

Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị

BẤT ĐẲNG THỨC BẤT ĐẲNG THỨC

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

The Inequalities Trigonometry

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^3 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

$$\frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

Lời mở đầu

“Nơi vật lý và hoá học dừng chân chính là nơi toán học bắt đầu”

Toán học mang một sự bao la phong phú vô tận của khoa học tự nhiên. Toán học như một bầu trời đêm thăm thẳm đầy sao lấp lánh. Một trong những ngôi sao sáng nhất là ngôi sao mang tên **“Bất đẳng thức”**.

Bất đẳng thức là một lĩnh vực đặc sắc. Đây là sự kết hợp hoàn hảo giữa **Đại số** và **Hình học**. Một vấn đề đã mang lại bao hứng thú cho các nhà toán học, cho giáo viên dạy toán, cho học sinh giỏi toán khắp mọi nơi. Tất cả đều mang nét quyến rũ bí ẩn đặc trưng của toán học. Vì vậy vấn đề hấp dẫn này sẽ mãi là đề tài nghiên cứu và khám phá cho mọi thế hệ người học toán trong quá khứ, hiện tại và tương lai.

Đọc đến đây có lẽ bạn đọc cho rằng tác giả hơi quá lời. Nhưng sự thật là vậy ! Sau khi đọc chuyên đề này, bạn đọc sẽ đồng ý với tác giả. Chuyên đề **“Bất đẳng thức”** sẽ đưa chúng ta từ những bất đẳng thức cơ bản để chứng minh đến những bài toán gay go phức tạp, từ phương pháp cổ điển quen thuộc đến phương pháp hiện đại mới mẻ. Vì vậy chuyên đề phù hợp cho mọi trình độ người đọc.

Chuyên đề **“Bất đẳng thức”** được chia làm 6 chương :

Chương 1: *Các bước đầu cơ sở.*

Chương này tác giả trang bị cho người đọc những “vật dụng” cần thiết cho việc chứng minh bất đẳng thức.

Chương 2: *Các phương pháp chứng minh.*

Chương sẽ bao gồm hầu như toàn bộ các phương pháp thường dùng khi chứng minh bất đẳng thức.

Chương 3: *Áp dụng vào một số vấn đề khác.*

Các bất đẳng thức được vận dụng để giải quyết một số vấn đề khác trong giải phương trình, định tính tam giác, ...

Chương 4: *Một số chuyên đề, bài viết hay, thú vị liên quan đến bất đẳng thức.*

Chương 5: *Bất đẳng thức như thế nào là hay ?*

Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức?

Đây lại là một chương thú vị về quan niệm bất đẳng thức của tác giả và một số ý kiến quan điểm của giáo viên toán, học sinh giỏi toán quen thân với tác giả được thu thập và trình bày.

Chương 6: *Hướng dẫn giải bài tập.*

Trong từng phần của các chương đều có các bài tập tương tự với bài toán được trình bày trong chương đó để có thể luyện tập. Chương này sẽ là chương để trình bày lời giải hoặc hướng dẫn cho các bài tập này.

Mong rằng chuyên đề “**Bất đẳng thức**” sẽ trở thành người bạn đồng hành trên con đường khám phá vẻ đẹp “*Toán học muôn màu*” của bạn đọc.

Cuối cùng chân thành gửi lời cảm ơn đến các bạn HS chuyên toán khóa 2008 – 2011 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị đã ủng hộ và hỗ trợ giúp cho chuyên đề trở nên phong phú đa dạng hơn.

Và cũng chân thành cảm ơn các cựu học sinh chuyên toán:

- Trương Hữu Hà Ninh (*HS chuyên Toán khóa 2002 – 2005 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị*).

- Trương Hữu Đông Hà (*HS chuyên Toán khóa 2000-2003 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị*)

Và thầy giáo:

- Nguyễn Văn Hiền (*GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị*).

Đã giúp đỡ, đóng góp ý kiến để chuyên đề tốt hơn.

Quảng Trị, ngày 25 tháng 02 năm 2009

*HS tổ 4, lớp chuyên toán khóa 2008 – 2011
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị*

Mọi thắc mắc, ý kiến đóng góp về chuyên đề “**Bất đẳng thức**” xin gửi cho tác giả theo email : truonggiang250293@yahoo.com hay nick **truonggiang250293** trên www.diendantoanhoc.net, www.mathnfriend.net và www.diendan3t.net

Trong chuyên đề này, ta dùng gần như xuyên suốt các ký hiệu sau đây :

ΔABC : tam giác ABC

A, B, C : các góc của tam giác ABC

a, b, c : các cạnh đối diện lần lượt với các góc A, B, C

h_a, h_b, h_c : các đường cao ứng với các cạnh

m_a, m_b, m_c : các đường trung tuyến ứng với các cạnh

l_a, l_b, l_c : các đường phân giác ứng với các góc

p, r, R, S nửa chu vi , bán kính nội tiếp, bán kính ngoại tiếp, diện tích tam giác ABC

r_a, r_b, r_c bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc

CMR : chứng minh rằng

Đpcm : điều phải chứng minh.

BĐT: bất đẳng thức

VP: vế phải

VT: vế trái

$\Rightarrow$: suy ra

$\Leftrightarrow$: tương đương

$\forall$: với mọi

Chương 1 :

CÁC BƯỚC ĐẦU CƠ SỞ

Để bắt đầu một cuộc hành trình, ta không thể không chuẩn bị hành trang để lên đường. Toán học cũng vậy. Muốn khám phá được cái hay và cái đẹp của bất đẳng thức, ta cần có những “vật dụng” chắc chắn và hữu dụng, đó chính là chương 1: “**Các bước đầu cơ sở**”.

Chương này tổng quát những kiến thức cơ bản cần có để chứng minh bất đẳng thức. Theo kinh nghiệm cá nhân của mình, tác giả cho rằng những kiến thức này là đầy đủ cho một cuộc “hành trình”.

Trước hết là các bất đẳng thức đại số cơ bản (**AM – GM, BCS, Jensen, Nesbitt,...**) Tiếp theo là các đẳng thức, bất đẳng thức liên quan cơ bản trong tam giác. Cuối cùng là một số định lý khác là công cụ đắc lực trong việc chứng minh bất đẳng thức

Mục lục :

- 1.1. Các bất đẳng thức đại số cơ bản
 - 1.1.1. Bất đẳng thức **Cauchy**
 - 1.1.1.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi của BĐT **Cauchy**
 - 1.1.1.2 Kỹ thuật **Cauchy** ngược dấu
 - 1.1.2. Bất đẳng thức **BunhiaCốpxi**
 - 1.1.2.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi của BĐT **BunhiaCốpxi**
 - 1.1.3. Bất đẳng thức **Jensen**
 - 1.1.4. Bất đẳng thức **Nesbitt**
- 1.2. Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác
 - 1.2.1. Đẳng thức
 - 1.2.2. Bất đẳng thức
- 1.3. Bất đẳng thức đối xứng ba biến
 - 1.3.1 Bất đẳng thức có điều kiện
 - 1.3.2 Bất đẳng thức không có điều kiện
- 1.4. Bài tập

1.1. Các bất đẳng thức cơ bản :

1.1.1. Bất đẳng thức Cauchy :

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta luôn có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Bất đẳng thức Cauchy là một bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rất rộng rãi. Đây là bất đẳng thức mà bạn đọc cần ghi nhớ rõ ràng nhất, nó sẽ là công cụ hoàn hảo cho việc chứng minh các bất đẳng thức. Sau đây là hai cách chứng minh bất đẳng thức này mà theo ý kiến chủ quan của mình, tác giả cho rằng là ngắn gọn và hay nhất.

Chứng minh :

Cách 1 : Quy nạp

Với $n=1$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Khi $n=2$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad (\text{đúng!})$$

Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n=k$ tức là :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

Ta sẽ chứng minh nó đúng với $n=2k$. Thật vậy ta có :

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k})}{2k} &\geq \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k})}}{k} \\ &\geq \frac{\sqrt{(k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k})(k \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}})}}{k} \\ &= \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_{2k}} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh với $n=k-1$. Khi đó :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} &\geq k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \\ &= k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \geq (k-1) \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Cách 2 : (lời giải của Polya)

$$\text{Gọi } A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq A^n \quad (*)$$

Rõ ràng nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = A$ thì $(*)$ có dấu đẳng thức. Giả sử chúng không bằng nhau. Như vậy phải có ít nhất một số, giả sử là $a_1 < A$ và một số khác, giả sử là $a_2 > A$ tức là $a_1 < A < a_2$.

Trong tích $P = a_1 a_2 \dots a_n$ ta hãy thay a_1 bởi $a'_1 = A$ và thay a_2 bởi $a'_2 = a_1 + a_2 - A$. Như vậy $a'_1 + a'_2 = a_1 + a_2$ mà $a'_1 a'_2 - a_1 a_2 = A(a_1 + a_2 - A) - a_1 a_2 = (a_1 - A)(a_2 - A) > 0$
 $\Rightarrow a'_1 a'_2 > a_1 a_2$

$$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_n < a'_1 a'_2 a_3 \dots a_n$$

Trong tích $P' = a'_1 a'_2 a_3 \dots a_n$ có thêm thừa số bằng A . Nếu trong P' còn thừa số khác A thì ta tiếp tục biến đổi để có thêm một thừa số nữa bằng A . Tiếp tục như vậy tối đa $n-1$ lần biến đổi ta đã thay mọi thừa số P bằng A và được tích A^n . Vì trong quá trình biến đổi tích các thừa số tăng dần.
 $\Rightarrow P < A^n \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1:

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. CMR :

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Lời giải :

$$\text{Vì } \tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Tam giác ABC nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C$ dương.

Theo **Cauchy** ta có :

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq 27(\tan A + \tan B + \tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2:

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c. \quad (1.1)$$

Lời giải :

Ta sử dụng BĐT Cauchy như sau:

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a+b}{2};$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } \frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b+c}{2}, \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c+a}{2}.$$

Cộng theo từng vế, các BĐT trên lại với nhau ta được BĐT cần chứng minh.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^3 + b^3 &\geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)},$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}, \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a+b+c)};$$

Cộng các BĐT này lại với nhau theo từng vế ta được BĐT cần chứng minh.

1.1.1.1. Kỹ thuật chọn điểm rơi của BĐT Cauchy

Trong chứng minh bất đẳng thức, đôi khi việc ghép và sử dụng các bất đẳng thức cơ sở không được thuận lợi và dễ dàng. Khi sử dụng liên tiếp nhiều bất đẳng thức ta phải chú ý tới điều kiện để bất đẳng thức xảy ra, để điều kiện này luôn được thỏa mãn suốt quá trình ta sử dụng bất đẳng thức tring gian. Và bất đẳng thức **Cauchy** là một trong những bất đẳng thức đó. Để thấy được kỹ thuật này như thế nào ta sẽ đi vào một số ví dụ sau:

Ví dụ 1 : Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

*Xét bảng biến thiên của $a, \frac{1}{a}$ và S để dự đoán Min S

a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		30
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{30}$
S	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$	$9\frac{1}{9}$	$10\frac{1}{10}$	$11\frac{1}{11}$	$12\frac{1}{12}$		$30\frac{1}{30}$

Nhìn lại bảng biến thiên ta thấy khi a tăng thì S càng lớn và từ đó dẫn đến việc dự đoán khi $a=3$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo sự ấn

tượng ta sẽ nói rằng Min $S = \frac{10}{3}$ đạt tại “Điểm rơi : $a=3$ ”.

Do bất đẳng thức côsi chỉ xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau ,nên tại “Điểm rơi: $a=3$ ”ta không thể sử dụng bất đẳng thức côsi trực tiếp cho 2 số a và $\frac{1}{a}$ vì $3 \neq \frac{1}{3}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng

thức côsi cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ sao cho tại “điểm rơi: $a=3$ ” thì $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ tức là ta có

lược đồ “điểm rơi” sau đây:

Sơ đồ:

$$\boxed{a=3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 9}$$

Từ đó ta biến đổi theo sơ đồ “Điểm rơi” được nêu trên.

***Lời giải:** $S = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3}$

Vậy với $a=3$ thì Min $S = \frac{10}{3}$

Ví dụ 2: Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a^2}$

*Sơ đồ điểm rơi:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$$

$$\boxed{a=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8}$$

***Lời giải:** $S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{6a}{8} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$

Với $a=2$ thì Min $S = \frac{9}{4}$

Ví dụ 3 : Cho $a \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}}$

*Sơ đồ điểm rơi :

$$\boxed{a=6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{\alpha} = \frac{36}{\alpha} \\ \frac{18}{\sqrt{a}} = \frac{18}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{36}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\sqrt{6}}$$

***Lời giải :** $S = a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}} = \left[\frac{a^2}{2\sqrt{6}} + \frac{18}{\sqrt{a}} \right] + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) a^2 \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{18}{\sqrt{a}}} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) a^2$

$$= 6 \cdot \sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{6}}} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) a^2 \geq 6 \cdot \sqrt{\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6}}} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) 6^2 = 36 + 3\sqrt{6}$$

Vậy với $a=6$ thì Min $S = 2a + 3\sqrt{6}$

Ví dụ 4: Cho $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + \frac{1}{a^2}$

*Sơ đồ điểm rơi :

$$\boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a^2} = \frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8}$$

***Lời giải :** $S = 2a + \frac{1}{a^2} = \left(a + a + \frac{1}{8a^2}\right) + \frac{7}{8a^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{8a^2}} + \frac{7}{8a^2}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{8a^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{7 \cdot 4}{8} = 5. \text{ Với } a = \frac{1}{2} \text{ thì Min} S = 5$$

Ví dụ 5: Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

***Phân tích và tìm lời giải :** Biểu thức của S chứa 2 biến số a, b nhưng nếu đặt $t = ab$ hoặc $t = \frac{1}{ab}$ thì $S = t + \frac{1}{t}$ là biểu thức chứa 1 biến số. Khi đổi biến số ta cần phải tìm miền xác định cho biến số mới, cụ thể là:

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{ab} \Rightarrow ab = \frac{1}{t} \text{ và } t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

Bài toán trở thành: Cho $t \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = t + \frac{1}{t}$

***Lời giải :** $S = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{t}{16} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{15t}{16} = \frac{2}{4} + \frac{15t}{16} \geq \frac{2}{4} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}$

Với $t = 4$ hay $a = b = \frac{1}{2}$ thì $\text{Min} S = \frac{17}{4}$

Ví dụ 6: Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

*Phân tích và tìm tòi lời giải: Do S là một biểu thức đối xứng với a, b nên dự đoán $\text{Min} S$ đạt tại $a=b>0$

*Sơ đồ điểm rơi

$$\boxed{a=b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2a}{\alpha a} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

*Lời giải :

$$\begin{aligned} S &= \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Với } a=b>0 \text{ thì } \text{Min } S = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

*Phân tích và tìm tòi lời giải: Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $\text{Min} S$ đạt tại $a=b=c = \frac{1}{2}$

*Sơ đồ điểm rơi:

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a=b=c=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{\alpha b} + \frac{1}{\alpha c} = \frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

*Lời giải : $S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(a+b+c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

$$\geq 6\sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{3}{4} \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) = 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}$$

$$= 3 + \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{a+b+c} \geq 3 + \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min}S=\frac{15}{2}$

