



Câu 1: (4 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2 y - xy^2 = 2 \end{cases}$.
- 2) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (x là ẩn số).
- a. Tìm m để phương trình có nghiệm.
- b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$.

Câu 2: (4 điểm)

- 1) Thu gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{45+27\sqrt{2}} + \sqrt{45-27\sqrt{2}}}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}}$.
- 2) Cho x, y, z là ba số dương thỏa điều kiện $xyz = 2$. Tính giá trị của biểu thức:
- $$B = \frac{x}{xy+x+2} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{2z}{zx+2z+2}.$$

Câu 3: (2 điểm)

- 1) Cho ba số thực a, b, c . Chứng minh:
- $$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}.$$
- 2) Cho $a > 0$ và $b < 0$. Chứng minh: $\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b} + \frac{8}{2a-b}$.

Câu 4: (2 điểm)

- 1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 5 \end{cases}$ (a, b nguyên dương và a khác b).

Tìm a, b để hệ có nghiệm $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương.

- 2) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}.$$

Câu 5: (3 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD (M, D thuộc BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F . Chứng minh $BE = CF$.

Câu 6: (3 điểm)

Cho $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\angle BAD = 2\angle MAN$. Tính các góc của hình thoi $ABCD$.

Câu 7: (2 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \frac{1}{8}$.

BÀI GIẢI GỢI Ý

Câu 1:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-y) + 1 - y = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(1-y) = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \vee x = 2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(-1; 1)$, $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Ta có: $\Delta' = 16 - 4m^2$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 5m^2 - 16$.

$$\begin{aligned}
 \text{Do đó } A &= x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17) \\
 &= 5(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2) \\
 &= 5[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2) \\
 &= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 17(x_1 + x_2) \\
 &= 20m^2 - 4(5m^2 - 16) - 17.2m \\
 &= -34m + 64.
 \end{aligned}$$

Vì $-2 \leq m \leq 2$ nên $-4 \leq A \leq 132$.

Khi $m = 2$ thì $A = -4$ và khi $m = -2$ thì $A = 132$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -4 và giá trị lớn nhất của A là 132 .

Câu 2:

$$1) \text{ Thu gọn biểu thức } A = \frac{\sqrt{45+27\sqrt{2}} + \sqrt{45-27\sqrt{2}}}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}}.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{45+27\sqrt{2}} + \sqrt{45-27\sqrt{2}} = 3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Do đó: } A &= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})^2}{6\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}})^2}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{10+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{6+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

2) Cho x, y, z là ba số dương thỏa điều kiện $xyz = 2$.

$$\text{Ta có: } B = \frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{xyz+xy+x} + \frac{2xyz}{xyzx+2xyz+2xy}$$

$$= \frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{2+xy+x} + \frac{2.2}{2x+2.2+2xy}$$

$$= \frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{2+xy+x} + \frac{2}{x+2+xy} = \frac{x+xy+2}{xy+x+2} = 1.$$

Câu 3:

1) Cho ba số thực a, b, c. Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca + \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{2(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2009} \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

2) Ta có:

$$\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b} + \frac{8}{2a-b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{b} - \frac{8}{2a-b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-2a}{ab} - \frac{8}{2a-b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(b-2a)^2 - 8}{ab(2a-b)} \geq 0 \text{ (Đúng vì tử luôn âm và mẫu cũng luôn âm, do } a > 0 \text{ và } b < 0).$$

Câu 4:

1) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} ax+by=5 & (1) \\ bx+ay=5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta được $(a-b)(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (do $a \neq b$)

Thay vào (1) ta được: $x = \frac{5}{a+b} \Rightarrow y = \frac{5}{a+b}.$

Do x là số nguyên và a, b nguyên dương nên a + b là ước nguyên dương ≥ 2 của 5.

Suy ra $a + b = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}.$

2)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 & (1) \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 & (2) \end{cases} (*)$$

Giả sử rằng tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa (*).

Nhân hai vế của (1) với 8 rồi cộng vào (2) ta được:

$$9x^2 - 23xy + 24y^2 = 348 \Leftrightarrow 5(2x^2 - 5xy + 5y^2) = (x-y)^2 + 348 \quad (3)$$

Ta có:

* $5(2x^2 - 5xy + 5y^2)$ chia hết cho 5;

* $(x-y)^2$ chia cho 5 hoặc dư 0, hoặc dư 1 hoặc dư 4;

* 348 chia 5 dư 3.

