TITU ANDREESCU
DORIN ANDRICA
Người dịch **LÊ LỄ (CĐSP NINH THUẬN)**

BÀI TẬP SỐ PHỨC

(98 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI)

LỜI GIỚI THIỆU

Như tên sách, ''Complex Numbers from A to Z'', nội dung nguyên bản phủ hầu khắp các vấn đề liên quan số phức: từ xây dựng trường số phức, số phức dạng lượng giác, đến hình học phức...

Người dịch chỉ chọn lọc một số vấn đề lý thuyết, bài tập cơ bản, nâng cao của số phức để giới thiệu bằng tiếng Việt, ngõ hầu phục vụ đối tượng bạn đọc là học sinh trung học phổ thông, sinh viên, người không chuyên làm toán với số phức.

Trong khả năng có thể, người dịch cố gắng dùng những thuật ngữ phổ biến nhất hiện nay. Tuy nhiên không thể không dùng những thuật ngữ nếu thiếu nó thì khó lòng diễn đạt các vấn đề về số phức.

Mọi việc dù muốn hay không, cũng có thể gây ra *thiếu, sót* (hạn chế *sai, lầm*). Mong các em học sinh, sinh viên và quý vị thông cảm.

Người dịch.

Mục lục[1]

[1] Có thể click chuột lên tiêu đề để nhảy đến nội dung tương ứng

1. Dạng đại số của số phức

1.1 Định nghĩa số phức

Xét $R^2 = R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$.

Hai phần tử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) bằng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

$\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

Tổng $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tích $z_1.z_2 = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Phép toán tìm tổng hai số phức gọi là phép cộng.

Phép toán tìm tích hai số phức gọi là phép nhân.

Ví dụ 1.

a) $z_1 = (-5, 6), z_2 = (1, -2)$

$$z_1 + z_2 = (-5, 6) + (1, -2) = (-4, 4).$$

$$z_1z_2 = (-5, 6)(1, -2) = (-5 + 12, 10 + 6) = (7, 16).$$

b) $z_1 = (-\frac{1}{2}, 1), z_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$$z_1 + z_2 = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}) = (-\frac{5}{6}, \frac{3}{2})$$

$$z_1z_2 = (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3}, -\frac{7}{12})$$

Định nghĩa. Tập $\mathbb{R}^2$, cùng với phép cộng và nhân ở trên gọi là tập số phức $\mathbb{C}$. Phần tử $(x,y) \in \mathbb{C}$ gọi là một số phức.

1.2 Tính chất phép cộng

(1) Giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in C$.

(2) Kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

(3) Tồn tại phần tử không: $\exists 0 = (0, 0) \in C, z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in C$.

(4) Mọi số có số đối: $\forall z \in C, \exists -z \in C : z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Số $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$: hiệu của hai số z_1, z_2. Phép toán tìm hiệu hai số gọi là phép trừ,

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{C}.$$

1.3 Tính chất phép nhân

(1) Giao hoán: $z_1.z_2 = z_2.z_1, \forall z_1, z_2 \in C$.

(2) Kết hợp: $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

(3) Tồn tại phần tử đơn vị: $\exists 1 = (0,1) \in C, z.1 = 1.z = z, \forall z \in C$.

(4) Mọi số khác 0 có số nghịch đảo: $\forall z \in C^*, \exists z^{-1} \in C : z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$.

Giả sử $z = (x, y) \in C^*$, để tìm $z^{-1} = (x', y')$,

$(x, y).(x', y') = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases}$. Giải hệ, cho ta

$x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, y' = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Vậy

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2})$$

Thương hai số $z_1 = (x_1, y_1), z = (x, y) \in \mathbb{C}^*$ là

$$\frac{z_1}{z} = z_1.z^{-1} = (x_1, y_1).(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}) = (\frac{x_1 x + y_1 y}{x^2 + y^2}, \frac{-x_1 y + y_1 x}{x^2 + y^2}) \in C.$$

Phép toán tìm thương hai số phức gọi là phép chia.

Ví dụ 2.

a) Nếu $z = (1,2)$ thì

$$z^{-1} = (\frac{1}{1^2 + 2^2}, \frac{-2}{1^2 + 2^2}) = (\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}).$$

b) Nếu $z_1 = (1,2), z_2 = (3,4)$ thì

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{3+8}{9+16}, \frac{-4+6}{9+16}) = (\frac{11}{25}, \frac{2}{25}).$$

Lũy thừa số mũ nguyên của số phức: $z \in \mathbb{C}^*$,

$z^0 = 1; \quad z^1 = z; \quad z^2 = z.z; \quad z^n = \underbrace{z.z.\ldots z}_{n}$, n nguyên dương.

$$z^n = (z^{-1})^{-n}, \text{ n nguyên âm.}$$

$$0^n = 0, \text{ mọi n nguyên dương.}$$

(5) Tính phân phối của phép nhân với phép cộng:

$$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in C$$

Những tính chất trên của phép nhân và cộng, chứng tỏ ℂ cùng hai phép toán cộng và nhân là một trường.

1.4 Dạng đại số của số phức

Dạng đại số của số phức được nghiên cứu sau đây:

Xét song ánh[2]

$$f : R \to R \times \{0\},\ f(x) = (x,0).$$

Hơn nữa

$$(x,0) + (y,0) = (x + y,0);\ (x,0).(y,0) = (xy,0).$$

Ta đồng nhất

(x,0)=x.

Đặt i=(0,1)

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (y,0).(0,1)$$
$$= x + yi = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

Định lý . Số phức bất kỳ z=(x,y) được biểu diễn duy nhất dạng z=x+yi, x,y∈ ℝ , trong đó i^2=-1.

Hệ thức i^2=-1, được suy từ định nghĩa phép nhân :

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Biểu thức x+yi gọi là dạng đại số của số phức z=(x,y). Do đó:

$$C = \{x + yi \mid x \in R, y \in R, i^2 = -1\}.$$

x=Re(z): phần thực của z. y=Im(z): phần ảo của z. Đơn vị ảo là i.

(1) Tổng hai số phức

$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \in C$.

Tổng hai số phức là một số phức , mà phần thực (phần ảo) của nó bằng tổng hai phần thực (phần ảo) của hai số đã cho.

(2) Tích hai số phức

$z_1.z_2 = (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \in C$.

(3) Hiệu hai số phức

$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \in C$.

Hiệu hai số phức là một số phức , mà phần thục (phần ảo) của nó bằng hiệu hai phần thực(phần ảo) của hai số phức đã cho.

Khi thực hành cộng, trừ , nhân số phức thực hiện tương tự quy tắc tính đa thức chỉ cần lưu ý $i^2 = -1$ là đủ.

Ví dụ 3.

a) $z_1 = -5 + 6i, z_2 = 1 - 2i$

$$z_1 + z_2 = (-5 + 6i) + (1 - 2i) = -4 + 4i.$$

$$z_1 z_2 = (-5 + 6i)(1 - 2i) = -5 + 12 + (10 + 6)i = 7 + 16i.$$

b) $z_1 = -\dfrac{1}{2} + i, z_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}i$

---

[2] f là một đẳng cấu

$$z_1 + z_2 = (-\frac{1}{2} + i) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + (1 + \frac{1}{2})i = -\frac{5}{6} + \frac{3}{2}i$$

$$z_1 z_2 = (-\frac{1}{2} + i)(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{3})i = -\frac{1}{3} - \frac{7}{12}i.$$

1.5 Lũy thừa của đơn vị ảo i

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2.i = -i,$$

$$i^4 = i^3.i = 1; \quad i^5 = i^4.i = i; \quad i^6 = i^5.i = -1; \quad i^7 = i^6.i = -i$$

Bằng quy nạp được :

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó

$$i^n \in \{-1, 1, -i, i\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nếu n nguyên âm , có

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = (\frac{1}{i})^{-n} = (-i)^{-n}.$$

Ví dụ 4.

a) $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34} = i^{4.26+1} + i^{4.5+3} + i^{4.5} - i^{4.8+2} = i - i + 1 + 1 = 2$.

b) Giải phương trình : $z^3 = 18 + 26i, \; z = x + yi, \; x, y \in Z$.

Ta có

$$(x + yi)^3 = (x + yi)^2(x + yi) = (x^2 - y^2 + 2xyi)(x + yi)$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i.$$

Sử dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau, được:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Đặt y=tx, $18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$ (cho ta x≠ 0 và y≠ 0)

$$\Rightarrow 18(3t - t^3) = 26(1 - 3t^2) \Rightarrow (3t - 1)(3t^2 - 12t - 13) = 0.$$

Nghiệm hữu tỷ của phương trình là t=1/3. Do đó

x=3, y=1⇒ z=3+i.

1.6 Số phức liên hợp

Cho z=x+yi. Số phức $\overline{z} = x - yi$ gọi là số phức liên hợp của z.

Định lý.

(1) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in R$,

(2) $z = \overline{\overline{z}}$,

(3) $z.\overline{z}$ là số thực không âm,

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

(5) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$,

(6) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1},\ z \in C^*$,

(7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \in C^*$,

(8) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im(z)}=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Chứng minh.

(1) $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi.$

Do đó 2yi=0⇒ y=0⇒ z=x∈ ℝ .

(2) $\overline{z} = x - yi, \overline{\overline{z}} = x + yi = z.$

(3) $z.\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 \geq 0$

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i} = (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i$

$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(5) $\overline{z_1.z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1}\overline{z_2}$.

(6) $z.\dfrac{1}{z} = 1 \Rightarrow \overline{(z.\dfrac{1}{z})} = \overline{1} \Rightarrow \overline{z}.\overline{(\dfrac{1}{z})} = 1,$

tức là $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}.$

(7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{(z_1.\dfrac{1}{z_2})} = \overline{z_1}.\overline{(\dfrac{1}{z_2})} = \overline{z_1}.\dfrac{1}{\overline{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

(8) $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x.$

$z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi.$

Do đó: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im(z)}=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Lưu ý.

a) Việc tính số nghịch đảo của số phức khác 0, được tiến hành:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

b) Tính thương hai số phức:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} + \frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}i$$

Khi thực hành tìm số nghịch đảo, tìm thương thực hiện tương tự quy tắc tính đa thức chỉ cần lưu ý $i^2 = -1$ là đủ.

Ví dụ 5.

a) Tìm số nghịch đảo của $z = 10 + 8i$.

$$z^{-1} = (10+8i)^{-1} = \frac{1}{10+8i} = \frac{1(10-8i)}{(10+8i)(10-8i)} = \frac{10-8i}{10^2+8^2}$$

$$= \frac{10-8i}{164} = \frac{5}{82} - \frac{2}{41}i$$

b) Tính $z = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$.

$$z = \frac{(5+5i)(3+4i)}{9-16i^2} + \frac{20(4-3i)}{16-9i^2} = \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25}.$$

$$= \frac{75-25i}{25} = 3 - i.$$

c) Cho $z_1, z_2 \in C$. Chứng tỏ $E = z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2$ là một số thực

$$\overline{E} = \overline{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2} = \overline{z_1}z_2 + z_1.\overline{z_2} = E \Rightarrow E \in R.$$

1.7 Môđun của số phức

Số $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là Môđun của số phức z=x+yi.