1.1.1.2. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu:

Kỹ thuật Cô si ngược dấu là một trong những kỹ thuật hay và khéo léo, mới mẻ và ấn tượng nhất của bất đẳng thức **Cauchy**. Để thấy được điều đó bạn **Trần Tiến Minh** đã thực hiện phần này với các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Ta không thể giải bài này bằng cách dùng BĐT cô si với mẫu số vì bất đẳng sau đó sẽ đổi chiều

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{a}{2b} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2a} \geq \frac{3}{2} \text{ (điều này trái với giả thiết ?)}$$

Ta có thể giải bằng cách khác

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Từ BDT trên, xây dựng hai BDT tương tự với b, c rồi cộng cả ba BDT lại suy ra:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Vì $ab+bc+ca \leq 3$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 4 ta có BDT:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2.$$

Lời giải:

Tương tự như bài trên ta có

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Từ BDT trên, xây dựng 3 BDT tương tự với b, c, d rồi cộng cả 4 BDT lại suy ra

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq a+b+c+d - \frac{ab+bc+cd+da}{2} \geq 2$$

vì ta có $ab+bc+cd+da \leq 4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c, d ta luôn có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Lời giải:

Sử dụng BĐT cô si với hai số dương ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{b}{2}; \frac{c^3}{c^2+d^2} \geq c - \frac{c}{2}; \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq d - \frac{d}{2}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}. (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$

Tương tự như trên ta cũng có một bài toán

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số thực a, b, c, d ta luôn có:

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3} + \frac{b^4}{b^3+2c^3} + \frac{c^4}{c^3+2d^3} + \frac{d^4}{d^3+2a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}.$$

Giải như ví dụ 3:

Sử dụng BĐT cô si cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a^3+b^3+b^3} \geq a - \frac{2ab^3}{3ab^2} = a - \frac{2b}{3}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^4}{b^3+2c^3} \geq b - \frac{2c}{3}; \frac{c^4}{c^3+2d^3} \geq c - \frac{2d}{3}; \frac{d^4}{d^3+2a^3} \geq d - \frac{2a}{3}$$

Cộng vế theo vế các BĐT ta có điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Ví dụ 5: Chứng minh với mọi số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=4$ ta có:

$$\frac{a}{1+bc^2} + \frac{b}{1+cd^2} + \frac{c}{1+da^2} + \frac{d}{1+ab^2} \geq 2.$$

Lời giải:

Theo BĐT cô si cho hai số dương ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+bc^2} &= a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} \\ &\geq a - \frac{b\sqrt{a \cdot a \cdot c}}{2} \geq a - \frac{b(a+ac)}{4} \Rightarrow \frac{a}{1+b^2c} \geq a - \frac{1}{4}(ab+abc) \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có các BĐT sau

$$\frac{b}{1+c^2d} \geq b - \frac{bc+bcd}{4}; \quad \frac{c}{1+d^2a} \geq c - \frac{cd+cda}{4}; \quad \frac{d}{1+a^2b} \geq d - \frac{da+dab}{4}$$

Cộng về theo về các BĐT trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} &\geq \\ a+b+c+d - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab) \end{aligned}$$

Từ BĐT cô si dễ dàng chứng minh được các BĐT :

$$ab+bc+cd+da \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 = 4$$

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{16}(a+b+c+d)^3 = 4$$

Do đó

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq a+b+c+d - 2 = 4 - 2 = 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

$$a+b+c - \frac{2}{3} \left((ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \right) \geq 1 \Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \leq 3$$

BĐT này hiển nhiên đúng vì theo BĐT côsi thì

$a+ab+b \geq 3(ab)^{\frac{2}{3}}$, $b+bc+c \geq 3(bc)^{\frac{2}{3}}$, $c+ca+a \geq 3(ca)^{\frac{2}{3}}$, ngoài ra dễ thấy $3 \geq ab+bc+ca$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

1.1.2. Bất đẳng thức Bunhia Cốpki :

Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta luôn có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Nếu như **Cauchy** là “cánh chim đầu đàn” trong việc chứng minh bất đẳng thức thì **Bunhia Cốpki** lại là “cánh tay phải” hết sức đặc lực. Với **Cauchy** ta luôn phải chú ý điều kiện các biến là không âm, nhưng đối với **Bunhia Cốpki** các biến không bị ràng buộc bởi điều kiện đó, chỉ cần là số thực cũng đúng. Chứng minh bất đẳng thức này cũng rất đơn giản.

Chứng minh :

Cách 1 :

Xét tam thức :

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

Sau khi khai triển ta có :

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Mặt khác vì $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên :

$$\Delta_f \leq 0 \Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad (\text{quy ước nếu } b_i = 0 \text{ thì } a_i = 0)$$

Cách 2 :

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có :

$$\frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \frac{b_i^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \frac{2|a_ib_i|}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}}$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng về cả n bất đẳng thức lại ta có đpcm.

Đây cũng là cách chứng minh hết sức ngắn gọn mà bạn đọc nên ghi nhớ!

Bây giờ với sự tiếp sức của bất đẳng thức **Bunhia Cốpki**, **Cauchy** như được tiếp thêm nguồn sức mạnh, như hồ mọc thêm cánh, như rừng mọc thêm vây, phát huy hiệu quả tầm ảnh hưởng của mình. Hai bất đẳng thức này bù đắp bổ sung hỗ trợ cho nhau trong việc chứng minh bất đẳng thức. Chúng đã “lưỡng long nhất thể”, “song kiếm hợp bích” công phá thành công nhiều bài toán khó.

“Trăm nghe không bằng một thấy”, ta hãy xét các ví dụ để thấy rõ điều này.

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$ và $a \sin x + b \cos y = c$. CMR :

$$\frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2 x}{a} + \frac{1 - \cos^2 y}{b} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} &\geq \frac{c^2}{a^3 + b^3} \quad (*) \end{aligned}$$

Theo **Bunhia Cốpki** thì :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

với
$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{a}} ; & a_2 = \frac{\cos y}{\sqrt{b}} \\ b_1 = a\sqrt{a} ; & b_2 = b\sqrt{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \right) (a^3 + b^3) \geq (a \sin x + b \cos y)^2$$

do $a^3 + b^3 > 0$ và $a \sin x + b \cos y = c \Rightarrow (*)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2} \\ a \sin x + b \cos y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a^2 c}{a^3 + b^3} \\ \cos y = \frac{b^2 c}{a^3 + b^3} \end{cases}$$

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \leq \sqrt[4]{8} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức **BCS** liên tiếp 2 lần ta có :

$$\begin{aligned} (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})^4 &\leq ((1^2 + 1^2)(\cos x + \sin x))^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2)^2 (1^2 + 1^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 8 \\ \Rightarrow \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} &\leq \sqrt[4]{8} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{4}$

1.1.2.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi bất đẳng thức Bunhiacôpski

Cũng như bất đẳng thức **Cauchy** bất đẳng thức này cũng cần có một phương pháp để cân bằng các hệ số khi ta giải các bài toán liên quan đến bất đẳng thức này.

Bất đẳng thức Bunhiacôpski.

*Dạng 1: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$

*Dạng 2: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|$

*Dạng 3: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

Dấu bằng: Dạng 1, dạng 2 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$; dạng 3 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

Ví dụ 1: Cho
$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \geq 6 \end{cases} \quad \text{.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:}$$

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

*Phân tích và tìm tòi lời giải: Xét dạng đặc biệt với $n=2$:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{.Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \geq 0$$

*Ý nghĩa: Chuyển đổi một biểu thức ở trong căn thành một biểu thức khác ở ngoài căn. Xét đánh giá giá định với các số α, β

$$\begin{aligned} & + \left\{ \begin{aligned} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right] (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{b} \right) & (1) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2 \right] (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{c} \right) & (2) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right] (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{a} \right) & (3) \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right]} = S_0 \end{aligned}$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S=S_0$ tại điểm rơi $a=b=c=2$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau:

$$* \text{Sơ đồ: } a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với biến đổi theo “kỹ thuật điểm rơi trong côi” ta có lời giải sau:

***Lời giải đúng:**

$$+ \begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4c + \frac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{15}{4}(a+b+c) + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{15}{4} \cdot 6 + 6\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) = \frac{1}{\sqrt{17} \left(\frac{45}{2} + 3 \right)} = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a=b=c=2 \text{ thì Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ví dụ 2: Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \geq 6 \end{cases} \quad \text{Tìm Min của } S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}}$$

Bình luận và lời giải

***Phân tích để tìm lời giải:** Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha a + \frac{\beta}{\sqrt{b+c}} \quad (1) \\ + \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha b + \frac{\beta}{\sqrt{c+a}} \quad (2) \\ \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right]} (\alpha^2 + \beta^2) \geq \alpha c + \frac{\beta}{\sqrt{a+b}} \quad (3) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot S &\geq \alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \\ \Leftrightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right] = S_0 \end{aligned}$$

Do biểu thức đối xứng với a,b,c nên dự đoán $S=S_0$ tại điểm rơi $a=b=c=2$, khi đó các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời xảy ra dấu bằng tức là có sơ đồ điểm rơi sau đây:

***Sơ đồ điểm rơi:**

$$a=b=c=2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

Từ đó ta có lời giải sau đây:

***Lời giải đúng:**

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4a + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \\ & \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4b + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \\ & \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4c + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \sqrt{17} \cdot S \geq 4(a+b+c) + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \\
 & \geq 4(a+b+c) + \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}}} \geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} \\
 & \geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt[3]{(1^2+1^2+1^2)[(a+b)+(b+c)+(c+a)]}} = 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}} \\
 & = \frac{31}{8}(a+b+c) + \frac{a+b+c}{8} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} \\
 & \geq \frac{31}{8} \cdot 6 + 3\sqrt{\frac{a+b+c}{8} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}} = \frac{93}{4} + \frac{9}{4} = \frac{51}{2} \\
 & \Rightarrow S \geq \frac{51}{2\sqrt{17}} = \frac{3.17}{2.17} = \frac{3.17}{2}. \quad \text{Với } a=b=c=2 \text{ thì min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c+\sqrt{2abc} \geq 10$. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2 a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2 c^2}{4}} \geq 6\sqrt{6}$$

Lời giải:

Dự đoán điểm rơi: $a = b = c = 2$

Sử dụng bất đẳng thức bunhiacôpski có:

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \geq \frac{4}{a} + 9b + ca \\ & \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} \geq \frac{4}{b} + 9c + ab \\ & \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \geq \frac{4}{c} + 9a + bc \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \sqrt{24} \cdot S \geq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 9(a+b+c) + ab + bc + ca \\
 & = \left(\frac{4}{a} + a \right) + \left(\frac{4}{b} + b \right) + \left(\frac{4}{c} + c \right) + (2a + bc) + (2bb + ca) + (2c + ab) + 6(a + b + c) \\
 & \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot a} + 2\sqrt{\frac{4}{b} \cdot b} + 2\sqrt{\frac{4}{c} \cdot c} + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 6(a + b + c) \\
 & = 12 + 6(a + b + c + \sqrt{2abc}) \geq 12 + 6 \cdot 10 = 72 \Rightarrow S \geq 72 / \sqrt{24} = 6\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

1.1.3. Bất đẳng thức Jensen :

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và n điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ tùy ý trên đoạn $[a, b]$ ta có :

i) $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

ii) $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Bất đẳng thức **Cauchy** và bất đẳng thức **Bunhia Cốpski** thật sự là các đại gia trong việc chứng minh bất đẳng thức nói chung. Nhưng riêng đối với chuyên mục bất đẳng thức lượng giác thì đó lại trở thành sân chơi riêng cho bất đẳng thức **Jensen**. Dù có vẻ hơi khó tin nhưng đó là sự thật, đến 75% bất đẳng thức lượng giác ta chỉ cần nói “theo bất đẳng thức Jensen hiển nhiên ta có đpcm”.

Cho $f : R^+ \rightarrow R$ thỏa mãn $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \forall x, y \in R^+$ **Khi đó với mọi** $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ **ta có bất đẳng thức :**

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Sự thật là tác giả chưa từng tiếp xúc với một chứng minh chính thức của bất đẳng thức **Jensen** trong phát biểu có $f''(x)$. Còn việc chứng minh phát biểu thì rất đơn giản. Nó sử dụng phương pháp quy nạp Cauchy. Do đó sẽ không trình bày chứng minh ở đây.

Ngoài ra, ở một số tài liệu có thể gặp khái niệm lỗi lầm khi nhắc tới bất đẳng thức **Jensen**. Nhưng hiện nay trong cộng đồng toán học vẫn chưa quy ước rõ ràng đâu là lỗi, đâu là lầm. Cho nên bạn đọc không nhất thiết quan tâm đến điều đó. Khi chứng minh ta chỉ cần xét $f''(x)$ là đủ để sử dụng bất đẳng thức **Jensen**. Ok! Mặc dù bất đẳng thức **Jensen** không phải là một bất đẳng thức chặt, nhưng khi có dấu hiệu mạnh mẽ của nó thì bạn đọc cứ tùy nghi sử dụng.

Ví dụ 1.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x$ với $x \in (0; \pi)$

Ta có $f''(x) = -\sin x < 0 \forall x \in (0; \pi)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC đều ta có :

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

1.2. Các đẳng thức bất đẳng thức trong tam giác :

Sau đây là hầu hết những đẳng thức, bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác và trong lượng giác được dùng trong chuyên đề này hoặc rất cần thiết cho quá trình học toán của bạn đọc. Ta có thể dùng phần này như một từ điển nhỏ để tra cứu khi cần thiết. Hay cũng có thể chứng minh tất cả các kết quả như là bài tập rèn luyện. Ngoài ra cũng xin nhắc với bạn đọc rằng những kiến thức trong phần này khi áp dụng vào bài tập đều cần thiết được chứng minh lại.

1.2.1. Đẳng thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad a = b \cos C + c \cos B$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \qquad b = c \cos A + a \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad c = a \cos B + b \cos A$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \\ &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr \\ &= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} & l_a &= \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \\ m_b^2 &= \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} & l_b &= \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{c+a} \\ m_c^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} & l_c &= \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b} \end{aligned}$$

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$$

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{R}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

1.2.2. Bất đẳng thức :

$$|a - b| < c < a + b$$

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|c - a| < b < c + a$$

$$a \leq b \Leftrightarrow A \leq B$$

$$b \leq c \Leftrightarrow B \leq C$$

$$c \leq a \Leftrightarrow C \leq A$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$$

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cot A \cot B \cot C \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

1.3. Bất đẳng thức đối xứng ba biến

Bất đẳng thức đối xứng là một trong các phần quan trọng nhất của bất đẳng thức sơ cấp, rất được yêu thích không chỉ với các bạn đã thành thạo mà còn hấp dẫn với những bạn mới bắt đầu. Có lẽ lý do đơn giản là các bất đẳng thức dạng này đều đẹp và rất chuẩn về hình thức.

