi S_1 là số cách chọn 8 học sinh bất kì trong 18 học sinh thì $S_1 = C_{18}^8$.

Gọi S_2 là số cách chọn 8 học sinh sao cho không có học sinh khối 10 nào thì phải chọn 8 học sinh trong 13 học sinh lớp 11 và 12 nên $S_2 = C_{13}^8$.

Gọi S_3 là số cách chọn 8 học sinh và không có học sinh lớp 11 nào thì phải chọn 8 người trong 12 học sinh lớp 10 và 12 nên

$S_3 = C_{12}^8$

Gọi S_4 là số cách chọn 8 học sinh và không có học sinh lớp 12 nào thì phải chọn 8 học sinh trong 11 học sinh lớp 10 và 11 nên

$S_4 = C_{11}^8$

Vậy có $S = S_1 - S_2 - S_3 - S_4 = C_{18}^8 - C_{13}^8 - C_{12}^8 - C_{18}^8 = 43098$ cách chọn thỏa mãn.