GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG CÁCH DÙNG ĐẠO HÀM KHỬ DẦN SỐ BIẾN

Võ Quốc Bá Cẩn[1,2]

1 Kiến thức chuẩn bị

2 Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. *Cho a và b là hai số dương thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4 \geqslant 2.$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta suy ra $b=2-a$. Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$a^4+(2-a)^4 \geqslant 2.$$

Do $b>0$ nên ta có $2-a>0$, tức $a<2$. Kết hợp với giả thiết $a>0$, ta được $0<a<2$. Như vậy, ta chỉ phải chứng minh bất đẳng thức trên với $0<a<2$ là đủ.

Xét hàm số $f(a)=a^4+(2-a)^4$ với $a\in(0,\,2)$. Ta có

$$f'(a)=4a^3-4(2-a)^3=4\left[a^3-(2-a)^3\right].$$

Phương trình $f'(a)=0$ tương đương với $a^3=(2-a)^3$, tức $a=2-a$. Giải ra, ta được $a=1$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(a)$ trên $(0,\,2)$ như sau

a	0		1		2
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	16	$\searrow$	2	$\nearrow$	16

Với kết quả thu được từ bảng biến thiên, ta dễ thấy

$$f(a)\geqslant f(1)=2,\quad \forall a\in(0,\,2).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$ (xem lại bảng biến thiên). □

[1] Nickname can_hang2007 ở Diễn đàn *Cùng nhau vượt Đại dương* http://onluyentoan.vn.

[2] Bài viết được trình bày bằng chương trình soạn thảo LaTeX bởi can_hang2007. Đề nghị các bạn ghi rõ nguồn của http://onluyentoan.vn khi đăng tải trên các trang web khác.

Ví dụ 2. *Xét các số thực x, y thỏa mãn $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $y = 2x - 2$. Thay vào, ta viết được biểu thức P dưới dạng

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x^2 + \left[(2x-2)+1\right]^2} + \sqrt{x^2 + \left[(2x-2)-3\right]^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2x-1)^2} + \sqrt{x^2 + (2x-5)^2} = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$ trên $\mathbb{R}$. Tính đạo hàm của $f(x)$, ta có

$$f'(x) = \frac{5x-2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}} + \frac{5x-10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}}.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của $f'(x) = 0$. Phương trình này tương đương với

$$\begin{cases} (5x-2)(5x-10) \leqslant 0 \\ \dfrac{(5x-2)^2}{5x^2 - 4x + 1} = \dfrac{(5x-10)^2}{5x^2 - 20x + 25} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5} \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{(5x-2)^2}{5x^2 - 4x + 1} - 5 = \dfrac{(5x-10)^2}{5x^2 - 20x + 25} - 5 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ sau khi biến đổi có thể viết lại thành

$$\frac{-1}{5x^2 - 4x + 1} = \frac{-5}{x^2 - 4x + 5},$$

tương đương với

$$x^2 - 4x + 5 = 25x^2 - 20x + 5.$$

Tiếp tục thu gọn, ta được $24x^2 - 16x = 0$, hay $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$. So sánh với điều kiện $\frac{2}{5} \leqslant x \leqslant 2$, ta tìm được nghiệm của hệ là $x = \frac{2}{3}$. Do đó, phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm thực duy nhất là $x = \frac{2}{3}$. Từ đây, ta lập được bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$P = f(x) \geqslant f(2) = 2\sqrt{5}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{2}{3}$ và $y = -\frac{2}{3}$. Vì vậy, ta có thể đi đến kết luận cho bài toán là $\min P = 2\sqrt{5}$. □

Ví dụ 3. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{4a+b}{c}.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $a+b=6-c$, $a^2+b^2=14-c^2$ và

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(6-c)^2-(14-c^2)}{2}=c^2-6c+11.$$

Với kết quả vừa thu được này, ta thấy a, b là hai nghiệm của phương trình

$$X^2-(6-c)X+c^2-6c+11=0. \tag{1}$$

Ngoài ra, theo đề bài thì a, b chắc chắn tồn tại nên ta phải có

$$\Delta=(6-c)^2-4(c^2-6c+11)=-3c^2+12c-8\geqslant 0,$$

tức là $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\leqslant c\leqslant\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Lúc này, ta tìm được các nghiệm của phương trình (1) là

$$X_1=\frac{6-c+\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2},\quad X_2=\frac{6-c-\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2}.$$