Ví dụ 6. Cho

$$z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = -3i,\ z_3 = 2,$$

$$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = 5, |z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3, |z_3| = \sqrt{2^2} = 2.$$

Định lý.

(1) $-|z| \le Re(z) \le |z|, -|z| \le Im(z) \le |z|$.

(2) $|z| \ge 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

(3) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(4) $z.\overline{z} = z^2$.

(5) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(6) $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

(7) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \in C^*$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \in C^*$.

(9) $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Chứng minh

Dễ kiểm tra (1)-(4) đúng

(5) $|z_1.z_2|^2 = (z_1.z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1.\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

(6) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2$

Bởi vì $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$, kéo theo

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\Re e(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|.$$

Do đó

$$|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2. \text{ Nên } |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

Bất đẳng thức bên trái có được do:

$$|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \le |z_1+z_2| + |-z_2| = |z_1+z_2| + |z_2|$$

$$\Rightarrow |z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2|$$

(7) $z.\dfrac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z|.\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Nên

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \in C^*.$$

(8) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_1\dfrac{1}{z_2}| = |z_1 z_2^{-1}| = |z_1||z_2^{-1}| = |z_1||z_2|^{-1} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(9) $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$ Nên $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$.

Mặt khác

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Bất đẳng thức $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ là đẳng thức $\Leftrightarrow Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1||z_2|$,
tức là $z_1 = tz_2$, t là số thực không âm.

Bài tập 1. Chứng minh

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Lời giải. Sử dụng tính chất (4),

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$
$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2$$
$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Bài tập 2. Chứng minh nếu $|z_1| = |z_2| = 1, z_1 z_2 \ne 1$ thì $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ là số thực.

Lời giải. Sử dụng tính chất (4),

$$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2=1, \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}.$$

Tương tự, $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$, đặt số trên là A,

$$\overline{A}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=A.$$

Vậy A là số thực.

Bài tập 3. Cho a là số thực dương và đặt

$$M_0=\left\{z\in C^*, |z+\frac{1}{z}|=a\right\}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của |z| khi z∈ M_0.

Lời giải.

$$a^2=|z+\frac{1}{z}|^2=(z+\frac{1}{z})(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}})=|z|^2+\frac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^2}$$

$$=\frac{|z|^4+(z+\overline{z})^2-2|z|^2+1}{|z|^2}.$$

Do đó

$$|z|^4-|z|^2(a^2+2)+1=-(z+\overline{z})^2\le 0.$$

$$\Rightarrow |z|^2\in[\frac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2};\frac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}]$$

$$\Rightarrow |z|\in[\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2};\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}].$$

$$\max|z|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \min|z|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow z\in M, z=-\overline{z}.$$

Bài tập 4. Chứng minh mọi số phức z,

$$|z+1|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{hoặc } |z^2+1|\ge 1.$$

Lời giải. Phản chứng

$$|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ và } |z^2+1|<1.$$

Đặt z=a+bi⇒ $z^2=a^2-b^2+2abi.$

$$(1+a^2-b^2)^2+4a^2b^2<1,(1+a)^2+b^2<\frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)^2+2(a^2-b^2)<0,2(a^2+b^2)+4a+1<0.$$

Cộng các bất đẳng thức được

$$(a^2+b^2)^2+(2a+1)^2<0.\text{Mâu thuẫn}$$

Bài tập 5. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{7}{2}}\le|1+z|+|1-z+z^2|\le 3\sqrt{\frac{7}{6}},\ \forall\ z, |z|=1.$$

Lời giải. Đặt

$$t=|1+z|\in[0;2].$$

$$t^2=(1+z)(1+\overline{z})=2+2Re(z)\Rightarrow Re(z)=\frac{t^2-2}{2}.$$

Khi đó $|1-z+z^2|=\sqrt{|7-2t^2|}$. Xét hàm số

$$f:[0;2]\to R,\ f(t)=t+\sqrt{|7-2t^2|}.$$

Được

$$f(\sqrt{\frac{7}{2}})=\sqrt{\frac{7}{2}}\le t+\sqrt{|7-2t^2|}\le f(\sqrt{\frac{7}{6}})=3\sqrt{\frac{7}{6}}.$$

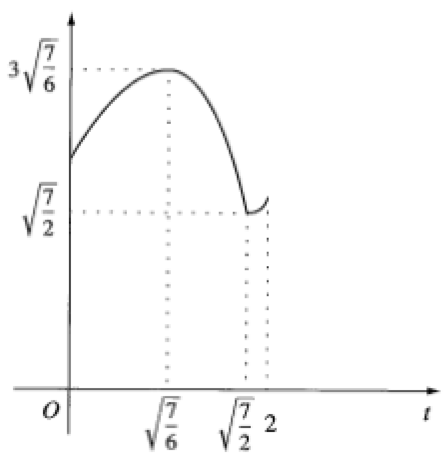

Figure 1.1.

Bài tập 6. Xét

$$H=\{z\in C, z=x-1+xi, x\in R\}.$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số phức $z\in H, |z|\le|w|, \forall w\in H.$

Lời giải. Đặt

$$\omega=y-1+yi, y\in R.$$

Là đủ nếu chứng minh được ,tồn tại số thực duy nhất x sao cho

$$(x-1)^2+x^2\le (y-1)^2+y^2, \forall\, y\in R.$$

Nói cách khác , x là điểm cực tiểu hàm số

$$f:R\to R, f(y)=(y-1)^2+y^2=2y^2-2y+1=2(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2},$$

Do đó điểm cự tiểu là

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Bài tập 7. Cho x,y,z là các số phức phân biệt sao cho

$$y=tx+(1-t)z, t\in(0;1).$$

Chứng minh rằng

$$\frac{|z|-|y|}{|z-y|}\ge\frac{|z|-|x|}{|z-x|}\ge\frac{|y|-|x|}{|y-x|}.$$

Lời giải. Từ hệ thức $y=tx+(1-t)z$,

$$z-y=t(z-x).$$

Bất đẳng thức

$$\frac{|z|-|y|}{|z-y|}\ge\frac{|z|-|x|}{|z-x|}.$$

trở thành

$$|z|-|y|\ge t(|z|-|x|),$$

hay

$$|y|\le(1-t)|z|+t|x|.$$

Vận dụng bất đẳng thức tam giác cho

$y=(1-t)z+tx$, ta có kết quả.

Bất đẳng thức thứ hai , được chứng minh tương tự, bởi

$$y=tx+(1-t)z$$

tương đương với

$$y-x=(1-t)(z-x).$$

1.8 Giải phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai với hệ số thực

$$ax^2+bx+c=0, a\ne 0$$

vẫn có nghiệm phức trong cả trường hợp biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ âm.

Phân tích vế trái

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a^2}]=0$$

$$\text{hay } (x+\frac{b}{2a})^2 - i^2(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2 = 0.$$

Do đó $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Rõ ràng hai nghiệm là hai số phức liên hợp và phân tích nhân tử được

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

trong cả trường hợp Δ<0.

Bây giờ xét phương trình bậc hai với hệ số phức

$$az^2+bz+c=0, a\neq 0$$

Sử dụng phân tích như trên , được

$$a[(z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0$$

$$\Rightarrow (z+\frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ hay}$$

$$(2az+b)^2 = \Delta,$$

Đặt y=2az+b, phương trình trở thành

$$y^2 = \Delta = u+vi, \text{ u,v}\in\mathbb{R}$$

Phương trình có nghiệm

$$y_{1,2} = \pm(\sqrt{\frac{r+u}{2}} + (sgnv)\sqrt{\frac{r+u}{2}}\, i).$$

ở đây r=|Δ| và sgnv là dấu của v.Vậy nghiệm phương trình ban đầu là

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b+y_{1,2}).$$

Quan hệ nghiệm và hệ số

$$z_1+z_2 = -\frac{b}{2a}, z_1z_2 = \frac{c}{a},$$

Và luôn có phân tích nhân tử

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2).$$

Bài tập 8. Giải phương trình hệ số phức

$$z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0.$$

Lời giải.

$$\Delta' = (4-4i)^2 - (63-16i) = -63-16i$$

$$r = |\Delta'| = \sqrt{63^2 + 16^2} = 65.$$

Phương trình

$$y^2 = -63 - 16i$$

Có nghiệm $y_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{65-63}{2}} + i\sqrt{\frac{65+63}{2}}\right) = \pm(1-8i)$. Kéo theo

$$z_{1,2} = 4 - 4i \pm (1-8i).$$

Do đó $z_1 = 5 - 12i,\ z_2 = 3 + 4i$

Ta có thể dùng cách khác để giải phương trình bậc hai trên.

$$\Delta' = (4-4i)^2 - (63-16i) = -63 - 16i$$

Tìm hai căn bậc hai của $-63-16i$, tức là tìm $z = x + yi,\quad z^2 = -63 - 16i$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -63 - 16i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -63 \\ xy = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp 8 \end{cases}.$$

Δ' có hai căn bậc hai là 1-8i, -1+8i.

Phương trình có hai nghiệm

$$z_1 = 4(1-i) + (1-8i) = 5 - 12i,$$
$$z_2 = 4(1-i) - (1-8i) = 3 + 4i$$

Bài tập 9. Cho p, q là hai số phức , q≠ 0. Chứng minh rằng nếu các nghiệm phương trình bậc hai $x^2 + px + q = 0$ có Môđun bằng nhau, thì $\frac{p}{q}$ là một số thực

Lời giải. gọi x_1, x_2 là các nghiệm phương trình và $r = |x_1| = |x_2|$. Khi đó

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{x_1\overline{x_2}}{r^2} + \frac{x_2\overline{x_1}}{r^2} + 2 = 2 + \frac{2}{r^2}Re(x_1\overline{x_2})$$

Là số thực. Hơn nữa

$$\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2}) \ge -|x_1\overline{x_2}| = -r^2, \text{ do đó } \frac{p^2}{q^2} \ge 0.$$

Vậy $\frac{p}{q}$ là một số thực.

Bài tập 10. Cho a,b,c là ba số phức khác 0 phân biệt với |a|=|b|=|c|.

a) Chứng minh rằng nếu một nghiệm phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có Môđun bằng 1 thì b^2=ac.

b) Nếu mỗi phương trình

$az^2 + bz + c = 0, bz^2 + cz + a = 0$ có một nghiệm có Môđun bằng 1 thì

|a-b|=|b-c|=|c-a|.

Lời giải.

a) gọi z_1, z_2 là các nghiệm phương trình với $|z_1|=1$. Từ $z_2 = \frac{c}{a}.\frac{1}{z_1}$ kéo theo $|z_2| = |\frac{c}{a}|.\frac{1}{|z_1|} = 1$. Bởi vì $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, |a| = |b|,$ ta có $|z_1 + z_2|^2 = 1.$ Hệ thức tương đương với

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 1, \text{ tức là } (z_1 + z_2)(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}) = 1.$$

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2, \text{ hay } (-\frac{b}{a})^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow b^2 = ac.$$

b) Theo câu a) $b^2 = ac, c^2 = ab$. Nhân các hệ thức được $b^2c^2 = a^2bc \Rightarrow a^2 = bc.$ Do đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Hệ thức tương đương với

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0,$$

Tức là

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) + (c-a)^2 = 2(a-b)(b-c).$$

Kéo theo $(a-c)^2 = (a-b)(b-c)$. Lấy giá trị tuyệt đối, được $\beta^2 = \gamma\alpha$,
ở đây $\alpha = |b-c|, \beta = |c-a|, \gamma = |a-b|$. Tương tự được $\alpha^2 = \beta\gamma, \gamma^2 = \alpha\beta$. Cộng các hệ thức, được

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Tức là $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$. Do đó $\alpha=\beta=\gamma$.

1.9 Bài tập

1. Cho các số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -2 + 3i, z_3 = 1 - i$. Tính
   a) $z_1 + z_2 + z_3$,
   b) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$,
   c) $z_1z_2z_3$,
   d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$,
   e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$,
   f) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$.
2. Giải phương trình
   a) $z - 5 + 7i = 2 - i;$

b) $2+3i+z=-5-i$;

c) $z(2+3i)=4+5i$;

d) $\dfrac{z}{-1+3i}=3+2i$.

3. Trong C, giải phương trình sau

a) $z^2+z+1=0$;

b) $z^3+1=0$.

4. Cho z=i. Tính $\sum_{k=0}^{n} z^k$, tùy theo số nguyên dương n .

5. Giải phương trình

a) $z(1+2i)=-1+3i$;

b) $(1+i)z^2=-1+7i$.

6. Cho z=a+bi. Tính z^2, z^3, z^4.

7. Cho $z_0=a+bi$. Tìm z∈ C sao cho $z^2=z_0$.

8. Cho z=1-i. Tính z^n, n nguyên dương.

9. Tìm các số thực x, y sao xho

a) $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i$;

b) $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i$;

c) $(4-3i)x^2+(3+2i)xy=4y^2-\dfrac{1}{2}x^2+(3xy-2y^2)i$.

10. Tính

a) $(2-i)(-3+2i)(5-4i)$;

b) $(2-4i)(5+2i)+(3+4i)(-6-i)$;

c) $(\dfrac{1+i}{1-i})^{16}+(\dfrac{1-i}{1+i})^{8}$;

d) $(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{6}+(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2})^{6}$;

e) $\dfrac{3+7i}{2+3i}+\dfrac{5-8i}{2-3i}$.

11. Tính

a) $i^{2000}+i^{1999}+i^{201}+i^{82}+i^{47}$;

b) $E_n=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^n$; n≥ 1;

c) $i^1.i^2.i^3\ldots i^{2000}$;

d) $i^{-5}+(-i)^{-7}+(-i)^{13}+i^{-100}+(-i)^{94}$;

12. Giải phương trình
   a) $z^2=i$;
   b) $z^2=-i$;
   c) $z^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
13. Tìm các số phức z≠ 0 sao cho $z+\frac{1}{z}\in R$
14. Chứng minh rằng
   a) $E_1=(2+i\sqrt{5})^7+(2-i\sqrt{5})^7\in R$;
   b) $E_2=\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n\in R$.
15. Chứng minh
   a) $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$;
   b) $|1+z_1\overline{z_2}|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$;
   c) $|1-z_1\overline{z_2}|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$;
   d) $|z_1+z_2+z_3|^2+|-z_1+z_2+z_3|^2+|z_1-z_2+z_3|^2+|z_1+z_2-z_3|^2$
   $=4(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2)^2$.
16. Cho $z\in C^*, |z^3+\frac{1}{z^3}|\le 2$. Chứng minh $|z+\frac{1}{z}|\le 2$.
17. Tìm tất cả các số phức z sao cho
$$|z|=1, |z^2+\overline{z}^2|=1.$$
18. Tìm tất cả các số phức z sao cho
$$4z^2+8|z|^2=8.$$
19. Tìm tất cả các số phức z sao cho $z^3=\overline{z}$.
20. Xét z∈ ℂ , Re(z)>1. Chứng minh
$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$
21. Cho các số thực a,b và $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính
$$(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$
22. Giải phương trình
   a) $|z|-2z=3-4i$;

b) $|z|+z=3+4i;$

c) $z^3=2+11i, z=x+yi, x,y\in Z$

d) $iz^2+(1+2i)z+1=0;$

e) $z^4+6(1+i)z^2+5+6i=0;$

f) $(1+i)z^2+2+11i=0.$

23. Tìm tất cả các số thực m sao cho phương trình
$$z^3+(3+i)z^2-3z-(m+i)=0$$
Có ít nhất một nghiệm thực.

24. Tìm tất cả các số phức z sao cho
$$z'=(z-2)(\overline{z}+i)$$
là số thực.

25. Tìm tất cả số phức z sao cho $|z|=|\frac{1}{z}|$.

26. Cho $z_1,z_2\in C$, sao cho $|z_1+z_2|=\sqrt{3}, |z_1|=|z_2|=1$. Tính $|z_1-z_2|$.

27. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho
$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

28. Cho số nguyên n>2. Tìm số nghiệm phương trình
$$z^{n-1}=i\overline{z}\,.$$

29. Cho z_1,z_2,z_3 là ba số phức $|z_1|=|z_2|=|z_3|=R>0$.
Chứng minh
$$|z_1-z_2||z_2-z_3|+|z_3-z_1||z_1-z_2|+|z_2-z_3||z_3-z_1|\le 9R^2.$$

30. Cho u,v,w là ba số phức $|u|<1, |v|=1, w=\frac{v(u-z)}{\overline{u}.z-1}$. Chứng minh $|w|\le 1 \Leftrightarrow |z|\le 1$.

31. Cho z_1,z_2,z_3 là ba số phức sao cho
$$z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$
Chứng minh
$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0\,.$$

32. Cho các số phức $z_1,z_2,\ldots,z_n$ sao cho
$$|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=r>0$$
Chứng tỏ
$E=\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots z_n}$ là số thực.

33. Cho các số phức phân biệt z_1,z_2,z_3 sao cho

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$$

Nếu $z_1 + z_2z_3, z_2 + z_3z_1, z_3 + z_1z_2$ là các số thực, chứng tỏ $z_1z_2z_3 = 1$.

34. Cho x_1, x_2 là các nghiệm phương trình $x^2 - x + 1 = 0$. Tính
    a) $x_1^{2000} + x_2^{2000}$;
    b) $x_1^{1999} + x_2^{1999}$;
    c) $x_1^n + x_2^n; n \in N$.
35. Phân tích thành tích các đa thức bậc nhất các đa thức
    a) $x^4 + 16$;
    b) $x^3 - 27$;
    c) $x^3 + 8$;
    d) $x^4 + x^2 + 1$.
36. Tìm tất cả các phương trình bậc hai hệ số thực có một trong các nghiệm sau
    a) $(2+i)(3-i)$;
    b) $\frac{5+i}{2-i}$;
    c) $i^{51} + 2i^{80} + 3i^{45} + 4i^{38}$.
37. (Bất đẳng thức Hlawka) chứng minh
    $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|, z_1, z_2, z_3 \in C$

1.10 Đáp số và hướng dẫn

1. a) $z_1 + z_2 + z_3 = (0, 4)$; b) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = (-4, 5)$;
c) $z_1z_2z_3 = (-9, 7)$; d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (-8, -10)$;
e) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = \left(-\dfrac{311}{130}, \dfrac{65}{83}\right)$; f) $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2} = \left(\dfrac{152}{221}, -\dfrac{72}{221}\right)$.

2. a) $z = (7, -8)$; b) $z = (-7, -4)$;
c) $z = \left(\dfrac{23}{13}, -\dfrac{2}{13}\right)$; d) $z = (-9, 7)$.

3. a) $z_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), z_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
b) $z_1 = (-1, 0), z_2 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), z_3 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. $$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} (1, 0), & \text{for} \quad n = 4k; \\ (1, 1), & \text{for} \quad n = 4k + 1; \\ (0, 1), & \text{for} \quad n = 4k + 2; \\ (0, 0), & \text{for} \quad n = 4k + 3. \end{cases}$$

5. a) $z = (1, 1)$; b) $z_1 = (2, 1), z_2 = (-2, -1)$.

6. $z^2 = (a^2 - b^2, 2ab)$; $z^3 = (a^3 - 3ab^2, 3a^2b - b^3)$;
$z^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4, 4a^3b - 4ab^3)$.

7. $$z_1 = \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},\ \operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right),$$
$$z_2 = \left(-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},\ -\operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

8. Với mọi số nguyên k không âm, ta có

$z^{4k} = ((-4)^k, 0)$; $z^{4k+1} = ((-4)^k, -(-4)^k)$; $z^{4k+2} = (0, -2(-4)^k)$;

$z^{4k+3} = (-2(-4)^k, -2(-4)^k)$; for $k \geq 0$.

9. a) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}$; b) $x = -2, y = 8$; c) $x = 0, y = 0$.

10. a) $8 + 51i$; b) $4 - 43i$; c) 2; d) $\frac{11}{4} - \frac{5\sqrt{7}}{2}i$; e) $\frac{61}{13} + \frac{4}{13}i$.

11. a) $-i$; b) $E_{4k} = 1, E_{4k+1} = 1 + i, E_{4k+2} = i, E_{4k+3} = 0$; c) 1; d) $-3i$.

12. a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $z_{1,2} = \pm\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}i\right)$.

13. $z \in \mathbb{R}$ or $z = x + iy$ with $x^2 + y^2 = 1$.

14. a) $\overline{E}_1 = E_1$;

b) $\overline{E}_2 = E_2$.

21. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

22. a) $z_{1,2} = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} + 2i$; b) $z = -\frac{7}{6} + 4i$; c) $z = 2 + i$;

d) $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; e) $z^2 = -1, z^2 = -5 - 6i$; f) $z^2 = -\frac{13}{2} - \frac{9}{2}i$.

23. $m \in \{1, 5\}$.

24. $z = -2y + 2 + iy, y \in \mathbb{R}$.

35. a) $x^4 + 16 = x^4 + 2^4 = (x^2 + 4i)(x^2 - 4i)$

$$= [x^2 + (\sqrt{2}(1+i))^2][x^2 - (\sqrt{2}(1+i))^2]$$

$$= (x + \sqrt{2}(-1+i))(x + \sqrt{2}(1-i))(x - \sqrt{2}(1+i))(x + \sqrt{2}(1+i)).$$

b) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x-3\varepsilon)(x-3\varepsilon^2)$, where $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$.

d) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - \varepsilon)(x^2 - \varepsilon^2) = (x^2 - \varepsilon^{-2})(x^2 - \varepsilon^2)$

$$= (x - \varepsilon)(x + \varepsilon)(x - \overline{\varepsilon})(x + \overline{\varepsilon}), \text{ where } \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

36. a) $x^2 - 14x + 50 = 0$; b) $x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{26}{5} = 0$; c) $x^2 + 4x + 8 = 0$.

37.

$$2|z_1+z_2|.|z_2+z_3|=2|z_2(z_1+z_2+z_3)+z_1z_3|\le 2|z_2|.|z_1+z_2+z_3|+2|z_1||z_3|$$

$$2|z_2+z_3|.|z_3+z_1|\le 2|z_3|.|z_1+z_2+z_3|+2|z_2||z_1|$$

$$2|z_3+z_1|.|z_1+z_2|\le 2|z_1|.|z_1+z_2+z_3|+2|z_2||z_3|$$

Cộng các bất đẳng thức với

$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$$

có điều phải chứng minh.

2. Biểu diễn hình học của số phức

2.1 *Biểu diễn hình học của số phức*

Định nghĩa. Điểm M(x,y) trên mặt phẳng Oxy gọi là điểm biểu diễn hình học của số phức z=x+yi. Số phức z=x+yi gọi là tọa độ phức của điểm M(x,y). ta dùng ký hiệu M(z) để chỉ tọa độ phức của M là z.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức như trên gọi là mặt phẳng phức.

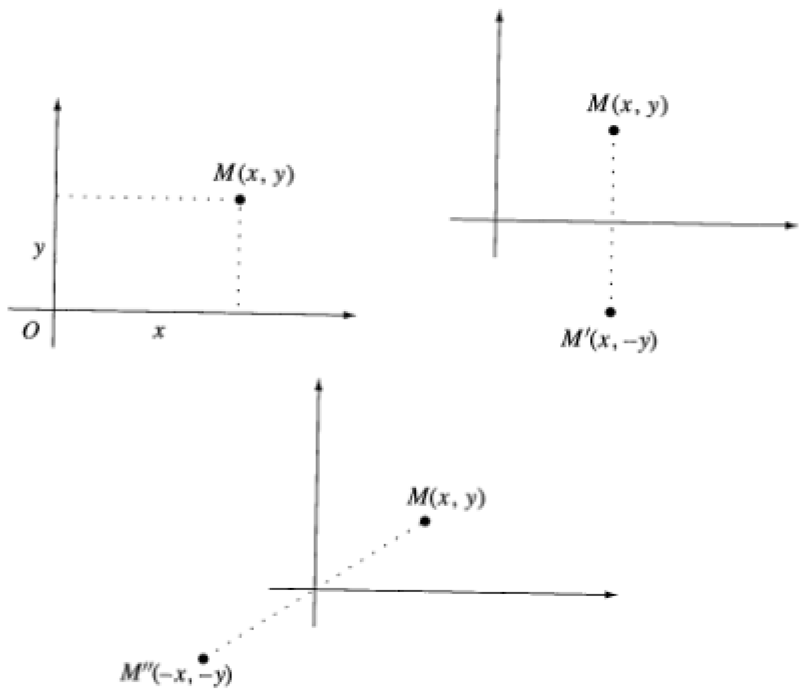

Figure 1.2.

Các điểm M,M' (tương ứng với $z, \overline{z}$) đối xứng nhau qua Ox.

Các điểm M,M'' (tương ứng với $z, -z$) đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

Mặt khác, ta có thể đồng nhất số phức z=x+yi với $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, M(x,y) .

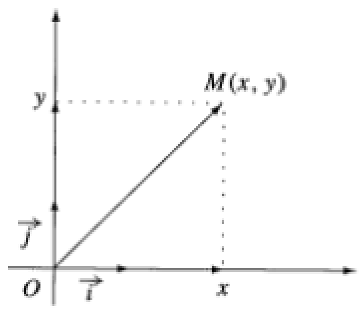

Figure 1.3.

2.2 *Biểu diễn hình học của Môđun*

$z = x + yi. OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Khoảng cách từ M(z) đến O là Môđun của số phức z.

Lưu ý.

a) Với số thực dương r, tập các số phức với Môđun r biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn $\mathfrak{C}$ (O;r).

b) Các số phức z, |z|<r là các điểm nằm trong đường tròn $\mathfrak{C}$ (O;r). Các số phức z, |z|>r là các điểm nằm ngoài đường tròn $\mathfrak{C}$ (O;r).

Ví dụ 7. Các số phức $z_k = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, k = 1,2,3,4$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi bốn điểm trên đường tròn đơn vị tâm O. Bởi vì

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

2.3 *Biểu diễn hình học các phép toán*

(1) Phép toán cộng và nhân. Xét số phức $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ và các vectơ tương ứng $\overrightarrow{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \overrightarrow{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

Tổng hai số phức

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Tổng hai vectơ

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Tổng $z_1 + z_2$ tương ứng với vectơ tổng $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

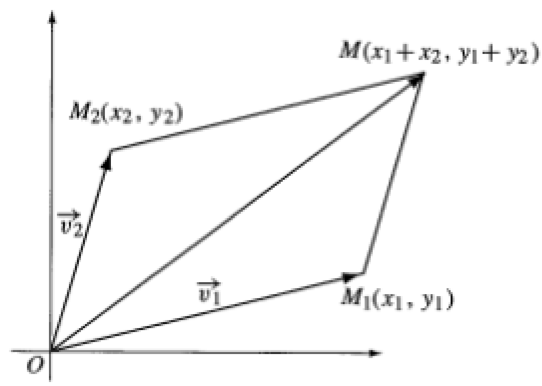

Figure 1.4.

Ví dụ 8.

a) $(3+5i)+(6+i)=9+6i$: biểu diễn hình học của tổng ở hình 1.5.

b) $(6-2i)+(-2+5i)=4+3i$: biểu diễn hình học ở hình 1.6.

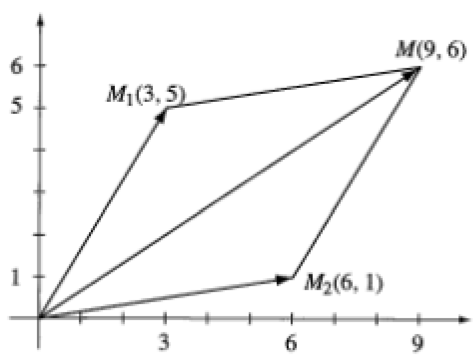

Figure 1.5.

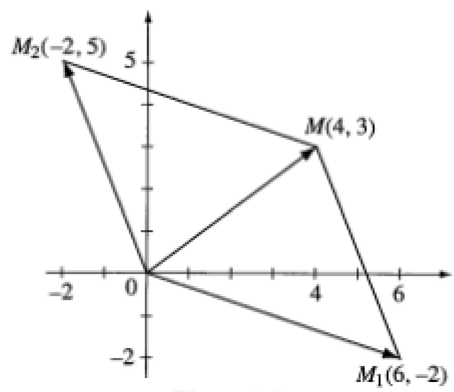

Figure 1.6.

Tương tự, hiệu $z_1 - z_2$ tương ứng với vectơ $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$

c) Ta có $(-3+i)-(2+3i)=(-3+i)+(-2-3i)=-5-2i$, hình 1.7.

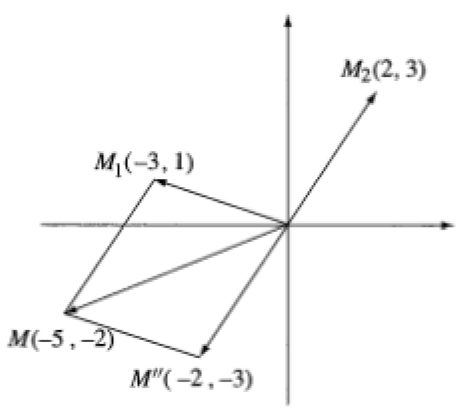

Figure 1.7.

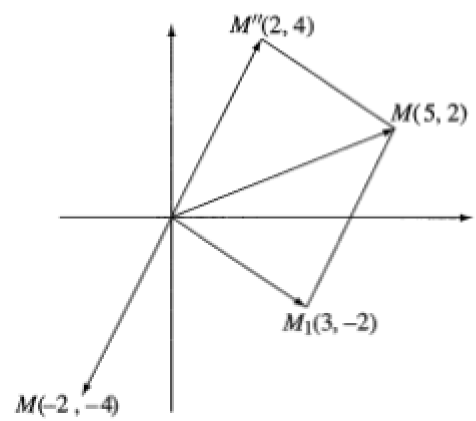

Figure 1.8.

d) $(3-2i)-(-2-4i)=(3-2i)+(2+4i)=5+2i$, hình 1.8.

Khoảng cách hai điểm $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ bằng Môđun của số phức $z_1 - z_2$ bằng độ dài vectơ $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$.

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(2) Tích của số phức với số thực. Xét số phức z=x+yi và vectơ tương ứng $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Nếu λ là số thực thì tích λ z=λ x+λyi tương ứng với vectơ

$$\lambda\vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}.$$

Nếu λ >0 thì $\lambda\vec{v}, \vec{v}$ cùng hướng và

$$|\lambda\vec{v}| = \lambda|\vec{v}|.$$

Nếu λ<0 thì $\lambda\vec{v}, \vec{v}$ ngược hướng và

$$|\lambda\vec{v}| = -\lambda|\vec{v}|.$$

Tất nhiên , λ =0 thì $\lambda\vec{v} = \vec{0}$.

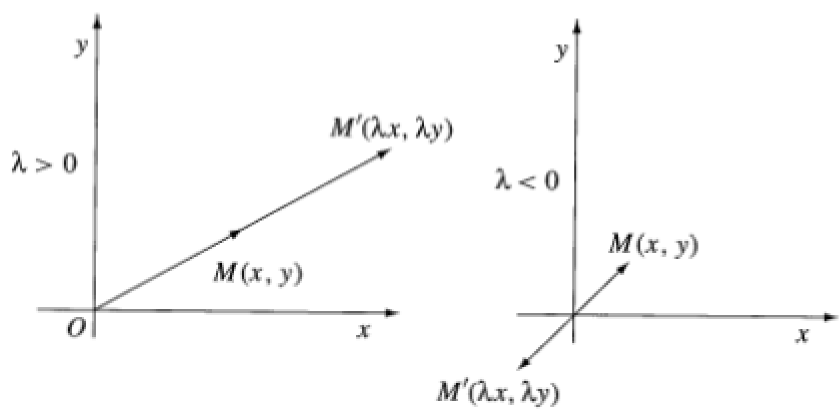

Figure 1.9.

Ví dụ 9.

a) Ta có $3(1+2i) = 3+6i$, hình 1.10

b) $-2(-3+2i) = 6-4i$

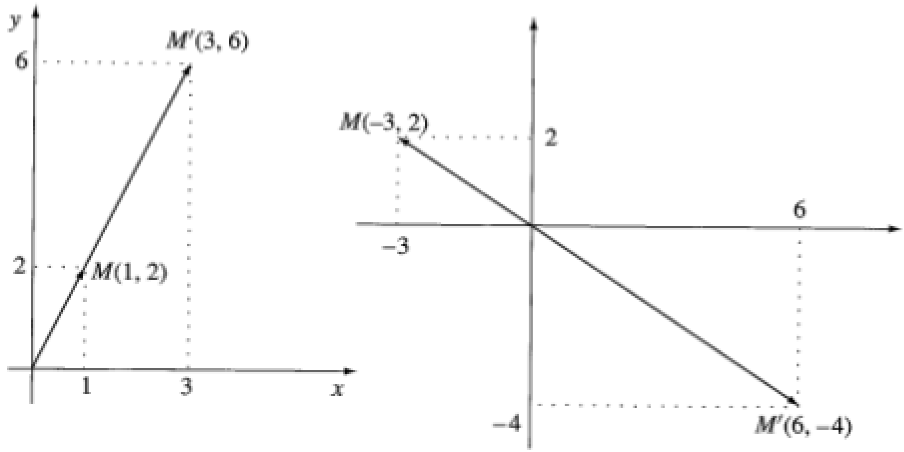

Figure 1.10.