Suy ra: * Vế trái của (3) chia hết cho 5 (4)

* Vế phải của (3) chia cho 5 có dư hoặc là 3, hoặc là 4 hoặc là 2 (5)

Từ (4) và (5) suy ra mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ (*).

Câu 5:

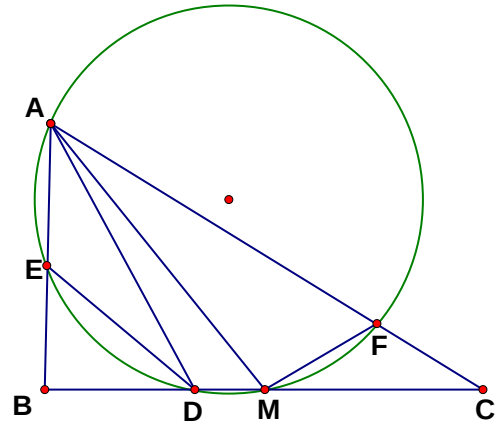
Ta có:

$$\triangleright \triangle CFM \sim \triangle CDA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA} \quad (1)$$

$$\triangleright \triangle BED \sim \triangle BMA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BA} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} AD \text{ là phân giác góc } A &\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \\ &\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB} \quad (3) \end{aligned}$$

Do M là trung điểm của BC nên $BM = CM$
Kết hợp với (1), (2) và (3) ta được: $CF = BE$.



Câu 6:

Trong nửa mp bờ AD không chứa điểm B, lấy điểm E sao cho:

$$AE = AM \text{ và } \angle DAE = \angle BAM$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ABM \Rightarrow DE = BM, \angle ADE = \angle ABM$$

$$\text{Mà } ABCD \text{ là hình thoi} \Rightarrow \angle ADN = \angle ABM \Rightarrow \angle ADE = \angle ADN \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \angle BAD = 2\angle MAN$$

$$\Rightarrow \angle MAN = \angle BAM + \angle NAD = \angle DAE + \angle NAD = \angle EAN$$

Xét hai tam giác ANM và ANE có:

$$\angle MAN = \angle EAN, AM = AE \text{ và } AN \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ANM = \triangle ANE \Rightarrow NE = NM.$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} 2 &= CM + CN + MN = CM + CN + NE \\ \text{mà } 2 &= CB + CD = CM + MB + CN + ND \\ &= CM + DE + CN + ND \end{aligned}$$

$$\Rightarrow CM + CN + NE = CM + DE + CN + ND$$

$$\Rightarrow NE = ND + DE \Rightarrow D \text{ thuộc đoạn } NE \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \angle ADE = \angle ADN = 90^\circ.$$

Suy ra: Hình thoi ABCD có $\angle ADC = 90^\circ$ nên là hình vuông.

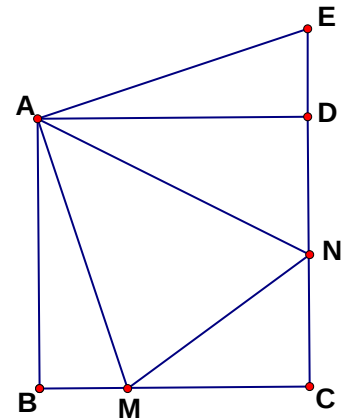
Vậy các góc của hình thoi ABCD bằng 90° .

Câu 7: Ta có:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{2b}{1+b} = 1 - \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow \frac{2b}{1+b} = \frac{1}{1+a} \Leftrightarrow \frac{1+b}{2b} = 1+a \Leftrightarrow a = \frac{1-b}{2b}.$$

Do đó:

$$ab^2 = \frac{1-b}{2b} \cdot b^2 = \frac{(1-b)b}{2} = \frac{1}{2} \left[-\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \leq \frac{1}{8}. \text{ Vậy } ab^2 \leq \frac{1}{8}.$$



Người giải đề thi: **Thạc sĩ NGUYỄN DUY HIẾU – NGUYỄN PHÚ SĨ**
(Tổ trưởng tổ Toán, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM)