ĐỀ THI THỬ VMF SỐ 6

<u>Thí sinh</u>: Tomoyochan3

<u>Câu I:</u>

1/Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

-Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

-Sự biến thiên của hàm số:

+ Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

+ Bảng biến thiên:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ và $x = 2$

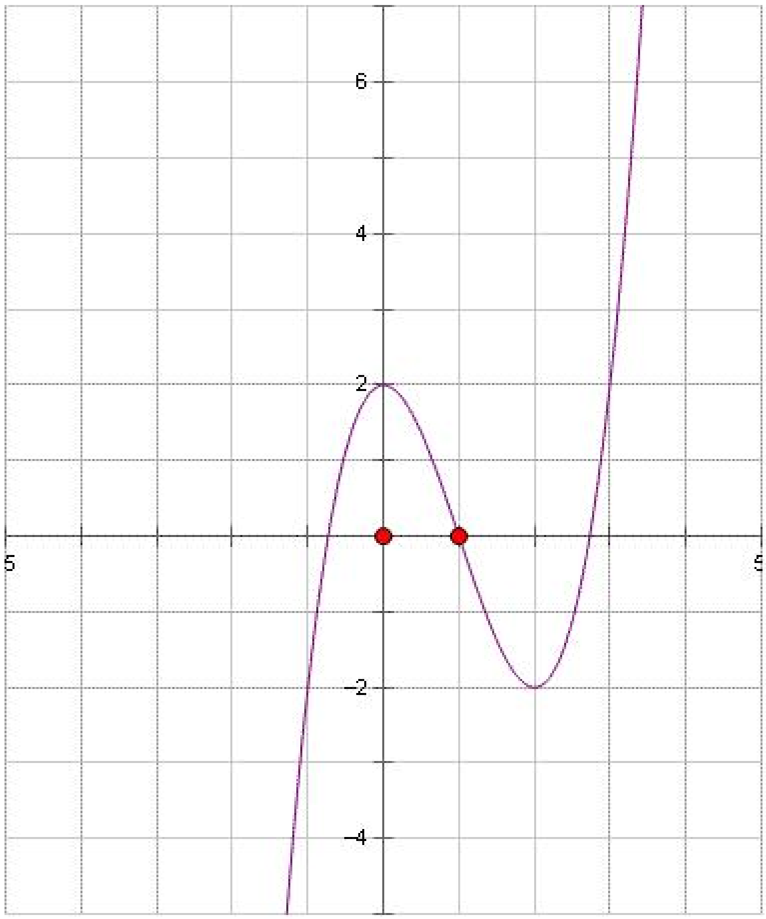
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			2				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

+Hàm số đồng biến trên ($-\infty$,0) và (2, $+\infty$) ; nghịch biến trên (0,2)

+Hàm số đạt cực đại tại x=0, giá trị cực đại y=2

+Hàm số đạt cực tiểu tại x=2, giá trị cực tiểu y=-2

-Đồ thị hàm số:



2/ Gọi $A(x_0, y_0)$ là một điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số. Khi đó

$AB^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 + 4)^2$

Xét :

- $x_0 \in [-1, +\infty)$, dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $y_0 \geq -2 \Leftrightarrow (y_0 + 4)^2 \geq 4 \Leftrightarrow AB \geq 2$
- $x_0 \in (-\infty, -1)$, thì khi đó $x_0 - 2 < -3 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 > 9 \Leftrightarrow AB > 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $AB = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$

Điểm A cần tìm là $A(2, -2)$

<u>Câu II:</u>

1/ Điều kiện xác định : $4\cos^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\frac{4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 4\sqrt{3}\sin x.\cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 4\sqrt{3}\sin x.\cos x - 3 = 4\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Dựa vào điều kiện xác định cả hai họ nghiệm này đều không thỏa mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm

2/

$$\sqrt{6}(x^2 - 3x+1) + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq -\sqrt{6}(x^2 - 3x+1)$$

Để bất phương trình có nghiệm thì

$$-\sqrt{6}(x^2 - 3x+1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}^{(1)}$$

Do $x > 0$ nên chia cả hai vế bất phương trình cho x ta được:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}\le -\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1} \\ v=-\left(x+\frac{1}{x}-3\right) \end{cases}$ $u,v\ge 0$ ta được

$$\begin{cases} u^2-1=(3-v)^2-2 \\ u\le \sqrt{6}v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2=v^2-6v+8 \\ u^2\le 6v^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v^2-6v+8\le 6v^2$$

$$\Leftrightarrow 5v^2+6v-8\le 0$$

$$\Leftrightarrow -2\le v\le \frac{4}{5}$$

Với $0\le v\le \frac{4}{5}$ ta có

$$-\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\le \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-11x+5\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11-\sqrt{21}}{10}\le x\le \frac{11+\sqrt{21}}{10}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta được nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{11-\sqrt{21}}{10}\le x\le \frac{11+\sqrt{21}}{10}$$