Dạng tổng quát :

$$f(a, b, c) \geq 0$$

Trong đó $f(a, b, c)$ là hàm đối xứng của 3 biến a, b, c hay nói cách khác

$$f(a, b, c) = f(c, b, a) = f(b, a, c).$$

$$\text{Chẳng hạn : } f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca + 5abc + a^2b^2c^2$$

Tính chất quan trọng nhất của các biểu thức đối xứng là vai trò bình đẳng giữa các biến, và do đó ta có thể sắp xếp lại theo một trật tự tùy ý giá trị các biến số đó trong chứng minh. Các tính chất và định nghĩa này được mở rộng tương tự với các biểu thức của n biến $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

1.3.1. Bất đẳng thức thuần nhất không có điều kiện .

Hàm $f(a, b, c)$ được gọi là thuần nhất với các biến trên miền I nếu nó thỏa mãn điều kiện

$$f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c)$$

với mọi $t, a, b, c \in I$ và k là một hằng số không phụ thuộc vào a, b, c, t mà chỉ phụ thuộc vào bản thân hàm f . Trong phạm vi của đa thức thì một đa thức là thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc.

Chẳng hạn : $f(a, b, c) = a^5bc^3 + a^2b^3c^4 + ab^6c^2$ là đa thức thuần nhất không đối xứng

Ví dụ: một hàm số thuần nhất không là đa thức :

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}} + \frac{x}{x + c}$$

Bất đẳng thức liên quan : Bất đẳng thức **Cauchy** :
 Với mọi số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có bất đẳng thức:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: (Bất đẳng thức Schur). Với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có bất đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) .(1)$$

Lời giải :

Do tính đối xứng của bất đẳng thức ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt $x = a - b, y = b - c$, khi đó (1) trở thành:

$$c(x + y)y - (c + y)xy + (c + x + y)x(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c(x^2 + xy + y^2) + x^2(x + 2y) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì các biến c, x, y đều không âm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hoặc $x = c = 0$ hay $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$

1.3.2: Bất đẳng thức đối xứng có điều kiện :

Các bất đẳng thức đối xứng có điều kiện và không có điều kiện là 2 đối tượng riêng rẽ tồn tại độc lập nhưng thật ra lại có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. Sau đây là một số ví dụ:

Ví dụ 1: CMR với mọi số thực a, b, c không âm thì :

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{8}}$$

Lời giải:

Giả sử $ab + bc + ca = 3$, khi đó $a + b + c \geq 3$ và $abc \leq 1$

Mà $(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$
 $= 3(a + b + c) - abc \geq 8$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} = 1 \leq \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{8}}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 2: CMR với mọi số a, b, c không âm ta luôn có :

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq (ab+bc+ca)\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải:

Giả sử $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$, cần chứng minh :

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 2(ab+bc+ca)$$

Tiếp đó chứng minh 2 bất đẳng thức :

$$ab+bc+ca \leq 3 \quad (1)$$

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 6 \quad (2)$$

Thật vậy, với bất đẳng thức (1) ta có :

$$8 = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{8+abc}{a+b+c}$$

Theo bất đẳng thức **Cauchy** thì :

$$8 = (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq 1$$

$$8 = (a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{2(a+b+c)}{3} \right)^3 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

$$\text{Do đó : } ab+bc+ca \leq \frac{(8+abc)}{3} \leq 3$$

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = (a+b)(b+c)(c+a) - 2abc = 8 - 2abc \geq 6$$

Suy ra đpcm.

1.4. Bài tập :

Bài 1: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Bài 2: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Bài 3: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Bài 4: Chứng minh với mọi số dương a, b, c, d có tổng bằng 3 thì

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d có tổng bằng 4 thì

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{d^2+1} + \frac{d+1}{a^2+1} \geq 4.$$

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương có tổng bằng 4 thì

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$ và $a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right) + b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right) + c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right) \geq 12$. Chứng minh:

$$S = \sqrt{\frac{16}{a^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{c}{2} + \frac{19a^3}{8}} + \sqrt{\frac{16}{a^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{19b^3}{8}} + \sqrt{\frac{16}{c^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{b}{2} + \frac{19a^3}{8}} \geq 3\sqrt{29}$$

Bài 8: CMR với mọi số thực a, b, c :

$$a^6 + b^6 + c^6 + a^2b^2c^2 \geq \frac{2}{3}(a^5(b+c) + b^5(c+a) + c^5(b+c))$$

Chương 2 :

Các phương pháp chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức đòi hỏi kỹ năng và kinh nghiệm. Không thể khơi khơi mà ta đâm đầu vào chứng minh khi gặp một bài bất đẳng thức. Ta sẽ xem xét nó thuộc dạng bài nào, nên dùng phương pháp nào để chứng minh. Lúc đó việc chứng minh bất đẳng thức mới thành công được.

Như vậy, để có thể đương đầu với các bất đẳng thức lượng giác, bạn đọc cần nắm vững các phương pháp chứng minh. Đó sẽ là kim chỉ nam cho các bài bất đẳng thức. Những phương pháp đó cũng rất phong phú và đa dạng : tổng hợp, phân tích, quy ước đúng, ước lượng non già, đổi biến, chọn phần tử cực trị ... Nhưng theo ý kiến chủ quan của mình, những phương pháp thật sự cần thiết và thông dụng sẽ được tác giả giới thiệu trong chương 2 : **“Các phương pháp chứng minh”**.

Mục lục :

- 2.1. Biến đổi tương đương, các tính chất của bất đẳng thức
- 2.2. Sử dụng các bước đầu cơ sở
- 2.3. Đưa về vector và tích vô hướng
- 2.4. Phương pháp quy nạp
- 2.5. Phương pháp phản chứng
- 2.6. Phương pháp dùng tam thức bậc hai
- 2.7. Sử dụng một số bất đẳng thức phụ
- 2.8. Sử dụng định lý Viét
- 2.9. Bài tập

2.1. Biến đổi tương đương :

Có thể nói phương pháp này là một phương pháp “xưa như Trái Đất”. Nó sử dụng các công thức và sự biến đổi qua lại giữa các bất đẳng thức. Để có thể sử dụng tốt phương pháp này bạn đọc cần trang bị cho mình những kiến thức cần thiết

A. Kiến thức cần nhớ:

- _ $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$
- _ Ta biến đổi bất đẳng thức(BĐT) cần chứng minh tương đương với BĐT đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh đúng.
- _ Chú ý các hằng đẳng thức sau:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

- _ Chú ý các phép biến đổi tương đươngBĐT:

$$A \geq B \Leftrightarrow A \pm C \geq B \pm C$$

$$\text{Với } C > 0: A \geq B \Leftrightarrow AC \geq BC$$

$$\text{Với } C < 0: A \geq B \Leftrightarrow AC \leq BC$$

$$\text{Với } A, B > 0 \text{ thì } A \geq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$$

B. Các ví dụ:

C.

I. Bài toán có đi kèm với điều kiện:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì ta có

$$-\frac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq 1$$

Giải:

Ta cần chứng minh bất đẳng thức kép:

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx \leq (x^2 + y^2 + z^2)$$

* Ta có:

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0$$

BĐT trên luôn đúng nên ta có:

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx$$

* Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &\leq (x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx &\leq 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng nên ta có: $xy + yz + zx \leq (x^2 + y^2 + z^2)$

Như vậy ta có điều phải chứng minh: $-\frac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq 1$

Ví dụ 2: a, b, c là ba số tùy ý thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$$

Lời giải:

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned} (1-a)(1-b)(1-c) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc &\geq 0 \end{aligned}$$

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT:

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq 1$$

Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $a^2 \leq a, b^2 \leq b, c^2 \leq c$. Do đó:

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$$

Vì vậy ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) + abc &\geq 0 \end{aligned}$$

BĐT trên luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh

***Từ các bài toán trên ta thấy rằng khi gặp các bài toán chứng minh bất đẳng thức mà có cho điều kiện: Ta sẽ cố gắng biến đổi từ điều kiện để có thể sử dụng triệt để điều kiện đó.**

II. Bài toán không có điều kiện:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi a, b Ta có:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \text{ Dấu bằng xảy ra khi nào?}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ \Leftrightarrow |a+b|(1+|a|+|b|) &\leq (|a|+|b|)(1+|a+b|) \\ \Leftrightarrow |a+b| &\leq |a|+|b| \end{aligned}$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Vậy: $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với 3 số dương a, b, c bất kì ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} &\geq \frac{2a-b}{3} \\ \Leftrightarrow 3a^3 &\geq (2a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng nên ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự ta có } \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} &\geq \frac{2b-c}{3} \\ \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} &\geq \frac{2c-a}{3} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các BĐT thức trên ta có điều phải chứng minh

2.2. Sử dụng các bước đầu cơ sở :

Ta sẽ đưa các bất đẳng thức cần chứng minh về các bất đẳng thức cơ bản bằng cách biến đổi và sử dụng các đẳng thức cơ bản. Ngoài ra, khi tham gia các kỳ thi, tác giả khuyên bạn đọc nên chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức cơ bản sử dụng như một bổ đề cho bài toán.

Ví dụ 1.

CMR trong mọi tam giác ta đều có :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{7}{4} + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Lời giải :

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{3}{4} + \cos A + \cos B + \cos C \quad (1)$$

mà :

$$\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

$$\cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A$$

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

nên :

$$(1) \Leftrightarrow \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{3}{4} \quad (2)$$

Thật vậy hiển nhiên ta có :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{1}{3} (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \quad (3)$$

Mặt khác ta có : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 2.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$\frac{1}{1+2\cos A+4\cos A\cos B} + \frac{1}{1+2\cos B+4\cos B\cos C} + \frac{1}{1+2\cos C+4\cos C\cos A} \geq 1$$

Lời giải :

Đặt vế trái bất đẳng thức cần chứng minh là T.

Theo **Cauchy** ta có :

$$T[3+2(\cos A+\cos B+\cos C)+4(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)] \geq 9 \quad (1)$$

$$\text{mà : } \cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$$

và hiển nhiên :

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A \leq \frac{(\cos A+\cos B+\cos C)^2}{3} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3+2(\cos A+\cos B+\cos C)+4(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A) \leq 9 \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $T \geq 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 3.

CMR với mọi $\triangle ABC$ bất kỳ, ta có :

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2(ab+bc+ca) \geq 4\sqrt{3}S+a^2+b^2+c^2 \quad (1)$$

Ta có :

$$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

$$\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$$

$$\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \geq 4\sqrt{3}S + 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C\right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều

2.3 Đưa về vector và tích vô hướng :

Phương pháp này luôn đưa ra cho bạn đọc những lời giải bất ngờ và thú vị. Nó đặc trưng cho sự kết hợp hoàn hảo giữa đại số và hình học. Những tính chất của vector lại mang đến lời giải thật sáng sủa và đẹp mắt. Nhưng số lượng các bài toán của phương pháp này không nhiều. Trước khi đến với những ví dụ về cách chứng minh các bất đẳng thức bằng cách đưa về vector và tích vô hướng, ta cần ghi nhớ một số các đẳng thức sau:

$$* \vec{a} = (x, y) \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$* A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$* |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$* |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$* |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Ta có phương pháp chung cho các bài toán bất đẳng thức sử dụng đưa về vector và tích vô hướng là: Khi gặp các bài toán bất đẳng thức nói riêng và các bài tập đại số nói chung mà các biểu thức dưới dấu căn($\sqrt{A}, \sqrt{B}$) được biểu diễn dưới dạng tổng của hai bình phương thì ta cố gắng tìm trên hệ trục toạ độ các vector có độ dài lần lượt bằng $\sqrt{A}, \sqrt{B}$. Sau đó nghiệm lại tổng các vector bằng không hoặc có một vector bằng tổng các vector còn lại rồi sử dụng BĐT về độ dài của 3 cạnh một tam giác hoặc BĐT về độ dài đường gấp khúc để đi đến kết quả của bài toán. Còn với các bài toán hình học ta đưa chúng về vector đơn vị.

Để làm sáng tỏ điều vừa nêu trên thì sau đây có một số ví dụ và bài tập:

Ví dụ 1.

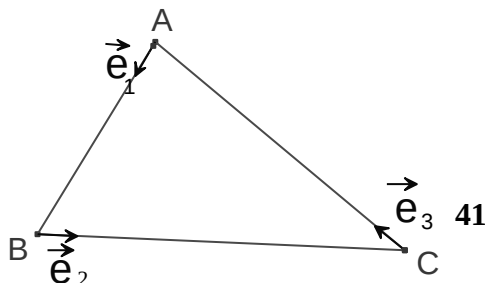
CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Lấy các vector đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA .

Hiển nhiên ta có :



$$\begin{aligned}
 & (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow 3 + 2\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \\
 & \Rightarrow \text{đpcm.}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho x, y, z là ba số tùy ý, Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
 & \vec{a} = \left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y \right), \vec{b} = \left(y + \frac{z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z \right), \vec{c} = \left(z + \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \\
 & \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\frac{3}{2}(x+y+z), \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z) \right)
 \end{aligned}$$

Lời giải:

Trong mặt phẳng tọa độ, xét các điểm

$$A\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); C\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}, 0\right)$$

Khi đó ta có:

$$AB = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

$$AC = \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} = \sqrt{x^2 + xz + z^2}$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)\right)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow |\vec{AB}| + |\vec{AC}| \geq |\vec{BC}| \text{ đúng}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\forall x$ ta có:

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1} \geq 3 \quad (1)$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} > 3$$

Trên mặt phẳng tọa độ xét $A(0,1); B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right); C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ và $T(x,x)$

thì (1) $\Leftrightarrow TA+TB+TC > 3$

Để thấy $AB=BC=CA$ và $OA=OB=OC$ như vậy tam giác ABC đều và có tâm là gốc tọa độ O

Bổ đề: Nếu tam giác ABC đều thì $TA+TB+TC > OA+OB+OC$, trong đó O là tâm của tam giác đều

Từ bổ đề trên ta có $TA+TB+TC > OA+OB+OC$

Mà $OA=OB=OC=1 \Rightarrow TA+TB+TC > 3$ (đúng)

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$

Ví dụ 5: Cho x,y,z là 3 số dương và $x+y+z \leq 1$

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq 82$

Lời giải:

Với mọi $\vec{u}, \vec{v}$ ta có $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (1)

(vì $|\vec{u} + \vec{v}|^2 \leq \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} \leq |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$).

Đặt $\vec{a} = \left(x; \frac{1}{x}\right); \vec{x} = \left(y; \frac{1}{y}\right); \vec{z} = \left(z; \frac{1}{z}\right)$,

áp dụng (1) ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

Vậy $P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$

Ta có: $(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x+y+z)^2$

$\geq 81(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 80(x+y+z)^2 \geq 162 - 80 = 82$.

Vậy $P \geq \sqrt{82}$

Sau đây là một số bài toán về bất đẳng thức tương tự các bài toán trên:

1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2\sqrt{2}$$

2. Với a,b là hai số thực tùy ý ta luôn có:

$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} + \sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4} \geq \frac{15\sqrt{13}}{13}$$

2.4. Phương pháp quy nạp

Các nhà toán học thường nói đùa rằng “khi ta không thể giải được một bài toán cụ thể nào thì lại có thể giải được những bài toán tổng quát và khó khăn hơn”. Đó có thực sự là câu nói đùa, hay là một kinh nghiệm quý báu trong toán học? Khi tìm hiểu qua phương pháp quy nạp trong chứng minh bất đẳng thức chúng ta sẽ thấy được những điều đó.

Để phương pháp này có thể hiểu được và làm được nhuần nhuyễn thì ta cần có kiến thức thật tốt phần này: “Chứng minh một bất đẳng thức (*) đúng với $\forall n \geq p$ (với (*) phụ thuộc vào số tự nhiên n , p là hằng số và $p \in \mathbb{N}^*$) ta tiến hành các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra (*) đúng với $n = p$

Bước 2: Giả sử (*) đúng với $n = k \geq p, k \in \mathbb{N}^*$

Bước 3: Ta chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$

Bước 4: Kết luận bất đẳng thức (*) đúng với mọi $n \geq p$ ”

Ví dụ 1: CMR: $2^n > 2n + 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 3$

Lời giải :

Với $n=3$ thì $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$ hay bắt đầu cho đúng với $n=3$

Giả sử bắt đầu đúng với số nguyên dương $n=k$ bất kì, có nghĩa :

$$2^k \geq 2k + 1 \Rightarrow 2^k \cdot 2 \geq (2k + 1)2$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} \geq 4k + 2 = 2k + 2k + 2 > 2(k + 1) + 1$$

Vậy bắt đầu cho cũng đúng với $n=k+1$, do đó ta có $2^n \geq 2n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ và $n \geq 3$

Ví dụ 2: CMR: $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$ (1) với $a+b > 0, a \neq b, n > 1$

Lời giải:

Với $n=2$, (1) có dạng: $2(a^2 + b^2) > (a + b)^2$ (2)

Vì $a \neq b$ ta có bất đẳng $(a-b)^2 > 0$, cộng 2 vế bất này với $(a+b)^2$ ta có (2) đúng

Giả sử (1) đúng với số $n=k$ nào đó ,

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a + b)^k$$
 (3)

Để CM (1) cũng đúng cho $n=k+1$, ta nhân 2 vế (3) với $a+b$ vì $a+b > 0$ ta nhận bất đẳng :

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) > (a + b)^{k+1}$$
 (4)

Như vậy để chứng minh (1) đúng với $n=k+1$ bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) \quad (5)$$

Sau khi biến đổi và đơn giản 2 vế ta được bất tương đương
: $a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + b^k a$

từ đó ta suy ra: $(a^k - b^k)(a - b) > 0 \quad (6)$

Xét 2 trường hợp :

TH1: nếu $a > b$, và điều kiện đã cho là $a > -b$, suy ra $a > |b|$, vì vậy $a^k > b^k$. Do đó bất (6) đúng

TH2: nếu $a < b$, lý luận tương tự phần trên ta có $a^k > b^k$, trong trường hợp này (6) cũng đúng

(ĐPCM)

2.5. Phương pháp phản chứng

Nói đến chứng minh bất đẳng thức ta không thể không nhắc đến phương pháp phản chứng. Phương pháp có thể dùng rất đa dạng, đủ mọi loại toán phổ thông cũng ta hiện nay đang học. Điều quan trọng của phương pháp này là nó giúp chúng ta luôn có một lời giải sáng sủa hoặc con đường chứng minh dễ dàng hơn.

Ví dụ 1: Cho a, b là 2 số dương và $(\frac{1+ab}{a+b})^2 < 1$. Chứng minh rằng không thể đồng thời xảy ra $a < 1$ và $b < 1$

Lời giải : Giả sử đồng thời xảy ra $a < 1$ và $b < 1 \Rightarrow a^2 < 1, b^2 < 1$
Ta có: $(1-a^2)(1-b^2) > 0 \Leftrightarrow 1+(ab)^2 - a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow 1+(ab)^2 > a^2 + b^2$
 $\Leftrightarrow 1+(ab)^2 + 2ab > a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow (1+ab)^2 > (a+b)^2 \Leftrightarrow (\frac{1+ab}{a+b})^2 > 1$

BĐT cuối mâu thuẫn với giả thiết bài toán $(\frac{1+ab}{a+b})^2 < 1$

Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a+b=2cd$. CMR ít nhất 1 trong 2bđt sau đây là đúng $c^2 \geq a, d^2 \geq b$

Lời giải :

Giả sử 2 bđt trên đều sai, có nghĩa ta được :

$$c^2 < a, d^2 < b \Rightarrow c^2 - a < 0, d^2 - b < 0 \Rightarrow c^2 - a - b + d^2 < 0$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 - (a+b) < 0 \Rightarrow c^2 + d^2 - 2cd < 0 \Rightarrow (c-d)^2 < 0$$

Kết quả này mâu thuẫn, vậy ít nhất 1 trong 2bđt đã cho phải đúng.

Ví dụ 3: Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{x+y-z} + \sqrt{y+z-x} + \sqrt{x+z-y}$$

Lời giải:

$$\text{Xét bất : } \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}$$

$$\text{Cho } a + b + c = \sqrt{10}, \text{ suy ra } \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq 1$$

Từ bất trên ta suy ra bất phản chứng là

$$\text{Nếu các số dương } a, b, c \text{ thỏa mãn điều kiện : } \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} = 1 \text{ thì}$$

ta luôn có $a + b + c \geq \sqrt{10}$ thật vậy bất trên tương đương với

$$\text{Nếu } a_1, b_1, c_1 > 0 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1} = 1 \text{ thì}$$

$$\sqrt{a_1 + b_1 - c_1} + \sqrt{b_1 + c_1 - a_1} + \sqrt{a_1 + c_1 - b_1} \geq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Do đó nếu } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \text{ thì } \sqrt{x + y - z} + \sqrt{y + z - x} + \sqrt{x + z - y} \geq \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

2.6. Phương pháp dùng tam thức bậc hai

Trong phương pháp này chúng ta sẽ sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức.

Muốn chứng minh được bất đẳng thức này chúng ta cần đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng $A \geq (*)$

Khi đó ta có thể xem vế trái của $(*)$ là một tam thức bậc hai của một biến nào đó rồi sử dụng định lý thuận hoặc định lý đảo của tam thức bậc hai để chứng minh $(*)$.

Dạng 1 : Sử dụng định lý thuận về dấu của tam thức bậc hai

***Định lý về dấu tam thức bậc 2:**

Cho tam thức bậc 2 : $f(x): ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$ với mọi x

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0$ với mọi x

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$

+ Nếu $\Delta > 0$ lập bảng xét dấu.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là 3 cạnh của 1 tam giác còn x, y, z là ba số thỏa mãn điều kiện $ax + by + cz = 0$. Chứng minh $xy + yz + zx \geq 0$ (1)

Lời giải:

Từ $ax + by + cz = 0 \Rightarrow z = -\frac{ax + by}{c}$ Vậy:

$$(1) \Leftrightarrow xy + yz + zx = xy - \frac{ax + by}{c}(x + y) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + xy(a + b + c) + by^2 \geq 0 \quad (2)$$

Nếu $y = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow ax^2 \geq 0 \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow (1) \text{ đúng}$.

Nếu $y \neq 0$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + (a+b-c)\frac{x}{y} + b \geq 0$$

Quan niệm về trái của (3) là tam thức bậc hai của $\frac{x}{y}$ có hệ số của $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ là $a > 0$

$$\text{và } (a+b-c)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

Từ $|b-c| < a \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 < a^2$, tương tự $a^2 - 2bc + c^2 < b^2$ và $a^2 - 2bc + b^2 < c^2$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0$
nên về trái của (3) luôn lớn hơn 0 $\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$

Ví dụ 2: Cho $a^3 > 36$ và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

Lời giải:

Từ $abc=1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a}$ và do $a^3 > 36$ nên chắc chắn $a > 0$. Ta có:

$$\frac{a^2}{2} + (b+c)^2 - 2bc > bc + a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a(b+c) - 3bc + \frac{a^2}{3} > 0 \quad (1)$$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - ax - 3bc + \frac{a^2}{3}$

Ta có hệ số của x^2 là $1 > 0$ và $a^2 - \frac{4a^2}{3} + 12bc \frac{36 - a^2}{3a} < 0$

Theo định lí thuận về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x) > 0$ với mọi $x \Rightarrow$

$$f(b+c) = (b+c)^2 - a(b+c) - 3bc + \frac{a^2}{3} \text{ đúng } \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dạng 2: Sử dụng định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai :

*Định lí đảo về dấu cho tam thức bậc 2:

Cho: $f(x): ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $af(x) < 0$ thì $f(x)$ có 2 nghiệm pb và $x_1 < a < x_2$

Ví dụ Cho $(a+c)(a+b+c) < 0$. Chứng minh:

$$(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$$

Lời giải:

Nếu $a=0$ thì từ giả thiết ta có $c(b+c) < 0$ (1)

Bất đẳng thức phải chứng minh có dạng $(b-c)^2 > 0$ (2)

Từ (1) suy ra $b \neq c$ vậy (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Nếu $a \neq 0$ xét tam thức bậc hai sau :

$$f(x) = ax^2 + (b-c)x + a+b+c$$

Từ $f(0)=a+b+c$; $f(-1)=2(a+c)$ --> từ giả thiết ta có $f(0)f(-1) < 0$. Theo định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai suy ra phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hay $(b-c)^2 - 4(a+b+c) > 0 \Leftrightarrow (b-c)^2 > 4(a+b+c) \Rightarrow$ đpcm

Hệ quả: Nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a).f(b) > 0$ thì $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt và trong 2 số a, b có một số nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

2.7. Sử dụng một số bất đẳng thức phụ

Trong phương pháp này chúng ta sẽ sử dụng một số bất đẳng thức phụ để chứng minh các bất đẳng thức khác.

Để vận dụng các bất đẳng thức này ta chỉ cần đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng của chúng.

Sau đây là một số bất đẳng thức phụ cách chứng minh chúng và một số ví dụ.

Bất đẳng thức I : Cho $a, b > 0$ thì :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (I)$$

Chứng minh: Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương là a, b ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ : Cho a, b, c, d là những số dương và $abcd = 1$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + db + cd \geq 10$.

Chứng minh:

Theo BĐT Cauchy ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1) và $c^2 + d^2 \geq 2cd$ (2)

(vì $a, b, c, d > 0$)

Dễ thấy $ab, cd > 0$ và do $abcd = 1$ nên $ab = \frac{1}{cd}$

$$\Rightarrow ab + cd = \frac{1}{cd} + cd \geq 2 \quad (3) \quad (\text{Áp dụng BĐT (I)})$$

Tương tự $ac + bd \geq 2$ (4)

$$ad + bc \geq 2 \quad (5)$$

$$2ab + 2cd \geq 4(6)$$

Cộng theo vế (1),(2),(3),(4),(5),(6) ta được đpcm

Bất đẳng thức II : Cho $a,b,c > 0$ thì :

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ (II)}$$

Chứng minh:

Để chứng minh BĐT (II) ta sử dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương

là $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ và a, b, c như sau:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}},$$

Ta có:

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{a + b + c}$$

Khi đó ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$. Đây là BĐT cần chứng minh.

Vấn đề đặt ra là khi giải những bài toán chưa có dạng như vậy thì ta phải biến đổi như thế nào

Ta hãy xét ví dụ sau:

VD1: Cho $a, b, c \geq 0$ chứng minh:

$$\frac{a + 3c}{a + b} + \frac{c + 3a}{b + c} + \frac{4b}{c + 3a} \geq 6 \quad (2)$$

Chứng minh:

Để giải những bài toán dạng này ta xây dựng cách giải như sau:

Ta sẽ biến đổi để xuất hiện dạng (II)

Trước hết ta tìm 2 số x, y sao cho:

$$(a + 3c) + x(a + b) = (c + 3a) + y(b + c) = M$$

$$(1 + x)a + xb + 3c = 3a + yb + (1 + y)c$$

sử dụng phương pháp đồng nhất thức ta có :

$$\text{và } \begin{cases} 1 + x = 3 \\ 1 + y = 3, x = y = 2, M = 3a + 2b + 3c \end{cases}$$

Bây giờ ta tìm m,n sao cho:

$$4b + m(c + a) = n(3a + 2b + 3c)$$

Tương tự trên ta tìm được m=6,n=2

Đến đây ta chứng minh (2) như sau

Ta có (2) tương đương với

$$\left(\frac{a+3c}{a+b} + 2 + \frac{c+3a}{b+c} + 2 + \frac{4b}{c+a} \right) \geq 16$$

tức là

$$(3a + 2b + 3c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a} \right) \geq 16$$

VP tương đương với

$$[(a+b) + (b+c) + (c+a) + (c+a)] \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+a} \right] \geq 16$$

(đúng)

=>đpcm

Bây giờ ta sẽ dùng BĐT (II) để chứng minh một số BĐT khác:

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$; CMR

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh:

Ta vận dụng BĐT(II) cho 3 số dương là $2a+b, 2b+c, 2c+a$ ta có

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{9}{2a+b+2b+c+2c+a} \Leftrightarrow \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{9}{3(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

Đây là BĐT cần chứng minh

Bất đẳng thức III: Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. (III)

Chứng minh:(Dùng phép biến đổi tương đương).

Ta có : $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$
 $\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$. (Đúng)

Ví dụ : Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

Lời giải:

Ta sẽ sử dụng BĐT (III) như sau :

Ta có $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a+b}{2}$; Tương tự,

ta cũng có: $\frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b+c}{2}, \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c+a}{2}$.

Cộng theo vế các BĐT trên lại với nhau ta được BĐT cần chứng minh.

Bất đẳng thức IV. Cho a, b là các số dương .ta luôn có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \text{ (IV)}$$

Chứng minh.

Cách 1: (Dùng phương pháp biến đổi tương đương).

Ta có BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. BĐT này luôn đúng với mọi a, b nên BĐT (IV) luôn đúng với mọi a, b dương.

Cách 2: (Dùng BĐT Cauchy cho hai số dương).

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương là: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ta có:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, lại áp dụng BĐT Caychy cho hai số dương là a và b , ta có:

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$. Từ hai BĐT trên ta được BĐT (IV).

Ví dụ : Cho a, b là các số dương .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 + 4b^2} + \frac{1}{8ab} \geq \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Lời giải:

Ta vận dụng BĐT (VI) để chứng minh BĐT này như sau: Ta áp dụng BĐT (VI) cho hai số $4a^2+4b^2$ và $8ab$. Ta có:

$$\frac{1}{4a^2 + 4b^2} + \frac{1}{8ab} \geq \frac{4}{4a^2 + 4b^2 + 8ab} \Leftrightarrow \frac{1}{4a^2 + 4b^2} + \frac{1}{8ab} \geq \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Đây là BĐT cần chứng minh..

Bất đẳng thức V: Cho a, b là các số dương, ta luôn có:

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \quad (V)$$

Chứng minh.

Cách 1:(Dùng phương pháp biến đổi tương đương)

Ta có BĐT (4) $\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Đây là BĐT đúng.

Cách 2: (Dùng BĐT Cauchy).

Ta áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương là a và b , ta có: ab

$$\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$$

Ví dụ : Cho a, b, c là các số dương. CMR:

$$\frac{1}{(2a+b)(2c+b)} + \frac{1}{(2b+c)(2a+c)} + \frac{1}{(2b+a)(2c+a)} \geq \frac{3}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh.