2.4 *Bài tập*

1. Biểu diễn hình học các số phức sau trên mặt phẳng phức
   $z_1 = 3+i,\ z_2 = -4+2i,\ z_3 = -5-4i,\ z_4 = 5-i,$
   $z_5 = 1,\ z_6 = -3i,\ z_7 = 2i,\ z_8 = -4.$
2. Biểu diễn hình học các hệ thức
   a) $(-5+4i)+(2-3i) = -3+i$;
   b) $4-\mathrm{i} \ + \ -6+4\mathrm{i} \ = -2+3\mathrm{i}$;
   c) $(-3-2i)-(-5+i) = 2-3i$;
   d) $(8-i)-(5+3i) = 3-4i$;
   e) $2(-4+2i) = -8+4i$;
   f) $-3(-1+2i) = 3-6i$.
3. Biểu diễn hình học z
   a) $|z-2| = 3$;
   b) $|z+i| < 1$;
   c) $|z-1+2i| > 3$;
   d) $|z-2|-|z+2| < 2$;
   e) $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$;
   f) $-1 < \mathrm{Im}(z) < 1$;
   g) $\mathrm{Re}(\dfrac{z-2}{z-1}) = 0$;
   h) $\dfrac{1+\overline{z}}{z} \in R$
4. Tìm tập các điểm M(x,y) trong mặt phẳng phức

$$|\sqrt{x^2+4}+i\sqrt{y-4}|=\sqrt{10}.$$

5. Cho $z_1=1+i, z_2=-1-i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.
6. Tìm các điểm biểu diễn z, z^2, z^3 sao cho chúng tạo thành tam giác vuông.
7. Tìm các điểm biểu diễn số phức z sao cho

$$|z+\frac{1}{z}|=2.$$

2.4 Đáp số và hướng dẫn

3.

a) Đường tròn tâm (2,0) bán kinh 3.

b) Hình tròn tâm (0,-1) bán kính 1.

c) Phần ngoài đường tròn tâm (-1,-2) bán kính 3.

d) $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\geq -\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x< -\frac{1}{2}, 3x^2-y^2-3<0\right\}$.

e) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -1<y<0\}$.

f) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -1<y<1\}$.

g) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2-3x+2=0\}4$.

4. $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y=10-x^2,\ y\geq 4\}$.

5. $z_3=\sqrt{3}(1-i)$ and $z_3'=\sqrt{3}(1+i)$.

6. $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2+x=0,\ x\neq 0,\ x\neq -1\}$
$\cup\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 | y\neq 0\}\cup\{(-1,y)\in\mathbb{R}^2 | y\neq 0\}$.

7.Hợp hai đường tròn

$$x^2+y^2-2y-1=0, x^2+y^2+2y-1=0.$$

3 Dạng lượng giác của số phức

3.1 *Tọa độ cực của số phức*

Trong mặt phẳng Oxy, cho M(x,y) khác gốc tạo độ.

Số thực $r=\sqrt{x^2+y^2}$ gọi là bán kính cực của điểm M. Số đo θ∈ [0;2π) của góc lượng giác $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ gọi là argument của M. Cặp có thứ tự (r,θ) gọi là tọa độ cực của M, viết M(r,θ).

Song ánh

$$h: R\times R\setminus(0,0)\to(0,\infty)\times[0,2\pi), h((x,y))=(r,\theta)$$

Điểm gốc O là điểm duy nhất có r=0, θ không xác định.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng có P là giao điểm duy nhất của tia OM với đường tròn đơn vị tâm O.

Rõ ràng

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}.$$

Xét argument cực của M với các trường hợp sau:

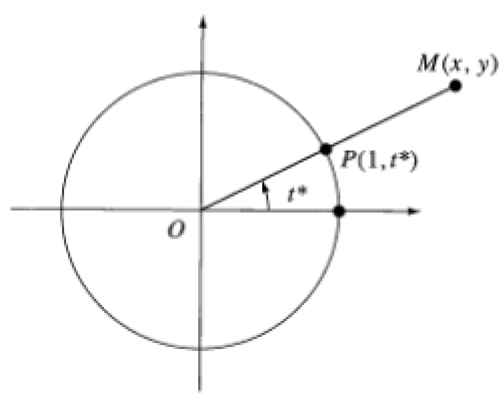

Figure 2.1.

a) Nếu x≠ 0, từ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, được

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}+k\pi,$$

ở đây

$$k = \begin{cases} 0, x > 0 \,\&\, y \geq 0 \\ 1, x < 0, \ y \in R \\ 2, x > 0, \ y < 0 \end{cases}$$

b) Nếu x= 0, và y≠ 0 được

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, y < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 10. Tìm các tọa độ cực của

$M_1(2,-2), M_2(-1,0), M_3(-2\sqrt{3},-2), M_4(\sqrt{3},1), M_5(3,0), M_6(-2,2), M_7(0,1), M_8(0,-4)$

Dễ thấy

$r_1 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}; \theta_1 = \arctan(-1) + 2\pi = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}, M_1(2\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4})$.

$r_2 = 1; \theta_2 = \arctan 0 + \pi = \pi, M_2(1,\pi)$

$r_3 = 4; \theta_2 = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}, M_3(4, \dfrac{7\pi}{6})$

$r_4 = 2; \theta_4 = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}, M_4(2, \dfrac{\pi}{6})$

$r_5 = 3; \theta_2 = \arctan 0 + 0 = 0, M_5(3,0)$

$r_6 = 2\sqrt{2}; \theta_6 = \arctan(-1) + \pi = \dfrac{-\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}, M_6(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4})$

$r_7 = 1; \theta_7 = \dfrac{\pi}{2}, M_7(1, \dfrac{\pi}{2})$

$r_8 = 4; \theta_8 = \dfrac{3\pi}{2}, M_8(1, \dfrac{3\pi}{2})$.

Ví dụ 11.Tìm tọa độ vuông góc của các điểm cho bởi tọa độ cực

$$M_1(2, \frac{2\pi}{3}),\ M_2(3, \frac{7\pi}{4}),\ M_3(1,1).$$

$x_1 = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = 2(-\dfrac{1}{2}) = -1, y_1 = 2\sin\dfrac{2\pi}{3} = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},\ M_1(-1,\sqrt{3})$.

$x_2 = 3\cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, y_2 = 3\sin\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ M_2(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$.

Tương tự $x_3 = \cos 1,\ y_3 = \sin 1, M_3(\cos 1, \sin 1)$.

3.2 Biểu diễn lượng giác của số phức

Cho số phức z=x+yi ta có thể viết z dạng cực:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

r=|z|∈ [0,∞), θ là một argument của z và $\theta \in [0;2\pi)$.

Với z≠ 0, r và θ xác định duy nhất.

Xét $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, đặt $\alpha = \theta + 2k\pi, k \in Z$ thì

$$z = r[\cos(\alpha - 2k\pi) + i\sin(\alpha - 2k\pi)] = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Tức là , với số phức bất kỳ z có thể viết $z = r(\cos t + i\sin t), r \geq 0, t \in R$. Khi đó ta nói z được biểu diễn dạng lượng giác.

Tập $Argz = \{t, t = \theta + 2k\pi, k \in Z\}$ gọi là argument mở rộng của z.

Do đó hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$ biểu diễn dạng lượng giác

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i\sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)$ bằng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ t_1 - t_2 = 2k\pi \end{cases}$, k∈ ℤ

Ví dụ 12. Viết các số sau dưới dạng cực và xác định tập Argz

a) $z_1 = -1 - i$,

b) $z_2 = 2 + 2i$,

c) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$,

d) $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

a) $P_1(-1,-1)$ nằm ở góc phần tư thứ ba.

$$r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \theta = \arctan\frac{y}{x} + \pi = \arctan 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

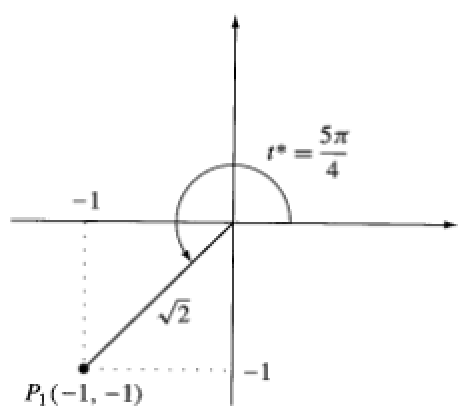

Figure 2.2.

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

$$Argz_1 = \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}.$$

b) $P_2(2,2)$ nằm ở góc phần tư thứ nhất

$$r_2 = 2\sqrt{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$Argz_2 = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$$

c) $P_3(-1,\sqrt{3})$ thuộc góc phần tư thứ hai

$$r_3 = 2, \theta_3 = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

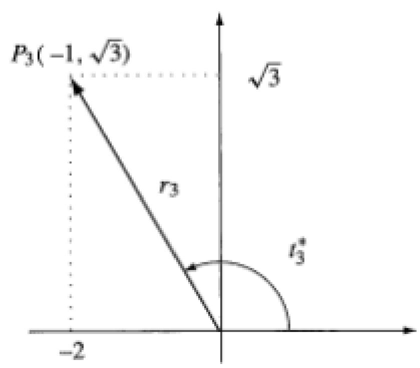

Figure 2.3.

$$Argz_3 = \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\}.$$

d) $P_4(1,-\sqrt{3})$ thuộc góc phần tư thứ tư

$$r_4 = 2, \theta_4 = \frac{5\pi}{3}$$

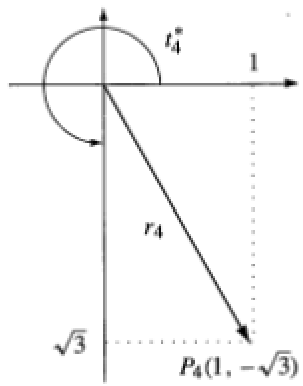

Figure 2.4.

$$z_4 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$

$$Argz_4 = \{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\}.$$

Ví dụ 13. Viết các số phức sau dưới dạng cực

a) $z_1 = 2i$,

b) $z_2 = -1$,

c) $z_3 = 2$,

d) $z_4 = -3i$.