<u>Câu III:</u>

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\sin x}{1+\cos x}dx$$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ ta có

$$dt=d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}(t^2+1)dx$$

$$\rightarrow dx=\frac{2dt}{t^2+1}$$

$$x=\frac{\pi}{3},t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{\pi}{2},t=1$$

Ta có

$$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{2+\frac{2t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}}.\frac{2dt}{t^2+1}$$

$$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{2(t^2+t+1)}{t^2+1}dt$$

$$I=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\left(1+\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$I=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\right)dt$$

$$I=2\left[t+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]\Bigg\|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$

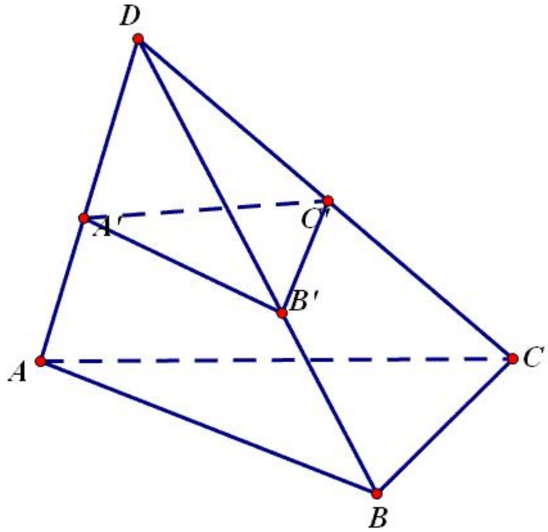
$$I=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{3}{2}$$

Câu IV:

Chứng minh bài toán phụ:

Cho tứ diện ABCD.Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc DA, DB. DC. Chứng minh rằng:

$$\frac{V_{DA'B'C'}}{V_{DABC}}=\frac{DA'}{DA}.\frac{DB'}{DB}.\frac{DC'}{DC}$$



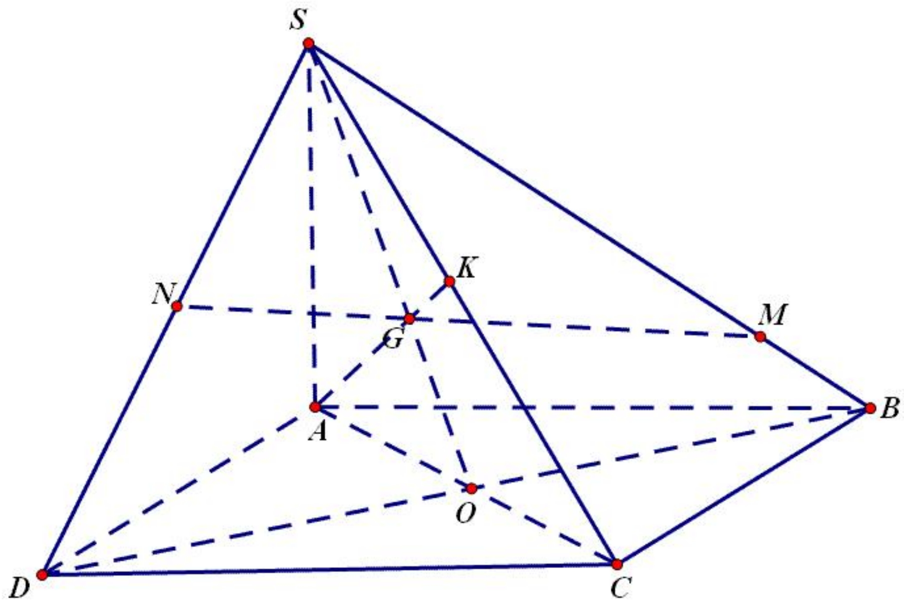
Ta có:

$$\frac{d_{(C',(DAB))}}{d_{(C,(DAB))}} = \frac{DC'}{DC}$$

$$\frac{S_{\Delta DA'B'}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{DA'}{DA}.\frac{DB'}{DB}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{DA'B'C'}}{V_{DABC}} = \frac{d_{(C',(DAB))}}{d_{(C,(DAB))}}.\frac{S_{\Delta DA'B'}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{DA'}{DA}.\frac{DB'}{DB}.\frac{DC'}{DC}$$

(đpcm)



Ta có: Kéo dài AG cắt SC tại K.

$K = SC \cap (SMN)$

Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y(x, y > 0)$.Do G là trọng tâm của tam giác SBD và OA=OC, OB=OD nên G cũng là trọng tâm của tam giác SAC, nên SK=KC.