Ta vận dụng BĐT (V) cho 2 số dương là $2a+b$ và $2c+b$ ta có:

$$\frac{1}{(2a+b)(2c+b)} \geq \frac{4}{(2a+b+2c+b)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(2a+b)(2c+b)} \geq \frac{4}{(2a+2b+2c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2a+b)(2c+b)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{(2b+c)(2a+c)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2},$$

$$\frac{1}{(2b+a)(2c+a)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên lại với nhau ta được BĐT cần chứng minh.

2.8. Sử dụng định lý Viét

Đây là một trong những phương pháp chứng minh bất đẳng thức rất hay và rất mạnh giúp người chứng minh có thể có thể sử dụng một cách có hiệu quả và tiết kiệm thật nhiều thời gian cho việc chứng minh. Sau đây là một số ví dụ giúp chúng ta có thể thấy được sức mạnh của phương pháp này.

Ví dụ 1: Cho các số thực x, y, z khác 0 và thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = xyz, x^2 = yz$. Chứng minh rằng: $x^2 \geq 3$

Lời giải:

Để thấy

$$\begin{cases} y + z = x^3 - x \\ yz = x^2 \end{cases}$$

Vậy y, z là nghiệm của phương trình: $u^2 + (x - x^3)u + x^2 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = x^2((1 - x^2)^2 - 4)$ (2)

Bởi vì (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$, do $x \neq 0$, nên từ (2) suy ra

$$(1 - x^2)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 2 \text{ hoặc } 1 - x^2 \leq -2$$

Để thấy $1 - x^2 \geq 2$ vô nghiệm, do đó ta có

$$1 - x^2 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 (\text{đpcm})$$

Ví dụ 2: Các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 5$ và $yz + xz + xy = 8$. Chứng minh rằng:

$$1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}$$

Lời giải:

Từ các điều kiện bài toán ta có:

$$\begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = 8 - x(5 - x) \end{cases}$$

Dẫn đến y, z là nghiệm của phương trình:

$$u^2 + (x - 5)u + x^2 - 5x + 8 = 0$$

Bởi vì phương trình trên có nghiệm, nghĩa là:

$$\Delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5-x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Vai trò x,y,z như nhau nên ta cũng có

$$1 \leq y, z \leq \frac{7}{3} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3: Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + kx + a = 0$ ($a \neq 0$).

Tìm tất cả các giá trị của k để có bất đẳng thức:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 \leq 52 \quad (a, k \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

Ta xét a trong 2 trường hợp:

* Nếu $a < 0$ thì $\Delta = k^2 - 4a > 0$ với mọi k . Khi đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm khác nhau và khác dấu. Điều đó dẫn đến bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $k \in \mathbb{R}$.

* Nếu $a > 0$

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

Áp dụng công thức trên ta có

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) \left(\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 3 \right)$$

$$\text{nhưng } \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \left(\frac{k^2}{a} - 2\right) \quad (\text{Theo định lí Viét})$$

Do đó

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = \left(\frac{k^2}{a} - 2\right) \left(\left(\frac{k^2}{a} - 2\right)^2 - 3 \right)$$

đặt $\frac{k^2}{a} = t$, Ta có:

$$(t-2)((t-2)^2 - 3) \leq 52$$

$$\Leftrightarrow (t-6)(t^2 + 9) \leq 0$$

Ta thấy $t^2 + 9 > 0$ với mọi t , do đó $t-6 \leq 0$, hay

$$\frac{k^2}{a} - 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 \leq 6a \text{ (do } a > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{6a} \leq k \leq \sqrt{6a}$$

Vậy với

$$\begin{cases} a < 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hoặc

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\sqrt{6a} \leq k \leq \sqrt{6a} \end{cases}$$

$$\text{Thì } \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 \leq 52$$

,

2.9. Bài tập :

Bài 1: Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^3 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

Bài 2: Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$R + r \geq \sqrt[4]{3} \sqrt{S}$$

Bài 3: Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

Bài 4: Cho $x, y, z > 0$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$$

Bài 5: Tìm GTNN của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$ ($p \neq q$)

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$\sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{p^2 + q^2} \geq \sqrt{(m + p)^2 + (n + q)^2} \quad \forall m, n, p, q \in \mathbb{R}$$

Bài 7: Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + K + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n=2,3,K) \quad (1)$$

Bài 8: Chứng minh $(x + y)^2 \geq 2x\sqrt{5} - 5y^2 + 4y\sqrt{5} - 6, \forall x, y. (*)$

Bài 9: (đề thi HSG tỉnh) Cho $a_i > 0; i = 1, 2, 3, 4$ CMR:

$$\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \frac{a_3 + a_1}{a_3 + a_4} + \frac{a_4 + a_2}{a_4 + a_1} \geq 4. (1)$$

Bài 10: Cho a, b, c, d là 4 số dương. chứng minh:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2. (1)$$

Bài 11: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 12: Cho $a, b, c \geq 0$ chứng minh:

$$\frac{a+3c}{a+b} + \frac{c+3a}{b+c} + \frac{4b}{c+3a} \geq 6$$

Bài 13: Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2kx + 4 = 0$. Tìm tất cả các giá trị k sao cho có bất đẳng thức:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geq 3$$

Chương 3 :

Áp dụng vào một số vấn đề khác

“Có học thì phải có hành”

Sau khi đã xem xét các bất đẳng thức cùng các phương pháp chứng minh thì ta phải biết vận dụng những kết quả đó vào các vấn đề khác.

Trong các chương trước ta có các ví dụ về bất đẳng thức lượng giác mà dấu bằng thường xảy ra ở trường hợp đặc biệt : tam giác đều, cân hay vuông ... Vì thế lại phát sinh ra một dạng bài mới : định tính tam giác dựa vào điều kiện cho trước.

Mặt khác với những kết quả của các chương trước ta cũng có thể dẫn đến dạng toán tìm cực trị lượng giác nhờ bất đẳng thức. Dạng bài này rất hay : kết quả được “giấu” đi, bắt buộc người làm phải tự “mò mẫm” đi tìm đáp án cho riêng mình. Công việc đó thật thú vị ! Và tất nhiên muốn giải quyết tốt vấn đề này thì ta cần có một “vốn” bất đẳng thức “kha khá”.

Bây giờ chúng ta sẽ cùng kiểm tra hiệu quả của các bất đẳng thức lượng giác trong chương 3 : **“Áp dụng vào một số vấn đề khác”**

Mục lục :

- 3.1. Định tính tam giác
 - 3.1.1. Tam giác đều
 - 3.1.2. Tam giác cân
 - 3.1.3. Tam giác vuông
- 3.2. Vận dụng bất đẳng thức vào giải toán
- 3.3. Bài tập

3.1. Định tính tam giác :

3.1.1. Tam giác đều :

Tam giác đều có thể nói là tam giác đẹp nhất trong các hình mà ta đã biết. Ở nó ta có được sự đồng nhất giữa các tính chất của các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác, tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp tam giác ... Và các dữ kiện đó lại cũng trùng hợp với điều kiện xảy ra dấu bằng ở các bất đẳng thức lượng giác đối xứng trong tam giác. Do đó sau khi giải được các bất đẳng thức lượng giác thì ta cần phải nghĩ đến việc vận dụng nó trở thành một phương pháp khi nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 1.

$$CMR \Delta ABC \text{ đều khi thỏa : } m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$$

Lời giải :

Theo BCS ta có :

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\text{mà : } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4}R^2$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều $\Rightarrow \text{đpcm}$.

Ví dụ 2.

$$CMR \text{ nếu thỏa } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c} \text{ thì } \Delta ABC \text{ đều.}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{ab}}{4c} &\leq \frac{a+b}{8c} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R \cdot 8 \sin C} = \frac{2R \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2R \cdot 8 \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{8 \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{1}{8 \cos \frac{A+B}{2}} \\ &\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \frac{1}{8 \cos \frac{A+B}{2}} \\ &\Leftrightarrow 8 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2 \cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{A-B}{2} \geq 0 \\ &\Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

Ví dụ 3.

CMR $\triangle ABC$ đều khi nó thỏa : $2(h_a + h_b + h_c) = (a + b + c)\sqrt{3}$

Lời giải :

Điều kiện đề bài tương đương với :

$$\begin{aligned}2.2p \left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} \right) &= (a + b + c)\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Mặt khác ta có :

$$\frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cot \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right)$$

Tương tự :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} &\leq \frac{1}{4} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\ \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &\leq \frac{1}{4} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &\leq \frac{1}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &\leq \frac{1}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 4.

CMR nếu thỏa $S = 3Rr \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì ΔABC đều.

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} S &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = r 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &\leq r 4R \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2} Rr \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5.

CMR ΔABC đều khi nó thỏa $m_a m_b m_c = pS$

Lời giải :

Ta có :

$$m_a^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{4} (b^2 + c^2 + 2bc \cos A) \geq \frac{1}{2} bc (1 + \cos A) = bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

mà :

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \Rightarrow \cos^2 A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc} \\ \Rightarrow m_a &\geq \sqrt{p(p-a)}\end{aligned}$$

Tương tự :

$$\begin{cases} m_b \geq \sqrt{p(p-b)} \\ m_c \geq \sqrt{p(p-c)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a m_b m_c \geq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

3.1.2. Tam giác cân :

Sau tam giác đều thì tam giác cân cũng đẹp không kém. Và ở đây thì chúng ta sẽ xét những bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi hai biến bằng nhau và khác biến thứ ba. Ví dụ $A = B = \frac{\pi}{6}; C = \frac{2\pi}{3}$. Vì thế nó khó hơn trường hợp xác định tam giác đều.

Ví dụ 1.

CMR $\triangle ABC$ cân khi nó thỏa điều kiện $\tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2}$ và nhọn.

Lời giải :

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \tan A + \tan B &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C} \\ \text{vì } \cos(A-B) &\leq 1 \Rightarrow \cos(A-B) - \cos C \leq 1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ \Rightarrow \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C} &\geq \frac{2 \sin C}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2} = 2 \tan \frac{A+B}{2} \\ \Rightarrow \tan A + \tan B &\geq 2 \tan \frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Từ giả thiết : } \tan^2 A + \tan^2 B &= 2 \tan^2 \frac{A+B}{2} \leq 2 \left(\frac{\tan A + \tan B}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 2(\tan^2 A + \tan^2 B) &\leq \tan^2 A + \tan^2 B + 2 \tan A \tan B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \tan A = \tan B \\ &\Leftrightarrow A = B \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.

CMR $\triangle ABC$ cân khi thỏa $h_a = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$

Lời giải :

Trong mọi tam giác ta luôn có : $h_a \leq l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$
 mà $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{bc}{\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}$
 $\Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$
 Đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ cân $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.

CMR nếu thỏa $r + r_a = 4R \sin \frac{B}{2}$ thì $\triangle ABC$ cân.

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} r + r_a &= (p-b) \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{B}{2} = (2p-b) \tan \frac{B}{2} = (a+c) \tan \frac{B}{2} = 2R(\sin A + \sin C) \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\ &= 4R \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = 4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \leq 4R \sin \frac{B}{2} \\ &\Rightarrow r + r_a \leq 4R \sin \frac{B}{2} \quad \text{Đẳng thức xảy ra khi } \triangle ABC \text{ cân} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 4.

CMR nếu $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ thì ΔABC cân.

Lời giải :

Ta có : $a^2 + b^2 \leq 2ab \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2}ab \sin C = S$
 $\Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq S \Rightarrow \Delta ABC$ cân nếu thỏa điều kiện đề bài.

Ví dụ 5.

CMR ΔABC cân khi thỏa $2 \cos A + \cos B + \cos C = \frac{9}{4}$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} 2 \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= -4 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = - \left(2 \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\ &= - \left(2 \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{B-C}{2} + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $B = C \Rightarrow \text{đpcm.}$

3.1.3. Tam giác vuông :

Cuối cùng ta xét đến tam giác vuông, đại diện khó tính nhất của tam giác đối với bất đẳng thức lượng giác. Thường như khi nhận diện tam giác vuông, phương pháp biến đổi tương đương các đẳng thức là được dùng hơn cả. Và ta hiếm khi gặp bài toán nhận diện tam giác vuông mà cần dùng đến bất đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 1.

CMR $\triangle ABC$ vuông khi thỏa $3\cos B + 6\sin C + 4\sin B + 8\cos C = 15$

Lời giải :

Theo **Bunhiacopxki** ta có :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 B + \sin^2 B)} = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C \leq \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C \leq 15$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos B}{3} = \frac{\sin B}{4} \\ \frac{\sin C}{6} = \frac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan B = \frac{4}{3} \\ \cot C = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.2. Vận dụng bất đẳng thức vào giải toán

Vận dụng bất đẳng thức vào giải toán là một trong những phương pháp tối ưu để giải những bài toán học búa. Đôi khi một bài toán dễ nhưng chúng ta không biết vận dụng đúng lúc sẽ gây khó khăn. Vì vậy vận dụng bất đẳng thức vào giải toán là một phương pháp chúng ta cần biết tới. Để thấy được điều đó ta sẽ có một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số đo độ dài các cạnh của một tam giác thoả mãn điều kiện:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc$$

Chứng minh rằng a, b, c là các cạnh của một tam giác đều.

Giải:

*Vì a, b, c là các cạnh của một tam giác nên ta luôn có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$a + c \geq 2\sqrt{ac}$$

*Vì $a+b>0, b+c>0, c+a>0$ và các số ở vế phải đều không âm nên ta có thể viết:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2:

Tìm phần nguyên của số thực sau:

$$A = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}} \quad \text{với } x \text{ là số nguyên dương.}$$

Giải:

Với $x>0$, ta có:

$$(4x+1)^2 < 16x^2 + 8x + 3 < (4x+2)^2$$

Suy ra tiếp:

$$(2x+1)^2 < 4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3} < (2x+2)^2.$$

Từ đó ta có thể viết:

$$x+1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}} < x+2$$

$$x+1 < A < x+2.$$

Theo định nghĩa về phần nguyên của số A ta có $[A]=x+1$.

Ví dụ 3:

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \quad (1)$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Sau khi tìm được ba số nguyên dương thoả mãn (1) ta hoán vị bộ ba số đó sẽ được các nghiệm khác.

*Theo giả thiết, theo điều giả sử ta có:

$$2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$$

$2z \leq 3$ mà z nguyên dương, vậy $z=1$.

*Thay $z=1$ vào (1), ta được:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

Theo giả sử $x \geq y$ nên có:

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$$

$\Rightarrow y \leq 2$, mặt khác y nguyên dương, bởi vậy $y=2$ hoặc $y=1$.

Giá trị $y=1$ không thích hợp, còn với $y=2$ ta cso $x=2$.

Thử lại $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ thoả mãn (1).

Vậy (2, 2, 1) là một nghiệm của phương trình.

*Phương trình (1) có các nghiệm là bộ ba số sau:

(2, 2, 1) ; (2, 1, 2) ; (1, 2, 2).

Ví dụ 4:

Tìm các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} = y \quad (1)$$

Giải:

*Với $x=0, y=0$ ta được một nghiệm thoả mãn phương trình (1).

*Ta tìm được các nghiệm nguyên dương thoả mãn (1) vì $x < 0, y < 0$ phương trình (1) không có nghĩa.

Bình phương hai vế ta được: $x + \sqrt{x} = y^2$

$\sqrt{x} = y^2 - x$ cũng là số nguyên dương.