Và như thế, sẽ có hai trường hợp có thể xảy ra là $a=X_1$, $b=X_2$ và $a=X_2$, $b=X_1$. Thêm nữa, ta lại thấy rằng $4X_2+X_1\leqslant 4X_1+X_2$ (vì $X_1\geqslant X_2$) nên:

- Trong trường hợp tìm $\max P$, ta chỉ cần xét $a=X_1$ và $b=X_2$ là đủ.
- Còn trong trường hợp tìm $\min P$ thì ta chỉ cần xét ngược lại $a=X_2$ và $b=X_1$.

(a) *Tìm* $\max P$. Lúc này, theo lập luận ở trên, ta có $a=X_1$, $b=X_2$ nên

$$P=\frac{4\cdot\frac{6-c+\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2}+\frac{6-c-\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2}}{c}=\frac{30-5c+3\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c}.$$

Đặt $t=\frac{1}{c}$ thì ta có $\frac{3-\sqrt{3}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ (do $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\leqslant c\leqslant\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$) và

$$P=\frac{15}{c}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3+\frac{12}{c}-\frac{8}{c^2}}=15t+\frac{3}{2}\sqrt{-8t^2+12t-3}-\frac{5}{2}.$$

Xét hàm số $f(t)=15t+\frac{3}{2}\sqrt{-8t^2+12t-3}-\frac{5}{2}$ với $\frac{3-\sqrt{3}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. Ta có

$$f'(t)=15+\frac{3(3-4t)}{\sqrt{-8t^2+12t-3}}=3\left(5+\frac{3-4t}{\sqrt{-8t^2+12t-3}}\right).$$

Phương trình $f'(t)=0$ tương đương với

$$\begin{cases}3-4t\leqslant 0\\ 25=\dfrac{(3-4t)^2}{-8t^2+12t-3}\end{cases}$$

hay

$$\begin{cases}t\geqslant\dfrac{3}{4}\\ 25(-8t^2+12t-3)=16t^2-24t+9\end{cases}$$

Sau khi thu gọn, hệ này có thể viết lại thành

$$\begin{cases} t \geqslant \dfrac{3}{4} \\ 12(18t^2 - 27t + 7) = 0 \end{cases}$$

hay tương đương

$$\begin{cases} t \geqslant \dfrac{3}{4} \\ 12(3t - 1)(6t - 7) = 0 \end{cases}$$

Từ đây, ta dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = \frac{7}{6}$. Và như thế, ta có bảng biến thiên của $f(t)$ trên $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$ như sau

t	$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{7}{6}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{35-15\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{31}{2}$	$\searrow$	$\frac{35+15\sqrt{3}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$P = f(t) \leqslant f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{31}{2}, \quad \forall t \in \left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = X_1$, $b = X_2$ và $t = \frac{1}{c} = \frac{7}{6}$, tức $a = \frac{19}{7}$, $b = \frac{17}{7}$, $c = \frac{6}{7}$. Và vì đẳng thức có thể đạt được nên ta đi đến kết luận $\max P = \frac{31}{2}$.

(b) *Tìm* $\min P$. Bằng cách xét tương tự như (a), ta dễ dàng tìm được $\min P = 2$ đạt được khi $a = 1$, $b = 2$ và $c = 3$. (Lời giải chi tiết xin được dành lại cho bạn đọc.) □

Ví dụ 4 (Đề thi Đại học khối A, năm 2006)**.** *Xét các cặp số thực khác không x, y thỏa mãn điều kiện $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Lời giải. Đặt $S = x + y$ và $P = xy$ thì từ giả thiết ta có $SP = S^2 - 3P$, hay

$$P(S + 3) = S^2.$$

Nếu $S = -3$ thì từ phương trình này, ta có $9 = S^2 = P(S + 3) = 0$, vô lý. Do đó $S \neq -3$. Tương tự, ta cũng thấy rằng không thể xảy ra trường hợp $S = 0$. Vậy ta phải có $S \neq -3$ và $S \neq 0$. Khi đó, phương trình trên có thể viết lại thành

$$P = \frac{S^2}{S + 3}.$$

Do $S^2 \geqslant 4P$ nên ta có $S^2 \geqslant \frac{4S^2}{S+3}$, tức $S < -3 \vee S \geqslant 1$ (chú ý rằng $S \neq 0$). Bây giờ, ta biến đổi biểu thức A như sau

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3} = \frac{(x + y) \cdot xy(x + y)}{x^3 y^3} \\ &= \frac{(x + y)^2}{x^2 y^2} = \frac{S^2}{P^2} = \frac{S^2}{\left(\frac{S^2}{S+3}\right)^2} = \frac{(S + 3)^2}{S^2} = \left(1 + \frac{3}{S}\right)^2. \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{1}{S}$ thì ta có $t \in \left(-\frac{1}{3},\, 1\right] \setminus \{0\}$ (do $S < -3 \vee S \geqslant 1$) và

$$A = (1+3t)^2.$$

Xét hàm số $f(t) = (1+3t)^2$ trên miền $\left(-\frac{1}{3},\, 1\right]$. Rõ ràng $f(t)$ liên tục và khả vi trên miền này. Ngoài ra, ta cũng có

$$f'(t) = 2(1+3t) > 0, \quad \forall t \in \left(-\frac{1}{3},\, 1\right].$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\frac{1}{3},\, 1\right]$. Suy ra

$$f(t) \leqslant f(1) = 16, \quad \forall t \in \left(-\frac{1}{3},\, 1\right].$$

Từ đây ta suy ra ngay $A = f(t) \leqslant 16$, và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{S} = 1$, $P = \frac{S^2}{S+3}$, tức $x = y = \frac{1}{2}$. Kết hợp các lập luận lại, ta đi đến kết luận $\max P = 16$. □

Ví dụ 5. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$Q = (x^3+1)(y^3+1).$$

Lời giải. Đặt $S = x + y = 1$ và $P = xy$ thì ta có $P \leqslant \frac{1}{4}$ và

$$\begin{aligned} Q &= x^3y^3 + (x^3+y^3) + 1 = P^3 + (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= P^3 + S(S^2 - 3P) + 1 = P^3 - 3P + 2. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(P) = P^3 - 3P + 2$ với $P \leqslant \frac{1}{4}$. Ta có

$$f'(P) = 3P^2 - 3.$$

Dễ thấy trên $\left(-\infty,\, \frac{1}{4}\right]$, phương trình $f'(P) = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $P = -1$. Từ đây, ta có bảng biến thiên của $f(P)$ như sau

P	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$
$f'(P)$		$+$	0	$-$	
$f(P)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{81}{64}$

Dựa vào kết quả thu được từ bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra

$$Q = f(P) \leqslant f(-1) = 4, \quad \forall P \leqslant \frac{1}{4}$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S = 1$, $P = -1$, tức $(x,\, y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$. Cuối cùng, ta đi đến kết luận cho bài toán là $\max Q = 4$. □

Ví dụ 6. *Cho a, b là hai số thực khác không và luôn thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$Q = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Lời giải. Đặt $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ thì ta có

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = S^2 - 2$$

và

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = (S^2 - 2)^2 - 2.$$

Do đó

$$Q = \left[(S^2-2)^2 - 2\right] - (S^2 - 2) + S = S^4 - 5S^2 + S + 4.$$

Mặt khác, vì $S^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}} + 2 = 4$ nên ta có $|S| \geqslant 2$. Như vậy, ta cần phải xét hàm $f(S) = S^4 - 5S^2 + S + 4$ trên miền $\mathbb{I} = (-\infty,\, -2] \cup [2,\, +\infty)$. Ta có

$$f'(S) = 4S^3 - 10S + 1$$

và

$$f''(S) = 12S^2 - 10 > 0 \text{ (do } S^2 \geqslant 4).$$

Từ đây suy ra $f'(S)$ là hàm liên tục và đồng biến trên từng khoảng con $(-\infty,\, -2]$, $[2,\, +\infty)$. Cụ thể hơn,

- Nếu $S \in [2,\, +\infty)$ thì ta có $f'(S) \geqslant f'(2) = 13 > 0$ nên $f(S)$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[2,\, +\infty)$. Suy ra
$$f(S) \geqslant f(2) = 2, \quad \forall S \in [2,\, +\infty).$$