Và xác định Arg của chúng.

a) Điểm $P_1(0,2)$ thuộc phần dương trục tung, nên

$$r_1 = 2, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$Argz_1 = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$$

b) Điểm $P_2(-1,0)$ thuộc phần âm trục hoành, nên

$$r_2 = 1, \theta_2 = \pi, z_2 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$Argz_2 = \{\pi + 2k\pi\}$$

c) Điểm $P_3(2,0)$ thuộc phần dương trục hoành, nên

$$r_3 = 2, \theta_3 = 0, z_3 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$Argz_3 = \{2k\pi, k \in Z\}$$

d) Điểm $P_4(0,-3)$ thuộc phần âm trục tung, nên

$$r_4 = 3, \theta_4 = \frac{3\pi}{2}, z_4 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$Argz_4 = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$$

Rõ ràng

$$1 = \cos 0 + i\sin 0; i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi; -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Bài tập 11. Viết số phức sau dưới dạng cực

$$z = 1 + \cos a + i\sin a,\ a \in (0, 2\pi).$$

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{(1+\cos a)^2 + \sin^2 a} = \sqrt{2(1+\cos a)} = \sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}} = 2|\cos\frac{a}{2}|.$$

a) Nếu $a \in (0,\pi) \Rightarrow \frac{a}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, P nằm góc phần tư thứ nhất . Do đó

$$\theta = \arctan\frac{\sin a}{1+\cos a} = \arctan(\tan\frac{a}{2}) = \frac{a}{2},$$

$$z = 2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2} + i\sin\frac{a}{2})$$

b) Nếu $a \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \frac{a}{2} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, P nằm góc phần tư thứ tư . Do đó

$$\theta = a\text{rctan}(\tan\frac{a}{2}) + 2\pi = \frac{a}{2} - \pi + 2\pi = \frac{a}{2} + \pi,$$

$$z = -2\cos\frac{a}{2}[\cos(\frac{a}{2} + \pi) + i\sin(\frac{a}{2} + \pi)]$$

c) Nếu $a = \pi$, thì z=0.

Bài tập 12. Tìm các số phức z sao cho

$$|z| = 1, |\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}| = 1.$$

Lời giải. Đặt $z = \cos x + i\sin x,\ x \in [0, 2\pi).$

$$1 = |\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}| = \frac{|z^2 + \overline{z}^2|}{|z|^2}$$

$$= |\cos 2x + i\sin 2x + \cos 2x - i\sin 2x|$$

$$= 2|\cos 2x|$$

Do đó

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Nếu $\cos 2x = \frac{1}{2}$ thì

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

Nếu $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ thì

$$x_5 = \frac{\pi}{3}, x_6 = \frac{2\pi}{3}, x_7 = \frac{4\pi}{3}, x_8 = \frac{5\pi}{3}$$

Do đó có 8 nghiệm

$$z_k = \cos x_k + i \sin x_k k = 1, 2, 3, \ldots, 8.$$

3.2 *Các phép toán trên dạng lượng giác số phức*

(1) Phép nhân

Định lý. $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

Khi đó

$$z_1.z_2 = r_1 r_2[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)] .$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1 r_2(\cos t_1 + i \sin t_1)(\cos t_2 + i \sin t_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + i(\sin t_1 \cos t_2 + \sin t_2 \cos t_1)] \\ &= r_1 r_2[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)] \end{aligned}$$

Lưu ý

a) Một lần nữa ta lại $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

b) $\arg(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2 - 2k\pi$,

$$k = \begin{cases} 0, argz_1 + argz_2 < 2\pi \\ 1, argz_1 + argz_2 \geq 2\pi \end{cases}.$$

c) Có thể viết $A\arg(z_1 z_2) = \{argz_1 + argz_2 + 2k\pi, k \in Z\}$

d) Mở rộng với n≥ 2 số phức . Nếu $z_k = r_k(\cos t_k + i \sin t_k), k = 1, 2, \ldots, n$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) + i \sin(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)]$$

Công thức trên có thể viết

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} r_k (\cos \sum_{k=1}^{n} t_k + i \sin \sum_{k=1}^{n} t_k).$$

Ví dụ 14. Cho $z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} + i$.

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}),\ z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}[\cos(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6})]$$

$$= 2\sqrt{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12})$$

(2) Lũy thừa của một số phức

Định lý. (De Moivre[3]) Cho $z = r(\cos t + i\sin t)$ và n∈ ℕ , ta có

$$z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt).$$

Chứng minh. Dùng công thức nhân với $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ được

$$z^n = \underbrace{r.r.\ldots.r}_{n}[\cos(\underbrace{t + t + \ldots + t}_{n}) + i\sin(\underbrace{t + t + \ldots + t}_{n})]$$

$$= r^n(\cos nt + i\sin nt)$$

Lưu ý.

a) Chúng ta tìm lại được $|z^n| = |z|^n$.

b) Nếu r=1, thì $(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$.

c) Ta có thể viết $Argz^n = \{n.arg\ z + 2k\pi, k \in Z\}$.

Ví dụ 15. Tính $(1+i)^{1000}$.

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$(1+i)^{1000} = \sqrt{2}^{1000}(\cos 1000\frac{\pi}{4} + i\sin 1000\frac{\pi}{4})$$

$$= 2^{500}(\cos 250\pi + i\sin 250\pi) = 2^{500}$$

Bài tập 13. Chứng minh

$$\begin{aligned} \sin 5t &= 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t; \\ \cos 5t &= 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t \end{aligned}.$$

Lời giải. Dùng công thức Moivre và khai triển nhị thức $(\cos t + i\sin t)^5$,

$$\begin{aligned} \cos 5t + i\sin 5t = &\cos^5 t + 5i\cos^4 t\sin t + 10i^2\cos^3 t\sin^2 t \\ &+ 10i^3\cos^2 t\sin^3 t + 5i^4\cos t\sin^4 t + i^5\sin^5 t \end{aligned}.$$

Do đó

[3] Abraham de Moivre (1667-1754), nhà toán học Pháp.

$$\cos 5t + i\sin 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t(1-\cos^2 t) + 5\cos t(1-\cos^2 t)^2$$
$$+i[\sin t(1-\sin^2 t)^2 \sin t - 10(1-\sin^2 t)\sin^3 t + \sin^5 t]$$

Đồng nhất hai vế cho điều phải chứng minh.

(3) Phép chia.

Định lý. Giả sử $z_1 = r_1(\cos t_1 + i\sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i\sin t_2) \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos t_1 + i\sin t_1)}{r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)}$$
$$= \frac{r_1(\cos t_1 + i\sin t_1)(\cos t_2 - i\sin t_2)}{r_2(\cos^2 t_2 + \sin^2 t_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) + i(\sin t_1 \cos t_2 - \sin t_2 \cos t_1)]$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)]$$

Lưu ý.

a)Ta có lại kết quả $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

b) $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = \{argz_1 - argz_2 + 2k\pi, k \in Z\}$;

c)Với $z_1 = 1, z_2 = z, \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-t) + i\sin(-t)]$;

d)Công thức De Moivre còn đúng cho lũy thừa nguyên âm, tức là với n nguyên âm, ta có

$$z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt).$$

Bài tập 14. Tính

$$z = \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}.$$

Lời giải.

$$z = \frac{\sqrt{2}^{10}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^{10}.2^5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^5}{2^{10}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})^{10}}$$

$$= \frac{2^{10}(\cos\frac{35\pi}{2} + i\sin\frac{35\pi}{2})(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}{2^{10}(\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3})}.$$

$$= \frac{\cos\frac{55\pi}{3} + i\sin\frac{55\pi}{3}}{\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3}} = \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1$$

3.4 Biểu diễn hình học của tích hai số phức

Xét số phức $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Gọi P_1, P_2 là giao điểm của đường tròn $\mathfrak{C}(0,1)$ với tia OM_1, OM_2.

Dựng P_3 thuộc đường tròn và có argument cực $\theta_1 + \theta_2$, chọn M_3 thuộc tia $OP_3, OM_3 = OM_1.OM_2$.

Gọi z_3 là tọa độ phức của M_3. Điểm $M_3(r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)$ biểu diễn tích z_1z_2.

Gọi A là điểm biểu diễn của z=1.

$\frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{1} \Rightarrow \frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_2}{OA}$ và $\widehat{M_2OM_3} = \widehat{AOM_1}$. Suy ra hai tam giác OAM_1, OM_2M_3 đồng dạng.

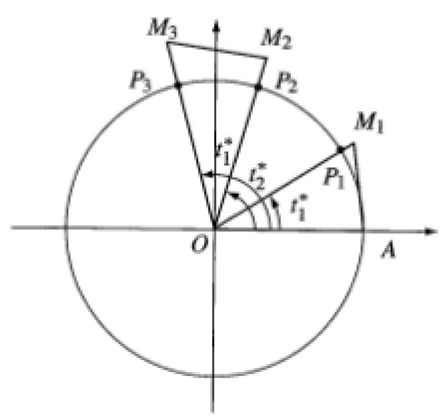

Figure 2.5.

Để xây dựng biểu diễn hình học của thương, lưu ý điểm tương ứng của $\frac{z_3}{z_2}$ là M_1.

3.5 Bài tập

1. Dựa vào tọa độ vuông góc ,tìm tọa độ cực của các điểm
   a) $M_1(-3,3)$
   b) $M_2(-4\sqrt{3},-4)$
   c) $M_3(0,-5)$
   d) $M_4(-2,-1)$
   e) $M_5(4,-2)$
2. Dựa vào tọa độ cực ,tìm tọa độ vuông góc các điểm
   a) $P_1(2,\frac{\pi}{3})$
   b) $P_2(4,2\pi-\arcsin\frac{3}{5})$
   c) $P_3(2,\pi)$
   d) $P_4(3,-\pi)$
   e) $P_5(1,\frac{\pi}{2})$
   f) $P_6(4,\frac{3\pi}{2})$
3. Biểu diễn $\arg(\overline{z})$ và $\arg(-z)$ qua arg(z).
4. Biểu diễn hình học các số phức z:
   a) $|z|=2$;
   b) $|z+i|\geq 2$;
   c) $|z-i|\leq 3$;
   d) $\pi<argz<\frac{5\pi}{4}$;
   e) $\arg z\geq\frac{3\pi}{2}$;
   f) $\arg z<\frac{\pi}{2}$;
   g) $\arg(-z)\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$
   h) $\begin{cases}|z+1+i|<3\\ 0<argz<\frac{\pi}{6}\end{cases}$
5. Viết các số sau dưới dạng cực

a) $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3};$

b) $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4};$

c) $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$

d) $z_4 = 9 - 9i\sqrt{3};$

e) $z_5 = 3 - 2i;$

f) $z_6 = -4i$

6. Viết các số sau dưới dạng cực

a) $z_1 = \cos a - i\sin a,\ a \in [0, 2\pi)$,

b) $z_2 = \sin a + i(1 + \cos a),\ a \in [0, 2\pi)$,

c) $z_3 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a),\ a \in [0, 2\pi)$,

d) $z_4 = 1 - \cos a + i\sin a,\ a \in [0, 2\pi)$.