Đặt $\sqrt{x} = k$ (k nguyên dương).

$$k(k+1) = y^2$$

Nhưng $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$

Suy ra: $k^2 < y^2 < (k+1)^2 \Leftrightarrow k < y < k+1$ vì $k > 0, y > 0$.

Nhưng giữa hai số nguyên dương liên tiếp không tồn tại số nguyên dương nào cả. không có cặp số nguyên dương nào thoả mãn (1).

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x=0, y=0$.

3.3. Bài tập :

Bài 1: CMR $\triangle ABC$ đều nếu nó thỏa một trong các đẳng thức sau :

- $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{3}{4}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$
- $\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan A \tan B \tan C$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$

Bài 2: Giải phương trình:

$$\left[\frac{3+4x}{6} \right] = \frac{6x-4}{5}.$$

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên ta luôn có:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right]$$

Bài 4: Tìm năm số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng bốn số còn lại.

Bài 5: Cho tam giác ABC. Ở miền trong tam giác có điểm M. Các đường thẳng AM, BM và CM cắt các cạnh của tam giác lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1 thỏa mãn điều kiện:

Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có diện tích S, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O.

Gọi s_1, s_2 lần lượt là diện tích tam giác AOB và tam giác COD.

Chứng minh rằng $AB \parallel CD$ khi và chỉ khi $\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} = \sqrt{S}$.

Bài 7: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với cạnh BC cắt AB tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng với mọi điểm P trên cạnh BC ta luôn có diện tích tam giác PDE không lớn hơn $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Đường thẳng DE ở vị trí nào thì tam giác PDE đạt giá trị lớn nhất?

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD và P là điểm nào đó ở miền trong hình bình hành. Qua P kẻ hai đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành, ta phân chia được hình bình hành ABCD thành bốn hình bình hành không có điểm chung. Chứng minh rằng một trong hai hình bình hành với đường chéo là AP hoặc CP có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{4}$ diện tích hình bình hành ABCD.

Bài 9: Giải phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$ (1) trong tập số nguyên.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$.

Bài 11: Giải hệ phương trình với x, y, z là các số dương:

$$\begin{cases} x^2 - y = 1 & (1) \\ y^2 - z = 1 & (2) \\ z^2 - x = 1 & (3) \end{cases}$$

Bài 12: Giải các phương trình:

a) $x^2 + 4x - 16\sqrt{2x} + 20 = 0$

b) $x^4 + x^2 + 2\sqrt{2x} + 2 = 0$.

Bài 13: Giải phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+2x^2} = y & (1) \\ \frac{2y^2}{1+2y^2} = z & (2) \\ \frac{2z^2}{1+2z^2} = x & (3) \end{cases}$$

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x^2} + \sqrt[4]{1-x} = 3.$$

Chương 4 :

Một số chuyên đề bài viết hay, thú vị liên quan đến bất đẳng thức

Đúng như tên gọi của mình, chương này sẽ bao gồm các bài viết chuyên đề về bất đẳng thức. Tác giả của chúng đều là các giáo viên, học sinh giỏi toán mà tác giả đánh giá rất cao. Nội dung của các bài viết chuyên đề đều dễ hiểu và mạch lạc. Chúng ta có thể tham khảo nhiều kiến thức bổ ích từ chúng. Vì khuôn khổ chuyên đề nên chỉ tập hợp được một số bài viết thật sự là hay và thú vị :

Mục lục :

- 4.1. Về một bất đẳng thức có nhiều cách chứng minh
- 4.2. Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác
- 4.3. Thử trở về cội nguồn của môn Lượng giác
- 4.4. Từ một bài toán quen thuộc về bất đẳng thức
- 4.5. Những bài toán không thuộc dạng thông thường.

4.1. Về một bất đẳng thức có nhiều cách chứng minh

Bài viết này giới thiệu các phương pháp chứng minh một bất đẳng thức. Nội dung bài toán cần giải như sau:

“Các số a, b, c, d thỏa mãn các đẳng thức $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng $|ac - bd| \leq 1$ ”

4.1.1. Phương pháp biến đổi tương đương

Ta có: $|ac - bd| \leq 1$ (1)

$$\Leftrightarrow (ac - bd)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a^2(1 - d^2) - 2abcd + b^2(1 - c^2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2d^2 - 2abcd + b^2 - b^2c^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -a^2d^2 - 2abcd - b^2c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad + bc)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Dễ thấy (2) đúng, bởi vậy (1) đúng

4.1.2. Phương pháp tổng hợp

Xuất phát từ bất đẳng thức cần chứng minh, ta có:

$$\begin{aligned} |ac - bd| \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd \leq 1 \\ ac - bd \geq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ac - 2bd \leq 2 \\ 2ac - 2bd \geq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó đề ý đến các bất đẳng thức

$$(a - c)^2 + (b + d)^2 \geq 0$$

$$(a + c)^2 + (b - d)^2 \geq 0$$

Đến đây ta có

$$\begin{cases} (a - c)^2 + (b + d)^2 \geq 0 \\ (a + c)^2 + (b - d)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2ac - 2bd \\ (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2bd - 2ac \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 2ac - 2bd \\ 2 \geq 2bd - 2ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd \leq 1 \\ ac - bd \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |ac - bd| \leq 1$$

4.1.3. Phương pháp phản chứng

Giả sử $|ac - bd| > 1$, nghĩa là

$$\begin{aligned} & \begin{cases} ac - bd > 1 \\ ac - bd < -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2(ac - bd) > (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \\ 2(ac - bd) < -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a - c)^2 + (b + d)^2 < 0 \\ (a + c)^2 + (b - d)^2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Điều này không xảy ra. Vậy ta có:

$$|ac - bd| \leq 1$$

4.1.4. Phương pháp dùng bất đẳng thức quen thuộc

Áp dụng bất đẳng thức $|x - y| \leq |x| + |y|$ ta có:

$$|ac - bd| \leq |ac| + |bd| = \sqrt{a^2 c^2} + \sqrt{b^2 d^2} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi đối với các cặp số a^2 và c^2 , b^2 và d^2 , ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} \geq \sqrt{a^2 c^2} + \sqrt{b^2 d^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} \geq \sqrt{a^2 c^2} + \sqrt{b^2 d^2} \\ \Leftrightarrow & 1 \geq \sqrt{a^2 c^2} + \sqrt{b^2 d^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $|ac - bd| \leq 1$ (dpcm)

4.1.5. Phương pháp đánh giá

Trong trường hợp này, từ điều kiện cho trước của bài toán, thông qua việc biến đổi đồng nhất, ta có:

$$\begin{aligned} 1 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 \\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$\begin{cases} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \geq (ac - bd)^2 \\ (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \geq (ad + bc)^2 \end{cases}$$

Nghĩa là $1 \geq (ac - bd)^2 \Leftrightarrow |ac - bd| \leq 1$

4.1.6. Phương pháp dùng tích vô hướng của hai vector

Đặt $\vec{x} = (a; -b)$
 $\vec{y} = (c; d)$

(Điều này xuất phát từ hai đẳng thức cho trước)

Giả sử α là góc xen giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$.

Ta có $\vec{x} \cdot \vec{y} = ac - bd$

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |ac - bd|$$

Mặt khác $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| |\cos \alpha| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$

(vì $|\vec{x}| |\vec{y}| = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ và $|\cos \alpha| \leq 1$)

Nghĩa là $|ac - bd| = |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}| = 1$

4.1.7. Phương pháp lượng giác

Trên đường tròn lượng giác, ta lấy hai điểm $A(a; b)$, $B(c; d)$. Ta kí hiệu α, β là góc lập bởi bán kính OA và OB (O là gốc tọa độ) với trục Ox (chiều dương). Khi đó:

$$a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$$

$$c = \cos \beta, d = \sin \beta$$

Dễ thấy $|ac - bd| = |\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta| = |\cos(\alpha + \beta)| \leq 1$

Nghĩa là $|ac - bd| \leq 1$

Đôi điều kết luận: Bài toán trên đây không xa lạ, nhưng cách giải bài toán lại rất phong phú. Cũng có thể nói các cách giải tự nhiên, dễ hiểu và tổng hợp được nhiều kiến thức về bất đẳng thức.

4.2. Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác

1/ Chúng ta đi từ bài toán đại số sau: Với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có:

$$\frac{x}{2} < \tan \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi} < \sin x < x.$$

Chứng minh: Ta chứng minh 2 bất đẳng thức: $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ và $\tan \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$.

Đặt $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$ là hàm số xác định và liên tục trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Đặt $g(x) = x \cos x - \sin x$ trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ khi đó $g'(x) = -x \sin x \leq 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $g(x) < g(0) = 0$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ hay $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $h(x) = \frac{1}{x} \tan x$ xác định và liên tục trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $h'(x) = \frac{x - \sin x}{2x^2 \cos^2 \frac{x}{2}} > 0 \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $h(x)$ đồng biến, do đó $h(x) < h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ hay $\tan \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Còn 2 bất đẳng thức $\tan \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ và $\sin x < x$ dành cho bạn đọc tự chứng minh.

Bây giờ mới là phần đáng chú ý:

Xét $\triangle ABC$: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi A, B, C là độ lớn các góc bằng radian; r, R, p, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi và diện tích tam giác; l_a, h_a, m_a, r_a tương ứng là độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến và bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A ...

Bài toán 1: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{p\pi}{4R} < A\cos^2 x + B\cos^2 B + C\cos^2 C < \frac{p}{R}$$

Nhận xét:

Từ định lí hàm số sin quen thuộc trong tam giác ta có:
 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$ và **bài toán đại số** ta dễ dàng đưa ra biến đổi sau

$$A\cos^2 A < 2\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cos^2 A = \sin A < \frac{4}{\pi} A\cos^2 A, \text{ từ đó đưa đến lời giải như sau.}$$

Lời giải:

Ta có: $A\cos^2 A < 2\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cos^2 A = \sin A < \frac{4}{\pi} A\cos^2 A \Rightarrow \sum A\cos^2 A < \sum \sin A = \frac{p}{R}$
 và $\frac{4}{\pi} \sum A\cos^2 A > \sum \sin A = \frac{p}{R} \Rightarrow \sum A\cos^2 A > \frac{p\pi}{4R}$. Từ đây suy ra đpcm.

Trong một tam giác ta có nhận xét sau: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$ kết hợp với $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ nên ta có $\frac{2A}{\pi} \frac{2B}{\pi} + \frac{2B}{\pi} \frac{2C}{\pi} + \frac{2C}{\pi} \frac{2A}{\pi} > \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$
 $\Rightarrow A.B + B.C + C.A > \frac{\pi^2}{4}$ (1). Mặt khác $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ nên ta cũng dễ dàng có $\frac{A}{2} \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \frac{A}{2} < \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$ từ đây ta lại có $A.B + B.C + C.A < 4$ (2). Từ (1) và (2) ta có bài toán mới.

Bài toán 2: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{\pi^2}{4} < A.B + B.C + C.A < 4$$

Lưu ý: Khi dùng cách này để sáng tạo bài toán mới thì đề toán là $\triangle ABC$ phải là nhọn vì trong **bài toán đại số** thì $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Lời giải bài toán tương tự như nhận xét ở trên. Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ thì ta có ngay $A.B + B.C + C.A \leq \frac{(A+B+C)^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}$. Từ đây ta có bài toán “chặt” hơn và “đẹp” hơn:

$$\frac{\pi^2}{4} < A.B + B.C + C.A \leq \frac{\pi^2}{3}$$

Bây giờ ta thử đi từ công thức l_a, h_a, m_a, r_a để tìm ra các công thức mới.

Trong $\triangle ABC$ ta luôn có: $2S = bc \sin A = cl_a \sin \frac{A}{2} + bl_a \sin \frac{A}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{l_a} &= \frac{b+c}{2bc \cos \frac{A}{2}} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} &> \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} &> \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right).\end{aligned}$$

Như vậy chúng ta có **Bài toán 3**.

Bài toán 3: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)$$

Mặt khác, ta lại có $\frac{bc}{l_a} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2}} = \frac{2R(\sin B + \sin C)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)}$. Áp dụng **bài toán đại số**

số ta được:

$$\frac{R(B+C)}{\pi-A} \pi > \frac{bc}{l_a} > \frac{R \frac{2(B+C)}{\pi}}{\frac{\frac{\pi}{2}-A}{2}} \Rightarrow \frac{\pi R(B+C)}{B+C} > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R(B+C)}{\pi(B+C)} \Rightarrow \pi R > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R}{\pi}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\pi R > \frac{ab}{l_c} > \frac{4R}{\pi}$ và $\pi R > \frac{ca}{l_b} > \frac{4R}{\pi}$. Từ đây, cộng 3

chuỗi bất đẳng thức ta được:

Bài toán 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{12R}{\pi} < \frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} < 3\pi R$$

Trong tam giác ta có kết quả $\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}$, $\sin B = \frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ và $\sin C = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$, mà từ kết quả của **bài toán đại số** ta dễ dàng có

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C < \pi, \quad \text{mà} \quad 2(\sin A + \sin B + \sin C) = h_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + h_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + h_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \text{ từ đây ta có được } \mathbf{Bài toán 5}.$$

Bài toán 5: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$4 < h_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + h_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + h_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < 2\pi$$

Ta xét tiếp bài toán sau:

Bài toán 6: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ta luôn có:

$$\frac{4}{\pi^2} (A^2 + B^2 + C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2$$

Nhận xét: Liên hệ với m_a^2 trong tam giác ta có $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, từ đó ta suy ra $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$ và từ đó đưa đến lời giải.

Lời giải:

Áp dụng **bài toán đại số** ta được: $\frac{4x^2}{\pi^2} < \sin^2 x < x^2$ ta lần lượt có: $\frac{4A^2}{\pi^2} < \sin^2 A < A^2$, $\frac{4B^2}{\pi^2} < \sin^2 B < B^2$ và $\frac{4C^2}{\pi^2} < \sin^2 C < C^2$.

Cộng 3 chuỗi bất đẳng thức trên ta được:

$\frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < A^2 + B^2 + C^2$, mà ta có: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Leftrightarrow \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$, từ đây ta được: $\frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2$ (đpcm).

Bây giờ ta thử sáng tạo một bất đẳng thức liên quan tới r_a , ta có công thức tính r_a là $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, từ **bài toán đại số** $\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ chắc chắn ta dễ dàng tìm thấy $\frac{A}{2} < \frac{r_a}{p} < \frac{2A}{\pi}$, tương tự ta cũng có $\frac{B}{2} < \frac{r_b}{p} < \frac{2B}{\pi}$ và $\frac{C}{2} < \frac{r_c}{p} < \frac{2C}{\pi}$, cộng 3 chuỗi bất

đẳng thức ta thu được $\frac{A+B+C}{2} < \frac{r_a+r_b+r_c}{p} < \frac{2(A+B+C)}{\pi}$ và ta thu được **Bài toán 7**.

Bài toán 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{A+B+C}{2} < \frac{r_a+r_b+r_c}{p} < \frac{2(A+B+C)}{\pi}$$

Ta tìm hiểu bài toán sau:

Bài toán 8: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\pi(2R-r) < aA+bB+cC < 4(2R-r)$$

Nhận xét: Ta có các kết quả: $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$, $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ dẫn đến $r_a = r + a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $r_b = r + b \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $r_c = r + c \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ và $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (các kết quả này bạn đọc tự chứng minh), từ đó ta suy ra $4R + r = 3r + p \operatorname{tg} \frac{A}{2} + p \operatorname{tg} \frac{B}{2} + p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ và nhờ kết quả này ta dễ dàng đánh giá tổng $aA + bB + cC$ từ **bài toán đại số** nên ta dễ có lời giải như sau.