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được:

$$V_{S.AMKN} = V_{S.AMN} + V_{S.KMN}$$
$$= \frac{SN}{SD}.\frac{SM}{SB}.V_{S.ABD} + \frac{SN}{SD}.\frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC}.V_{S.CBD}$$
$$= xy.\frac{1}{2}V_{SABCD} + \frac{xy}{2}.\frac{1}{2}V_{SABCD}$$
$$= \frac{3}{4}xy.V_{SABCD}$$

Mặt khác

$$V_{S.AMKN} = V_{S.ANK} + V_{S.AMK}$$
$$= \frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC}.V_{S.ACD} + \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC}.V_{S.ACB}$$
$$= \frac{y}{2}.\frac{1}{2}V_{SABCD} + \frac{x}{2}.\frac{1}{2}V_{SABCD}$$
$$= \frac{x+y}{4}V_{SABCD}$$

Nên ta có $x+y=3xy$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được

$$x+y\ge 2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow 3xy\ge 2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow xy\ge \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

Lại có

$$V_{S.AMKN}=\frac{3xy}{4}.V_{S.ABCD}\ge \frac{3}{4}.\frac{4}{9}.V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.V_{S.ABCD}=\frac{abc}{9}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $V_{S.AMKN}=\frac{abc}{9}$ khi và chỉ khi $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SC}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$

<u>Câu V:</u>

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Mặt khác theo giả thiết lại có

$$a^2+b^2+c^2\le \frac{3}{4}$$

Nên $abc\le \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{1}{8}$

Ta có:

$$P=(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}+3.\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)2}}$$
$$\Leftrightarrow P\ge 8abc+3.\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)2}}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ do $abc\le\frac{1}{8}$ nên $t\ge\sqrt[3]{8}=2$ ta được:

$$P \ge 3t^2 + \frac{8}{t^3} = \frac{t^2}{8} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^2}{8} + \frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^3} + \frac{21}{8}t^2 \ge 5.\sqrt[5]{\left(\frac{t^2}{8}\right)^3 . \left(\frac{4}{t^3}\right)^2} + \frac{21}{8}t^2$$

$$\Leftrightarrow P \ge \frac{5}{2} + \frac{21}{8}t^2 \ge \frac{5}{2} + \frac{21}{8}.2^2 = 13$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P =13 khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$

<u>Câu VIa:</u>

1/Ta có:

$$AB = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-7)^2} = 5\sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{(4+4)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{5}$$
$$AC = \sqrt{(-4+1)^2 + (1-7)^2} = 3\sqrt{5}$$

Nhận thấy do : $AB^2 = BC^2 + CA^2$ nên tam giác ABC vuông tại C.Bán kính đường tròn nội tiếp:

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{CB.CA}{AB + BC + CA} = \sqrt{5}$$

Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.Ta có:

Phương trình đường thẳng AC là:

$$(AC): \frac{x+1}{-4+1} = \frac{y-7}{1-7}$$
$$\Leftrightarrow (AC): 2x - y + 9 = 0$$

Phương trình đường thẳng BC là:

$$(BC): \frac{x-4}{-4-4} = \frac{y+3}{1+3}$$
$$\Leftrightarrow (BC): x + 2y + 2 = 0$$

Phương trình đường thẳng AB là:

$$(AB): \frac{x+1}{4+1} = \frac{y-7}{-3-7}$$
$$\Leftrightarrow (AB): 2x + y - 5 = 0$$

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên :

$$d_{(I,AC)} = d_{(I,BC)} = d_{(I,AB)} = \sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|2x_I - y_I + 9|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|x_I + 2y_I + 2|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{|2x_I + y_I - 5|}{\sqrt{2^2+1}} = \sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

$$(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

2/

Gọi giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ là $M(-t, 3t+2, 2t-3)$.Do $M \in (P)$ nên :

$$2.(-t) + (3t+2) + 3(2t-3) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{7}$$
$$\Leftrightarrow M\left(-\frac{8}{7}, \frac{38}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

Điểm $A(0,2,-3)$ thuộc đường thẳng Δ có hình chiếu theo phương (d) là điểm A’ xuống mặt phẳng (P).

$$\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{u_d}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = k \\ y_{A'} = -3k+2 \\ z_{A'} = -k-3 \end{cases}$$
$$A' \in (P) \Leftrightarrow 2k + (-3k+2) + 3(-k-3) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -2$$
$$\Leftrightarrow A'(-2, 8, -1)$$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ' là hình chiếu theo phương d của Δ xuống mặt phẳng (P) là

$\overrightarrow{u_{\Delta'}} = \overrightarrow{MA'} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ hay $\overrightarrow{u_{\Delta'}} = (3, -9, 1)$.

Vậy phương trình hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) theo phương d là:

$$\Delta': \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -9t + 8 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

<u>Câu VI.b:</u>

Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi$.Ta có

$$\begin{aligned} z_1 &= (2 - z)(i + \overline{z}) \\ z_1 &= (2 - a - bi)(i + a - bi) \\ z_1 &= a(2 - a) + b(1 - b) - \left[(2 - a)(1 - b) - ab\right]i \end{aligned}.$$

Để z_1 là số thuần ảo thì

$$\begin{cases} a(2 - a) + b(1 - b) = 0 \\ \left[(2 - a)(1 - b) - ab\right] \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2\text{a} + b^2 - b = 0 \\ a + 2b + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + (b - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ a + 2b + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Số phức z được biểu diễn trong mặt phẳng phức là điểm có tọa độ $z(x, y)$ khi đó tập hợp các số phức z là hình tròn thỏa mãn:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ x + 2y \neq -2 \end{cases}$$