7. Sử dụng dạng cực của số phức để tính tích sau đây

a) $(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(-3 + 3i)(2\sqrt{3} + 2i);$

b) $(1 + i)(-2 - 2i)i$;

c) $-2i(-4 + 4\sqrt{3}i)(3 + 3i)$;

d) $3(1 - i)(-5 + 5i)$

Mô tả các kết quả dạng đại số

8. Tìm $|z|, \arg z, Argz, \arg \overline{z}, \arg(-z)$

a) $z = (1 - i)(6 + 6i)$;

b) $z = (7 - 7\sqrt{3}i)(-1 - i)$.

9. Tìm |z| và argument cực của z:

a) $z = \frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$,

b) $z = \frac{(-1 + i)^4}{(\sqrt{3} - i)^{10}} + \frac{1}{(2\sqrt{3} + 2i)^4}$,

c) $z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$.

10. Chứng tỏ công thức Moivre đúng với số nguyên âm

11. Tính

a) $(1 - \cos a + i\sin a)^n,\ a \in [0, 2\pi), n \in N$,

b) $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, nếu $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}.$

3.6 Đáp số và hướng dẫn

1. a) $r = 3\sqrt{2}, t^* = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 8, t^* = \dfrac{7\pi}{6}$; c) $r = 5, t^* = \pi$;

d) $r = \sqrt{5}, t^* = \arctan\dfrac{1}{2} + \pi$; e) $r = 2\sqrt{5}, t^* = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi$.

2. a) $x = 1, y = \sqrt{3}$; b) $x = \dfrac{16}{5}, y = -\dfrac{12}{5}$; c) $x = -2, y = 0$;

d) $x = -3, y = 0$ e) $x = 0, y = 1$ f) $x = 0, y = -4$.

3. $\arg(\overline{z}) = \begin{cases} 2\pi - \arg z, & \text{if } \arg z \neq 0, \\ 0, & \text{if } \arg z = 0; \end{cases}$;

$\arg(-z) = \begin{cases} \pi + \arg z, & \text{if } \arg z \in [0, \pi), \\ -\pi + \arg z, & \text{if } \arg z \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$

5. a) $z_1 = 12\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; b) $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

c) $z_3 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$; d) $z_4 = 18\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

e) $z_5 = \sqrt{13}\left[\cos\left(2\pi - \arctan\dfrac{2}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \arctan\dfrac{2}{3}\right)\right]$;

f) $z_6 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

6. a) $z_1 = \cos(2\pi - a) + i\sin(2\pi - a), a \in [0, 2\pi)$;

b) $z_2 = 2\left|\cos\dfrac{a}{2}\right| \cdot \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right)\right]$ if $a \in [0, \pi)$;

$z_2 = 2\left|\cos\dfrac{a}{2}\right| \cdot \left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right)\right]$ if $a \in (\pi, 2\pi)$;

c) $z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(a + \dfrac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(a + \dfrac{7\pi}{4}\right)\right]$ if $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

$z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ if $a \in \left(\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right)$;

d) $z_4 = 2\sin\dfrac{a}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right)\right]$ if $a \in [0, \pi)$;

$z_4 = 2\sin\dfrac{a}{2}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{a}{2}\right)\right]$ if $a \in [\pi, 2\pi)$.

7. a) $12\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$; b) $4(\cos 0 + i\sin 0)$;

c) $48\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$; d) $30\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. a) $|z| = 12, \arg z = 0, \operatorname{Arg} z = 2k\pi, \arg\overline{z} = 0, \arg(-z) = \pi$;

b) $|z| = 14\sqrt{2}, \arg z = \dfrac{11\pi}{12}, \operatorname{Arg} z = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi, \arg\overline{z} = \dfrac{13\pi}{12}, \arg(-z) = \dfrac{\pi}{12}$.

9. a) $|z| = 2^{13} + \dfrac{1}{2^{13}}, \arg z = \dfrac{5\pi}{6}$; b) $|z| = \dfrac{1}{2^9}, \arg z = \pi$;

c) $|z| = 2^{n+1}\left|\cos\dfrac{5n\pi}{3}\right|, \arg z \in \{0, \pi\}$.

4 Căn bậc n của đơn vị

4.1 Định nghĩa căn bậc n của số phức

Xét số nguyên n≥ 2 và số phức $w \neq 0$. Như trong trường số thực ℝ , phương trình

$$z^n - w = 0$$

được dùng định nghĩa căn bậc n của số w. Ta gọi nghiệm z của phương trình là một căn bậc n của w.

Định lý. Cho $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ là số phức với r>0 và θ∈ [0,2π).

Căn bậc n của w gồm n số phân biệt, cho bởi

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Chứng minh. Biểu diễn số phức z dạng lượng giác, tức là

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Theo định nghĩa, ta có $z^n = w$, nên

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Do đó

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in Z \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Vậy nghiệm phương trình có dạng

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ k \in Z$$

Lưu ý rằng $0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < 2\pi$. Do đó $\varphi_k, k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ là argument cực .

Bởi tính duy nhất của tọa độ cực, Ta có n nghiệm phân biệt của phương trình là

$$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}.$$

Đến đây ta chứng minh phương trình có đúng n nghiệm phân biệt.

Với số nguyên k bất kỳ, lấy k chia cho n có thương q và số dư r, tức là k=nq+r, q∈ Z, r∈{0,1,2,…,n-1}

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + (nq + r)\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + r\frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \varphi_r + 2q\pi.$$

Rõ ràng $z_k = z_r$. Do đó

$$\{z_k, k \in Z\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Nói cách khác phương trình có đúng n nghiệm phân biệt.

Biểu diễn hình học các căn bậc n của w≠ 0 (n≥ 3) là đỉnh của một n giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}$, r=|w|.

Để chứng minh điều này, ký hiệu $M_0(z_0), M_1(z_1), \ldots, M_{n-1}(z_{n-1})$. Bởi vì $OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{r}, k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \Rightarrow M_k \in C(0,\sqrt[n]{r})$. Mặt khác, số đo cung $\overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$ bằng

$$\arg z_{k+1} - arg z_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}, k \in \{0,1,\ldots,n-2\}.$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{M_{n-1}M_0} \text{ bằng } 2\pi - (n-1)\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Bởi vì các cung $\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2}, \ldots, \overset{\frown}{M_{n-1}M_0}$ bằng nhau nên đa giác $M_0M_1\ldots M_{n-1}$ đều.

Ví dụ 16. Tìm các căn bậc ba của z=1+i và biểu diễn chúng lên mặt phẳng phức.

Dạng lượng giác của z là

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Các căn bậc ba của z

$$z_k = \sqrt[6]{2}[\cos(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3})], k = 0,1,2$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}),$$

Dùng tọa độ cực, các điểm biểu diễn z_0, z_1, z_2 lần lượt là

$$M_0(\sqrt[6]{2}, \frac{\pi}{12}), M_1(\sqrt[6]{2}, \frac{3\pi}{4}), M_2(\sqrt[6]{2}, \frac{17\pi}{12})$$

Tam giác đều biểu diễn kết quả hình 2.6

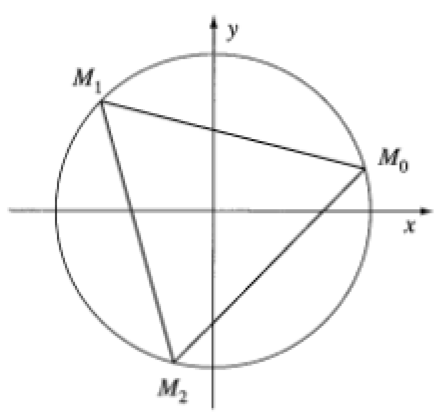

Figure 2.6.

4.2 Căn bậc n của đơn vị

Một nghiệm phương trình $z^n - 1 = 0$ gọi là một căn bậc n của đơn vị.

Biểu diễn 1 dưới dạng lượng giác , $1 = \cos 0 + i\sin 0,$ từ công thức tìm căn bậc n của số phức, ta có căn bậc n của đơn vị là

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \omega. \text{ (đặt } \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\text{)}$$

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \omega^2,$$

...

$$\omega_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \omega^{n-1}.$$

Ký hiệu $U_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$,cũng cần nhắc lại $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Như phần trước đã đề cập, Biểu diễn hình học các căn bậc n của đơn vị (n≥ 3) là các điểm tạo thành một n giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính 1.

Chẳng hạn

i) Với n=2, hai căn bậc hai của 1(nghiệm phương trình $z^2 - 1 = 0$) là -1,1.

ii) Với n=3, căn bậc ba của 1(nghiệm phương trình $z^3 - 1 = 0$)cho bởi

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \text{ k} \in \{0,1,2\},$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 1,$$

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega,$$

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2$$

Biểu diễn lên mặt phẳng phức được tam giác đều nội tiếp đường tròn $\mathfrak{C}$ (O,1).

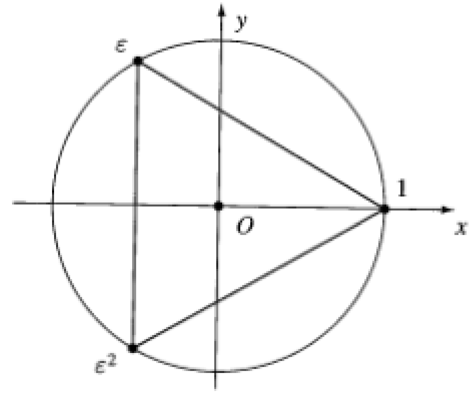

Figure 2.7.

iii) Với n=4, các căn bậc bốn của 1 là

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, k \in \{0,1,2,3\}.$$

Ta có

$$\omega_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$\omega_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\omega_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Tức là $U_4 = \{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}$. Biểu diễn hình học của chúng là hình vuông nội tiếp đường tròn ℭ (O,1).

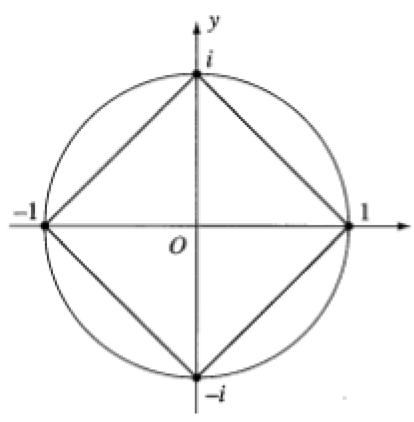

Figure 2.8.

Số $\omega_k \in U_n$ gọi là căn nguyên thủy bậc n của đơn vị , nếu mọi số nguyên dương m<n ta có $\omega_k^m \neq 1$.