Lời giải:

Ta có: $r_a = ptg \frac{A}{2}$, $r_b = ptg \frac{B}{2}$, $r_c = ptg \frac{C}{2}$, $r = (p-a)tg \frac{A}{2} = (p-b)tg \frac{B}{2} = (p-c)tg \frac{C}{2}$,
từ đó dẫn đến $r_a = r + atg \frac{A}{2}$, $r_b = r + btg \frac{B}{2}$, $r_c = r + ctg \frac{C}{2}$. Mà ta lại có:
 $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ suy ra $4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2}$. Áp dụng **bài toán đại số** ta được:

$$\bullet 4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2} < 3r + \frac{2}{\pi}(aA + bB + cC)$$

$$\Leftrightarrow \pi(2R - r) < aA + bB + cC$$

$$\bullet 4R + r = 3r + ptg \frac{A}{2} + ptg \frac{B}{2} + ptg \frac{C}{2} > 3r + \frac{1}{2}(aA + bB + cC)$$

$$\Leftrightarrow 4(2R - r) > aA + bB + cC$$

Kết hợp 2 điều trên ta có điều phải chứng minh.

Sau đây là các bài toán được hình thành từ các công thức quen thuộc để các bạn luyện tập:

Bài toán: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$a/ \ 2\pi p - 8(R + r) < aA + bB + cC < 2\pi p - 2\pi(R + r).$$

$$b/ \ \frac{\pi S}{2} < (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) < 2S.$$

$$c/ \ abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) < \frac{\pi}{2}abc.$$

$$d/ \ 4 < l_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + l_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + l_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < 2\pi.$$

2/Chúng ta xét hàm: $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ với $\forall x \in (0, \pi)$.

Ta có $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trong $(0, \pi)$ và
 $f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$. Đặt $g(x) = \sin x - x \cos x$, $x \in (0, \pi)$, ta có $g'(x) = x \sin x \geq 0 \Rightarrow$
 $g(x)$ đồng biến trong đoạn $(0, \pi) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ nên hàm
 $f(x)$ đồng biến.

Chú ý 3 bất đẳng thức đại số:

1. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta luôn có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

Cho 2 bộ n số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ trong đó $b_i > 0, i = \overline{1, n}$. Ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

3/ Chúng ta xét bất đẳng thức sau: $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (phần chứng minh bất đẳng thức này dành cho bạn đọc).

Theo định lí hàm số sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$ và kết hợp với bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{2R} \geq \frac{2A}{\pi} \Leftrightarrow \frac{a}{A} \geq \frac{4R}{\pi}$, từ đó ta dễ dàng suy ra $\sum_{cyc} \frac{a}{A} > \frac{12R}{\pi}$.

4/ Bất đẳng thức: $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2}$ với $\forall x \in (0, \pi]$ (bất đẳng thức này xem như bài tập dành cho bạn đọc).

$$\text{Bất đẳng thức trên tương đương } \frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{2x^2}{\pi^2 + x^2} \Leftrightarrow \sin x \geq x - \frac{2x^3}{\pi^2 + x^2} \quad (1).$$

Trong tam giác ta có: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) (bạn đọc tự chứng minh). Từ (1) và (2) ta thu được

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sum_{cyc} \sin A > A + B + C - 2 \left(\frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} > \pi - 2 \left(\frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} \right) \Leftrightarrow \frac{A^3}{\pi^2 + A^2} + \frac{B^3}{\pi^2 + B^2} + \frac{C^3}{\pi^2 + C^2} > \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{4}.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức cho 3 góc A, B, C ta thu được $\frac{\sin A}{A} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}$, $\frac{\sin B}{B} > \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2}$ và $\frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, cộng các bất đẳng thức ta được: $\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, từ đây áp dụng định lí

hàm số sin $\sin A = \frac{a}{2R}$ ta có $\frac{\frac{a}{2R}}{A} + \frac{\frac{b}{2R}}{B} + \frac{\frac{c}{2R}}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$ hay

$$\sum_{cyc} \frac{a}{A} > 2R \sum \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}.$$

4.3. Thử trở về cội nguồn của môn lượng giác

“Lượng giác học” có nguồn gốc từ Hình học. Tuy nhiên phần lớn học sinh khi học môn Lượng giác học (giải phương trình lượng giác, hàm số lượng giác ...), lại thấy nó như là một bộ phận của môn Đại số học, hoặc như một công cụ để giải các bài toán hình học (phần tam giác lượng) mà không thấy mối liên hệ hai chiều giữa các bộ môn ấy.

Trong bài viết này, tôi hy vọng phần nào có thể cho các bạn một cách nhìn “mới” : dùng hình học để giải các bài toán lượng giác.

Trước hết, ta lấy một kết quả quen thuộc trong hình học sơ cấp : “Nếu G là trọng tâm tam giác ABC và M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác đó thì” :

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{Định lý Lép-nít})$$

Nếu $M \equiv O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$ nên áp dụng định lý hàm số sin, ta suy ra :

$$OG^2 = R^2 - \frac{4}{9}R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\Rightarrow OG^2 = \frac{4}{9}R^2\left(\frac{9}{4} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\right) \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1), suy ra :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv O$, tức là khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. Như vậy, với một kiến thức hình học lớp 10 ta đã phát hiện và chứng minh được bất đẳng thức (2). Ngoài ra, hệ thức (1) còn cho ta một “nguồn gốc hình học” của bất đẳng thức (2), điều mà ít người nghĩ đến. Bằng cách tương tự, ta hãy tính khoảng cách giữa O và trực tâm H của $\triangle ABC$. Xét trường hợp $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Gọi E là giao điểm của AH với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Thế thì :

$$\rho_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = \overline{HE} \cdot \overline{HA}$$

$$\text{Do đó : } OH^2 = R^2 - AH \cdot HE \quad (*)$$

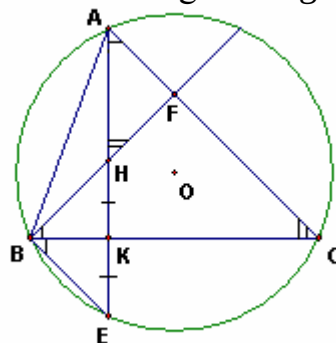
với :

$$AH = \frac{AF}{\sin C} = AB \cdot \frac{\cos A}{\sin C} = 2R \sin C \frac{\cos A}{\sin C} = 2R \cos A$$

$$\text{và } HE = 2HK = 2BK \cot C = 2AB \cos B \cot C$$

$$= 2 \cdot 2R \sin C \cos B \frac{\cos C}{\sin C} = 4R \cos B \cos C$$

Thay vào (*) ta có :



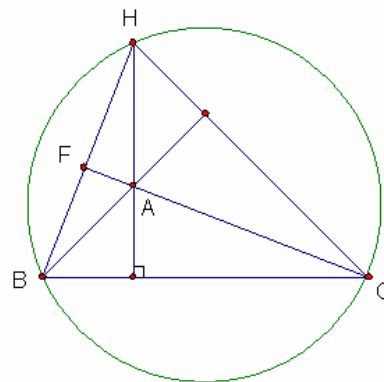
$$OH^2 = 8R^2 \left(\frac{1}{8} - \cos A \cos B \cos C \right) \quad (3)$$

Nếu $\angle BAC = 90^\circ$ chẳng hạn, thì (3) là hiển nhiên. Giả sử $\triangle ABC$ có góc A tù. Khi đó $\rho_{H/(O)} = R^2 - OH^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HE}$ trong đó $AH = -2R \cos A$ nên ta cũng suy ra (3).

Từ công thức (3), ta suy ra :

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều). Cũng như bất đẳng thức (2), bất đẳng thức (4) đã được phát hiện và chứng minh chỉ với kiến thức lớp 10 và có một “nguồn gốc hình học” khá đẹp. Cần nhớ rằng, “xưa nay” chưa nói đến việc phát hiện, chỉ riêng việc chứng minh các bất đẳng thức đó, người ta thường phải dùng các công thức lượng giác (chương trình lượng giác lớp 11) và định lý về dấu tam thức bậc hai.



Có được (1) và (3), ta tiếp tục tiến tới. Ta thử sử dụng “đường thẳng Ôle”.

Nếu O, G, H là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm $\triangle ABC$ thì O, G, H thẳng hàng và : $OG = \frac{1}{3}OH$. Từ $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2$.

Từ (1)(3) ta có :

$$\frac{9}{4} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \frac{1}{4}(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

Thay $\sin^2 \alpha$ bằng $1 - \cos^2 \alpha$ vào đẳng thức cuối cùng, ta được kết quả quen thuộc :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \quad (5)$$

Chưa nói đến việc phát hiện ra (5), chỉ riêng việc chứng minh đã làm “nhức óc” không biết bao nhiêu bạn trẻ mới làm quen với lượng giác. Qua một vài ví dụ trên đây, hẳn các bạn đã thấy vai trò của hình học trong việc phát hiện và chứng minh các hệ thức “thuần túy lượng giác”. Mặt khác, nó cũng nêu lên cho chúng ta một câu hỏi : Phải chăng các hệ thức lượng giác trong một tam giác khi nào cũng có một “nguồn gốc hình học” làm bạn đường ? Mời các bạn giải vài bài tập sau đây để củng cố niềm tin của mình.

1. Chứng minh rằng, trong một tam giác ta có $d^2 = R^2 \left(1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$

trong đó d là khoảng cách giữa đường tròn tâm ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.

Từ đó hãy suy ra bất đẳng thức quen thuộc tương ứng.

- 2. Cho $\triangle ABC$. Đặt trong mặt phẳng ABC các điểm O_1 và O_2 sao cho các tam giác O_1AB và O_2AC là những tam giác cân đỉnh O_1, O_2 với góc ở đáy bằng 30° và sao cho O_1 và C ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , O_2 và B ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AC .

a) Chứng minh :

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)$$

b) Suy ra bất đẳng thức tương ứng :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

- 3. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, thì :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

- 4. Cho tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông, $OA = OB + OC$. Chứng minh rằng :

$$\sin(\angle OAB + \angle OAC) = \cos \angle BAC$$

(Hãy dùng phương pháp ghép hình)

4.4. Từ một bài toán quen thuộc về bất đẳng thức

Về các bài toán chứng minh bất đẳng thức chúng ta gặp khá nhiều. Bài viết này chúng tôi muốn đề cập đến một bất đẳng thức quen thuộc nhưng lại có thể sử dụng nó để làm câu nôi cho việc chứng minh các bất đẳng thức khác phức tạp hơn và nói chung không đơn giản.

1. (Một bất đẳng thức quen thuộc)

Giả sử a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (*) \text{ (BĐT Nesbitt)}$$

Giải:

Ta kí hiệu vế trái của (*) là A và biến đổi như sau:

$$A+3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$$

Đặt $u = a+b, v = a+c, t = b+c$, ta có

$$A+3 = \frac{1}{2}(u+v+t) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{t} \right)$$

Bây giờ ta biến đổi tích:

$$B = (u+v+t) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{t} \right) = 3 + \left(\frac{v}{u} + \frac{u}{v} \right) + \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) + \left(\frac{t}{v} + \frac{v}{t} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được $B \geq 9$

Từ đó suy ra: $A \geq \frac{3}{2}$

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$.

Đến đây ta hãy tìm cách khai thác bài toán trên.

Để ý thấy rằng nếu ta nhân hai vế của (*) với $a+b+c$ ta có bất đẳng thức:

$$(a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Kết quả trên dẫn đến các phép biến đổi bài toán hai như sau:

2. Giả sử a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

Giải:

Ta thấy rằng từ vế phải của (1) nếu thêm điều kiện $abc=1$ thì theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

Khi đó vế phải của (1) biến đổi và từ tính chất bắc cầu của bất đẳng thức ta có bài toán 3:

3. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Giải

Như vậy muốn chứng minh bất đẳng thức (2) ta phải xuất phát từ bất đẳng thức (*), sau đó thực hiện hai bước sau ta sẽ có khẳng định:

- Bước 1: Nhân hai vế của (*) với $a+b+c$ và biến đổi.

- Bước 2: Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3}{2}$

Đến đây, nếu từ (2) và từ giả thiết ta biến đổi theo các bước:

- Bước 1: Bình phương hai vế của (2)

- Bước 2: Nhân hai vế của bất đẳng thức sau bước 1 với $\frac{1}{2}$.

- Bước 3: Thay thế các biểu thức a^2b^2, a^2c^2, b^2c^2 bằng các biểu thức tương ứng:

$$\frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}.$$

Từ ba bước biến đổi trên ta dẫn đến bài toán 4:

4. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{2(b+c)^2} + \frac{b^4}{2(a+c)^2} + \frac{c^4}{2(a+b)^2} + \frac{1}{c^2(a+c)(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+b)(b+c)} + \frac{1}{a^2(a+c)(a+b)} \geq \frac{9}{8}$$

Giải:

Lại tiếp tục biến đổi và từ các bài toán 1,2,3, bài toán sau đây sẽ phức tạp hơn, bởi vậy khi giải phải tìm mối liên hệ giữa nó với các bài toán quen thuộc.

5. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(a+c)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq 3 \quad (3)$$

Giải:

Để thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (4)$$

Để chứng minh (4), ta đặt:

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}.$$

Khi đó mua bất đẳng thức (4) có dạng:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (**)$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên chính thức là nội dung bài toán 3 (do x, y, z là các số dương và $xyz=1$). Bởi vậy bất đẳng thức đó được chứng minh nhờ sử dụng kết quả của bài toán 1 và 2.

Đề ý thêm chút nữa từ các bài toán 1,2 tương đương của bài toán 5 (**), ta có thể phát biểu bài toán 6 dưới dạng “mạnh” hơn:

6. Với bất kì $\alpha \geq 1$ và $x > 0, y > 0, z > 0$, đồng thời $xyz=1$, ta có:

$$S_\alpha = \frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{x+z} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Giải:

Thật vậy, ta hãy đề ý đến hai bất đẳng thức:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (5)$$

$$\text{và} \quad S_1 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (6)$$

Từ các bất đẳng thức (5) và (6) áp dụng cho bộ ba các số

$$\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y} \text{ và } x^{\alpha-1}, y^{\alpha-1}, z^{\alpha-1}$$

Ta được :

$$S_\alpha \geq \frac{S_1(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1})}{3} \geq \frac{3}{2}(xyz)^{\frac{\alpha-1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Dễ dàng kiểm tra lại tính đúng đắn của bất đẳng thức trên.

Chẳng hạn xét:

$$S_2 = \frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$

Ta phải chứng minh:

$$S_2 \geq \frac{\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right)(x+y+z)}{3} \geq \frac{3}{2} \quad (***)$$

Nghĩa là cần chứng minh hai bất đẳng thức:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{3} \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) \quad (7)$$

$$\text{Và } \frac{x+y+z}{3} \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2} \quad (8)$$

Dễ thấy (7) có dạng :

$$\begin{aligned} 3S_2 &\geq \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right)(x+y+z) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{x+y+z}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Rõ ràng (9) có dạng bài toán 2, bởi vậy (9) đúng.