- Nếu $S \in (-\infty,\, -2]$ thì ta có $f'(S) \leqslant f'(-2) = -11 < 0$. Suy ra $f(S)$ là hàm liên tục và nghịch biến trên $(-\infty,\, -2]$. Điều này dẫn đến
$$f(S) \geqslant f(-2) = -2, \quad \forall S \in (-\infty,\, -2].$$

Từ kết quả của hai trường hợp vừa xét, ta thấy ngay

$$Q \geqslant -2, \quad \forall S \in \mathbb{I}$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S = -2$, tức $a = -b$. Vậy $\min Q = -2$. □

3 Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên miền xác định của chúng:

(a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$;

(b) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$;

(c) $y = \dfrac{4x}{1+x^4}$;

(d) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của

(a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên $\left[-2,\, \frac{5}{2}\right]$;

(b) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{17-x}$ trên $[3,\, 8]$;

(c) $y = x^2 \ln x$ trên $[1,\, e]$;

(d) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên $[1,\, e^3]$;

(e) $y = xe^{-x}$ trên $[0,\, +\infty)$;

(f) $y = \sin x \sin 2x$ trên $\mathbb{R}$;

(g) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$ trên $(1,\, 3]$;

(h) $y = \dfrac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$ trên $\mathbb{R}$;

(i) $y = \sqrt{22+4x-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}$ trên miền xác định của nó;

(j) $y = x + \sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định của nó.

Bài tập 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của

(a) $y = |x^2 - 3x + 2| + 3x + 4$ trên $\mathbb{R}$;

(b) $y = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ với $|x| \leqslant 5$;

(c) $y = |x| + \left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right|$ với $x \neq -3$;

(d) $y = |x| + \left|\dfrac{x^2-4x+3}{x+3}\right|$ với $x \neq -3$.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên miền xác định của chúng

(a) $y = \sin x + 3\sin^2 x$;

(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$;

(c) $y = 2\sin^2 8x + \cos^4 2x$;

(d) $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + \sqrt{6}\sin x$.

Bài tập 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x\left(1993 + \sqrt{1995 - x^2}\right)$$

trên tập xác định của nó.

Bài tập 6. Chứng minh rằng với mọi $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ta đều có

(a) $\sin x < x$;

(b) $\tan x > x$;

(c) $2\sin x + \tan x > 3x$;

(d) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$;

(e) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sqrt{17} \leqslant \sqrt{\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 6} + \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 3} \leqslant \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

Bài tập 8. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin x + 2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\sin\frac{x}{2}} \geqslant 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài tập 9 (Đề thi Đại học khối B, năm 2005)**.** Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geqslant 3^x + 4^x + 5^x.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng với mọi $0 \leqslant x \leqslant 1$, bất đẳng thức sau đúng

$$x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant 16.$$

Bài tập 11. Cho các số không âm x, y thỏa mãn $2x + 3y = 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2.$$

Bài tập 12. Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

(a) $S = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{4y}$;

(b) $P = \dfrac{4x+y}{xy} + \dfrac{2x-y}{4}$.

Bài tập 13 (Đề thi Cao đẳng khối A, năm 2010)**.** Cho hai số thực dương thay đổi x, y thỏa mãn $3x + y \leqslant 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Bài tập 14. Giả sử phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$, $m \neq 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x_1^3 + x_2^3.$$

Bài tập 15. Giả sử phương trình $x^2 - 2kx + 2k^2 + \frac{4}{k^2} - 5 = 0$, ẩn x, có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Bài tập 16. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy + \frac{1}{xy}.$$

Bài tập 17. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{a + b + 1}.$$

Bài tập 18 (Đề thi Cao đẳng khối A, năm 2008)**.** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy.$$

Bài tập 19. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1}.$$

Bài tập 20. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2xy(xy - 1) + 3}{x^2 + y^2 - 3}.$$

Bài tập 21. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x - 3\sqrt{x + 1} = 3\sqrt{y + 2} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x + y.$$

Bài tập 22. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Bài tập 23. Cho hàm số $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\tan 2x) = \tan^4 x + \frac{1}{\tan^4 x}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(\sin x) + f(\cos x)$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ là 196.

Bài tập 24. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $a+b+c = 4$ và $abc = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 + c^4.$$

Bài tập 25 (Đề thi Đại học khối B, năm 2008)**.** Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Hết phần 1 của bài viết... Mời các bạn đón đọc các phần tiếp theo ở các lần quay video tiếp. Have fun!