Định lý.

a) Nếu n|q thì nghiệm bất kỳ của $z^n - 1 = 0$ cũng là nghiệm $z^q - 1 = 0$.

b)Các nghiệm chung của phương trình $z^m - 1 = 0$ và $z^n - 1 = 0$ là các nghiệm của $z^d - 1 = 0$, d=UCLN(m,n), tức là $U_m \cap U_n = U_d$.

c)Các nghiệm nguyên thủy của $z^m - 1 = 0$ là

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}, 0 \le k \le m, UCLN(k,m) = 1.$$

Chứng minh.

a)Nếu q=pn thì $z^q - 1 = (z^n)^p - 1 = (z^n - 1)(z^{(q-1)} + \ldots + z^n + 1)$. Do đó điều phải chứng minh là hệ quả trực tiếp suy từ hệ thức trên.

b)Xét $\omega_p = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$ là một nghiệm của $z^m - 1 = 0$ và

$\omega_q' = \cos\frac{2q\pi}{m} + i\sin\frac{2q\pi}{m}$ là một nghiệm của $z^n - 1 = 0$. Bởi vì

$|\omega_p| = |\omega_q'| = 1$, ta có $\omega_p = \omega_q' \Leftrightarrow \frac{2p\pi}{m} = \frac{2q\pi}{n} + 2r\pi, r \in Z.$

Cho ta $\frac{p}{m} - \frac{q}{n} = r \Rightarrow pn - qm = rmn.$

Mặt khác, $m = m'd, n = n'd, UCLN(m', n') = 1.$

$$pn - qm = rmn \Rightarrow n'p - m'q = rm'n'd.$$

$$m' | n'p \Rightarrow m' | p \Rightarrow p = p'm',\ p' \in Z \text{ và}$$

$$\arg\omega_p = \frac{2p\pi}{m} = \frac{2p'm'\pi}{m'd} = \frac{2p'\pi}{d} \text{ và } \omega_p^d = 1.$$

Ngược lại , $d | m, d | n$, bất kỳ nghiệm của $z^d - 1 = 0$ là nghiệm của $z^m - 1 = 0$ và $z^n - 1 = 0$ (tính chất a).

c)Trước hết ta tìm số nguyên dương nhỏ nhất p sao cho $\omega_k^p = 1.$ Từ hệ thức $\omega_k^p = 1.$ Suy ra $\frac{2kp\pi}{m} = 2k'\pi$, k'∈ ℤ . Tức là $\frac{kp}{m} = k' \in Z$. Xét d=UCLN(k,m) và k=k'd, m=m'd, ở đây UCLN(k',m')=1. Ta có $\frac{k'pd}{m'd} = \frac{k'p}{m'} \in Z$. Bởi vì k' và m' nguyên tố cùng nhau , ta có m'|p. Do đó số nguyên dương nhỏ nhất p thỏa mãn $\omega_k^p = 1$ là p=m'. Kết hợp với hệ thức m=m'd suy ra $p = \frac{m}{d}, d = UCLN(k,m)$.

Nếu ω_k là căn nguyên thủy bậc m của đơn vị, thì từ hệ thức $\omega_k^p = 1, p = \dfrac{m}{UCLN(k,m)}$ suy ra p=m, tức là UCLN(k,m)=1.

Lưu ý .

Từ b) ta thu được phương trình $z^m - 1 = 0$ và phương trình $z^n - 1 = 0$ có nghiệm chung duy nhất là 1 nếu và chỉ nếu UCLN(m,n)=1.

Định lý. Nếu $\omega \in U_n$ là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị thì các nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$ là

$$\omega^r, \omega^{r+1}\ldots, \omega^{r+n-1},\ \text{r là một số nguyên dương cho trước.}$$

Chứng minh. Cho r là một số nguyên dương và $h \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Khi đó $(\omega^{r+h})^n = (\omega^n)^{r+h} = 1$, tức là ω^{r+h} là một nghiệm của $z^n - 1 = 0$.

Chỉ cần chứng minh $\omega^r, \omega^{r+1}, \ldots, \omega^{r+n-1}$ phân biệt. Giả sử không phân biệt, tức tồn tại $r + h_1 \neq r + h_2, h_1 > h_2$ mà $\omega^{r+h_1} = \omega^{r+h_2}$. Khi đó $\omega^{r+h_2}(\omega^{h_1-h_2} - 1) = 0$. Nhưng $\omega^{r+h_2} \neq 0 \Rightarrow \omega^{h_1-h_2} = 1$. Đối chiếu với $0 < h_1 - h_2 < n$ và ω là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị, ta có mâu thuẩn.

Bài tập 15. Tìm số cặp thứ tự (a,b) các số thực sao cho $(a+bi)^{2002} = a - bi$.

Lời giải. Đặt z=a+bi⇒ $\overline{z} = a - bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Hệ thức đã cho trở thành $z^{2002} = \overline{z}$.

$$|z|^{2002} = |z^{2002}| = |\overline{z}| = |z| \Rightarrow |z|(|z|^{2001} - 1) = 0.$$

Do đó |z|=0, tức là (a,b)=(0,0) hoặc |z|=1. Trong trường hợp |z|=1, ta có

$$z^{2002} = \overline{z} \Rightarrow z^{2003} = \overline{z}.z = |z|^2 = 1.$$

Do phương trình $z^{2003} = 1$ có 2003 nghiệm phân biệt⇒ có 2004 cặp thứ tự theo yêu cầu.

Bài tập 16. Hai đa giác đều cùng nội tiếp trong một đường tròn. Đa giác thứ nhất có 1982 cạnh, đa giác thứ hai có 2973 cạnh. Tìm số đỉnh chung của hai đa giác đó.

Lời giải. Số đỉnh chung bằng số nghiệm chung của hai phương trình $z^{1982} - 1 = 0, z^{2973} - 1 = 0$. Ứng dụng định lý trên, số nghiệm chung là

$$d = UCLN(1982, 2973) = 991.$$

Bài tập 17. Cho $\omega \in U_n$ là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị và z là số phức sao cho $|z - \omega^k| \leq 1, \forall k = 0,1,\ldots,n-1$. Chứng minh $z = 0$.

Lời giải. Từ giả thiết , được

$(z - \omega^k)\overline{(z - \omega^k)} \leq 1 \Rightarrow |z|^2 \leq z\overline{\omega^k} + \overline{z}\omega^k, k = 0,1,\ldots,n-1$. Lấy tổng các hệ thức trên,

$$n|z|^2 \leq z(\overline{\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k}) + \overline{z}.\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = 0.$$

Do đó z=0.

Bài tập 18. Cho $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn bán kính 1. Chứng minh

a) $P_0P_1.P_0P_2\ldots P_0P_{n-1}=n$

b) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

c) $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{2^{n-1}}$

Lời giải.

a)Không mất tổng quát, giả sử các đỉnh đa giác là các điểm biểu diễn hình học các căn bậc n của đơn vị, $P_0=1$. Xét đa thức

$$f=z^n-1=(z-1)(z-\omega)\ldots(z-\omega^{n-1}),\ \omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Rõ ràng

$$n=f'(1)=(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1}).$$

Lấy Môđun hai vế được kết quả.

b)Ta có

$$1-\omega^k=1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$$
$$=2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n})$$

Do đó $|1-\omega^k|=2\sin\frac{k\pi}{n},k=1,2,\ldots,n-1$. Sử dụng a) ta có điều phải chứng minh.

c)Xét đa giác đều $Q_0Q_1\ldots Q_{2n-1}$nội tiếp trong đường tròn , các đỉnh của nó là điểm biểu diễn hình học của căn bậc 2n của đơn vị. Theo a)

$$Q_0Q_1.Q_0Q_2\ldots Q_0Q_{2n-1}=2n$$

Bây giờ xét đa giác đều $Q_0Q_2\ldots Q_{n-2}$, ta có $Q_0Q_2.Q_0Q_4\ldots Q_0Q_{2n-2}=n$

Do đó $Q_0Q_1.Q_0Q_3\ldots Q_0Q_{2n-1}=2$. Tính toán tương tự phần b) ta được

$$Q_0Q_{2k-1}=2\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},k=1,2\ldots n$$ và ta có điều phải chứng minh

4.3 Phương trình nhị thức

Phương trình nhị thức là một phương trình có dạng $z^n+a=0$, n∈ ℕ và n≥ 2. Giải phương trình là tìm căn bậc n của số phức –a. Đây là một dạng đơn giản của phương trình bậc n hệ số phức. Theo định lý cơ bản, phương trình có đúng n nghiệm. Và cũng dễ thấy trong trường hợp này phương trình có n nghiệm phân biệt.

Ví dụ 17.

a) Giải phương trình $z^3+8=0$.

$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$, các nghiệm là

$$z_k = 2(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}), k = 0,1,2.$$

b) Giải phương trình $z^6 - z^3(1+i) + i = 0$.

Phương trình tương đương với

$$(z^3 - 1)(z^3 - i) = 0.$$

Giải phương trình nhị thức $z^3 - 1 = 0, z^3 - i = 0$ có các nghiệm

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, k = 0,1,2 \text{ và}$$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k = 0,1,2.$$

4.4 Bài tập

1. Tìm các căn bậc hai của z
   a) $z = 1 + i$;
   b) $z = i$;
   c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$;
   d) $z = -2(1 + i\sqrt{3})$;
   e) $z = 7 - 24i$.
2. Tìm các căn bậc ba của z
   a) $z = -i$;
   b) $z = -27$;
   c) $z = 2 + 2i$;
   d) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
   e) $z = 18 + 26i$.
3. Tìm các căn bậc bốn của z
   a) $z = 2 - i\sqrt{12}$;
   b) $z = \sqrt{3} + i$;
   c) $z = i$;
   d) $z = -2i$;
   e) $z = -7 + 24i$.
4. Tìm căn bậc 5,6,7,8, 12 các số trên.
5. Cho $U_n = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$[4] là các căn bậc n của đơn vị. Chứng minh

[4] U_n cùng với phép nhân là một nhóm Abel. Nó còn là nhóm xyclic sinh bởi căn nguyên thủy bậc n của đơn vị.

a) $\omega_j \omega_k \in U_n, \forall j,k \in \{0,1,\dots,n-1\}$;

b) $\omega_j^{-1} \in U_n, \forall j \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

6. Giải phương trình

a) $z^3 - 125 = 0$;

b) $z^4 + 16 = 0$;

c) $z^3 + 64i = 0$;

d) $z^3 - 27i = 0$.

7. Giải phương trình

a) $z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0$;

b) $z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$;

c) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$;

d) $z^{10} + (-2+i)z^5 - 2i = 0$.

8. Giải phương trình

$$z^4 = 5(z-1)(z^2 - z + 1).$$

4.5 Đáp số và hướng dẫn

1. a) $z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right), k \in \{0,1\}$;

b) $z_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}, k \in \{0,1\}$;

c) $z_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}, k \in \{0,1\}$;

d) $z_k = 2\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right), k \in \{0,1\}$;

e) $z_0 = 4 - 3i, z_1 = -4 + 3i$.

2. a) $z_k = \cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}, k \in \{0,1,2\}$;

b) $z_k = 3\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$;

c) $z_k = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$;

d) $z_k = \cos\dfrac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$;

3. a) $z_k = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, 3\};$

b) $z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, 3\};$

c) $z_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}, k \in \{0, 1, 2, 3\};$

d) $z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, 3\};$

e) $z_0 = 2 + i, z_1 = -2 - i, z_2 = -1 + 2i, z_3 = 1 - 2i.$

4. $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, n \in \{5, 6, 7, 8, 12\}.$

6. a) $z_k = 5\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\};$

b) $z_k = 2\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, 3\};$

c) $z_k = 4\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\};$

d) $z_k = 3\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\}.$