Mặt khác từ các bất đẳng thức:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Và } \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1$$

$$\text{Suy ra: } \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2} \quad (10)$$

Từ (9) và (10) ta có khẳng định (***)

Những ví dụ trên có thể xem là ý tưởng tìm tòi khi làm toán. Các ví dụ được nêu lên từ dễ đến khó và kế thừa nhau. Bởi vậy người viết tuy trình độ có hạn, nhưng hy vọng các bạn yêu thích toán tìm thấy đôi điều lý thú khi đọc xong những nội dung đã trình bày ở trên.

4.5. Một số bài toán không thuộc dạng thông thường

Không ai dám khẳng định là bất đẳng thức là dễ bởi vì bất đẳng thức là một trong những dạng toán rất nhiều sự biến hóa khôn lường. Một bài bất đẳng thức có thể khó với người này nhưng có thể khó với người khác vì vậy tiếp xúc nhiều với bất đẳng thức sẽ giúp ta làm quen được với nó. Đặc biệt là các bài toán không thuộc dạng thông thường. Sau đây là một số ví dụ cho ta thấy được điều đó.

1. Chứng minh rằng với bất kì số tự nhiên $n > 1$, ta có bất đẳng thức:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots \frac{n^2-1}{n^2} \\ & \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

2. Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a|b-c| + b|c-a| + c|a-b|.$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng khi thay đổi giữa a, b, c bởi vậy có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$. khi đó:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b-c) + b(a-c) + c(a-b)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc \geq 0$$

$$(a-b)^2 + c^2 + 2bc \geq 0 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) đúng với mọi $a, b, c \geq 0$

Bởi vậy với các giá trị không âm thay đổi, bất đẳng thức luôn luôn đúng.

3. Chứng minh rằng với các số a, b, c có bất đẳng thức $|a-b| \geq |c|, |b-c| \geq |a|, |c-a| \geq |b|$, thì một trong các số đó có tổng bằng hai số còn lại.

Giải:

Để thấy từ $|a - b| \geq |c|$ suy ra

$$(a - b)^2 \geq c^2 \text{ hay } (a - b + c)(a - b - c) \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$(b - c + a)(b - c - a) \geq 0. (2)$$

$$(c - a + b)(c - a - b) \geq 0. (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$(a - b + c)(a - b - c)(b - c + a)(b - c - a)(c - a + b)(c - a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b - c)^2 (b - c - a)^2 (c - a - b)^2 \leq 0 \quad (4)$$

Về trái của (4) là tích của các số không âm, bởi vậy đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ b - c - a = 0 \\ c - a - b = 0 \end{cases}$$

Dẫn đến

$$\begin{cases} a = b + c \\ b = c + a \\ c = a + b \end{cases}$$

4. Chứng minh rằng:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán – Trường THPT Quốc học Huế)

Giải:

Ta có:

$$|x + y - z| + |x - y + z| \geq |x + y - z + x - y + z| = 2|x| \quad (1)$$

$$|x + y - z| + |-x + y + z| \geq |x + y - z - x + y + z| = 2|y| \quad (2)$$

$$|x - y + z| + |-x + y + z| \geq |x - y + z - x + y + z| = 2|z| \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$2(|x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|) \geq 2(|x| + |y| + |z|)$$

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$$

Nhận xét: Để giải bài toán trên ta sử dụng tính chất sau:

$$|A| + |B| \geq |A + B|, \text{ đẳng thức xảy ra khi } AB \geq 0$$

5. Xét dãy số $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 119, a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n - 1$ với $n \geq 5$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{70}^2}{a_1 a_2 \dots a_{70}} > \sqrt{2} - 1$.

Giải:

Ta kí hiệu: $b_n = a_1 a_2 \dots a_n - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2$.

Ta chứng minh rằng:

$$b_{n+1} = b_n - 1 \text{ với } n \geq 5 \quad (*)$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 - a_{n+1}^2 \\ &= a_1 a_2 \dots a_n (a_1 a_2 \dots a_n - 1) - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 - (a_1 a_2 \dots a_n - 1)^2 \\ &= a_1 a_2 \dots a_n - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 - 1 \\ &= b_n - 1 \end{aligned}$$

Mặt khác: $b_5 = a_1 a_2 \dots a_5 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_5^2 = 65$

Áp dụng (*), ta có:

$$b_6 = b_5 - 1 = 64$$

$$b_7 = 63$$

.....

$$b_{70} = 0$$

Nghĩa là: $a_1 a_2 \dots a_{70} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{70}^2$

$$\text{Suy ra: } \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_{70}^2}{a_1 a_2 \dots a_{70}} = 1 > \sqrt{2} - 1$$

6. Dãy các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sao cho với tất cả các số không âm m và n ($m \geq n$) có hệ thức:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}).$$

Chứng minh rằng nếu $a_1 = 1$, thì

$$a_{1994} + a_{1995} \leq a_{1993} + a_{1996}$$

Giải:

* Thật vậy, với $m=n$ ta có $a_0 = 0$

Giả sử $n = 0$, khi đó ta có:

$$a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0)$$

$$\text{Suy ra: } a_{2m} = 4a_m \quad (1)$$

Giả sử $m = n+2$. Khi đó

$$a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n})$$

Áp dụng (1), ta có: $a_{2n+4} = 4a_{n+2}$

$$a_{2n} = 4a_n$$

Bởi vậy:

$$\begin{aligned} a_{2n+2} + a_2 &= \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n}) = \frac{1}{2}(4a_{n+2} + 4a_n) \\ &= 2(a_{n+2} + a_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Mặt khác:

$$a_{2n+2} + a_2 = 4(a_{n+1} + a_1) = 4(a_{n+1} + 1) \quad (3)$$

Từ (2),(3) suy ra:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \quad (4)$$

Áp dụng (4), ta tính được:

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 = 2^2 \\ a_3 &= 9 = 3^2 \\ a_4 &= 16 = 4^2 \\ a^n &= n^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Ta hãy chứng minh (5) bằng quy nạp:

Rõ ràng với $n = 0, n = 1$ ta có (5) đúng. Giả sử (5) đúng với $n=k-1$ và $n=k$ ($k \geq 1$).

Khi đó ta có:

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2 = 2k^2 - (k-1)^2 + 2 = (k+1)^2$$

Như vậy (5) đúng với $n=k+1$, nghĩa là đúng với mọi n không âm.

Đến đây ta tính được

$$a_{1993} = 1993^2$$

$$a_{1994} = 1994^2$$

$$a_{1995} = 1995^2$$

$$a_{1996} = 1996^2$$

Từ đó có bất đẳng thức:

$$a_{1994} + a_{1995} < a_{1993} + a_{1996}.$$

7. Xét tất cả các hàm số bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $a < b$ và $f(x) \geq 0$ với mọi x .

Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$.

Giải:

Do $f(x) \geq 0$ với mọi x , nên ta có $a > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$

Suy ra: $c \geq \frac{b^2}{4a}$

Mặt khác $b > a$, nên $b - a > 0$

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } \frac{a+b+c}{b-a} &\geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} \\ \frac{a+b+c}{b-a} &\geq \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} \\ \frac{a+b+c}{b-a} &\geq \frac{9a^2+6ax+x^2}{4ax} \end{aligned} \quad (1)$$

(với $x = b - a \Leftrightarrow b = a + x$)

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{9a^2+6ax+x^2}{4ax} = \frac{3}{2} + \frac{9a^2+x^2}{4ax} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2x^2}}{2ax} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$

Đẳng thức xảy ra nếu $\begin{cases} c = \frac{b^2}{4a} \\ x^2 = 9a^2 \text{ (với } x=b-a) \end{cases}$

Suy ra $b=c=4a$

8. Các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ac}{a^5+c^5+ac} \leq 1.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

(Dự tuyển vô địch Toán Quốc tế lần thứ 37 - 1996)

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) \\ &= (a+b)\left[(a-b)^2(a^2+ab+b^2)+a^2b^2\right] \end{aligned}$$

Do $(a-b)^2 \geq 0$ và $a, b, c > 0$, nên

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0$$

Suy ra

$$a^5+b^5 \geq a^2b^2(a+b)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} &\leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} \\ &= \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c}. \quad (2)$$

$$\frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leq \frac{b}{a+b+c}. \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) ta có khẳng định và đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

9. Một số nào đó có 2000 ước số là số tự nhiên. Chứng minh rằng số đó lớn hơn 1000000.

Giải:

Tất cả các ước số của n có thể phân thành cặp (nếu n không là số chính phương), trong cặp đó có một số bé hơn $\sqrt{n}$, còn số thứ hai lớn hơn $\sqrt{n}$ (nếu d bé hơn $\sqrt{n}$, thì $\frac{n}{d}$ lớn hơn $\sqrt{n}$). Như vậy số lượng ước số bé hơn $2\sqrt{n}$. Khi đó $2\sqrt{n} > 2000$, suy ra $n > 1000000$.

10. Có hay không bất đẳng thức:

$$x + y \leq z \quad \text{nếu} \quad z > 0 \quad \text{và} \quad x^3 + y^3 + 3xyz \leq 0?$$

Giải:

Do $z > 0$, nên chia cả hai vế của bất đẳng thức $x^3 + y^3 + 3xyz \leq 0$ cho z^3 , ta có:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 + \frac{3xyz}{z^3} \leq 0 \quad (1)$$

Nếu ta kí hiệu $u = \frac{x}{z}, v = \frac{y}{z}$ thì (1) có dạng:

$$u^3 + v^3 + 3uv \leq 0 \quad (1')$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^3 - 3uv(u+v-1) \leq 0 \quad (2)$$

Giả sử $u+v \geq 1$. Nếu u và v khác dấu thì vế trái của (2) là số dương. Nếu u, v cùng dấu thì u, v đều dương, điều này mâu thuẫn với (1'). Dẫn đến $u+v < 1$, đó đó u, v cùng dấu âm, bởi vậy $x < 0, y < 0$ và $x+y < 0$ nghĩa là $x+y < z$ (dpcm)

11. Chứng minh rằng với các số x, y không âm bất kì, ta có bất đẳng thức:

$$x^4 + y^4 + xy^3 + x^3 + y + 1 \geq x^3y + y^3 + x.$$

Giải:

Để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$y^4 + y \geq y^3 \quad (1)$$

$$x^3 + 1 \geq x \quad (2)$$

$$x^4 + xy^3 \geq x^3y \quad (3)$$

Thật vậy, nếu $y \geq 1$ thì $y^4 \geq y^3$

Còn nếu $0 \leq y \leq 1$ thì $y \geq y^3$. Từ đó suy ra (1) đúng.

Mặt khác nếu $x \geq 1$ thì $x^3 \geq x$, còn nếu $0 \leq x \leq 1$, thì $x^3 + 1 \geq x$. Bởi vậy (2) đúng.

Lại có nếu $x \geq y \geq 0$, thì $x^4 \geq x^3y$, do đó (3) đúng, còn nếu $0 \leq x \leq y$ hay $x - y \leq 0$.

Khi đó (3) có dạng:

$$x^4 + xy^3 - x^3y \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3 + y^3 - x^2y) \geq 0$$

Do $x \geq 0$, nên suy ra:

$$x^3 + y^3 - x^2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y(y + x)(y - x) \geq 0 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) đúng, do đó (3) đúng.

Vậy từ (1) (2) (3) suy ra điều phải chứng minh.

Chương 5 :

Bất đẳng thức như thế nào là hay ? Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức ?

*Bạn đọc đã làm quen với bất đẳng thức từ THCS. Bước đầu các bạn có thể chỉ học các bất đẳng thức kinh điển : **Cauchy, Bunhia Cốpski, Jensen, Chebyshev, Nesbitt** ... hay bắt đầu đọc **SOS, ABC**,... Vậy đã bao giờ bạn tự hỏi **Bất đẳng thức như thế nào là hay? Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức ?** Đó thực sự là những vấn đề thú vị đáng để quan tâm và bình luận. Sau đây là một số ý kiến của giáo viên toán, học sinh chuyên toán về vấn đề này :*

Thầy **Nguyễn Văn Hiền** (GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị) :

Bất kỳ bất đẳng thức nào cũng đều có cái hay và cái đẹp riêng của nó. Đặc biệt những bất đẳng thức vận dụng nhiều khía cạnh của cái bất biến trong bất đẳng thức là bất đẳng thức hay!!!

Thầy **An** (GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị) :

Từ bất đẳng thức ban đầu mà suy ra được nhiều bất đẳng thức khác là bất đẳng thức hay!!!

Cô **Thái Thị Lan** (GV dạy toán Trường THCS chuyên Hiếu Giang, Đông Hà, Quảng Trị)

Bất đẳng thức là một trong những đề tài được nhiều người quan tâm nhất. Quan hệ của chúng rất rộng, đi sâu vào là rất khó. Việc chứng minh bất đẳng thức lỏng là tương đối dễ, còn việc làm chặt chúng mới là một công việc khó khăn và đầy kỹ thú!!!

Thầy **Trần Phương** (GD Trung tâm hỗ trợ nghiên cứu và phát triển các sản phẩm trí tuệ, là tác giả nhiều cuốn sách hay về toán học sơ cấp) :

Chứng minh bất đẳng thức là công việc đòi hỏi trí thông minh sáng tạo và sự khéo léo.

Phạm Kim Hùng (SV khóa 9 Cử nhân tài năng – Trường ĐHKHTN – ĐHQGHN, là tác giả cuốn sách “**Secrets in Inequalities**”(Sáng tạo bất đẳng thức) nổi tiếng) :

Điều khó khăn nhất khi chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức là sự khẳng định nó có đúng hay không. Thực tế thì khi giải một bài toán mang tính “giả thuyết” là một việc khá mạo hiểm và mất nhiều thời gian, thậm chí sau những cố gắng như vậy thì kết quả thu được chỉ là một phản ví dụ chứng minh bất đẳng thức sai. Nhưng trong toán học thì những điều như thế này hoàn toàn rất bình thường và các bạn không cần phải e ngại khi *tự phủ định* một bài toán mình đặt ra như vậy cả, vì đó sẽ là bước đầu tiên để bạn sáng tạo ra được một bài toán hay và có ý nghĩa.

Lê Dương Trường Giang (HS chuyên toán khóa 2008 – 2011 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bất đẳng thức là một mảng toán rất khó, nhưng lại là sân chơi để cho những học sinh giỏi toán thể hiện năng lực của mình.

Nguyễn Ngọc Phương Linh (HS chuyên toán khóa 2008 – 2011 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bất đẳng thức hay là bất đẳng thức có những phát biểu đẹp và cách chứng minh thật đặc sắc, có thể khơi gợi trong những học sinh giỏi toán phát triển và tổng quát bài toán.

Trần Tiến Minh (HS chuyên toán khóa 2008 – 2011 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Sáng tạo bất đẳng thức là tập hợp các nghiên cứu rời rạc, các bất đẳng thức đơn lẻ rồi “biến hoá” ra một bất đẳng thức mới. Khi đó ta sẽ càng ngày càng làm chặt nó hơn. Cuối cùng ta sẽ có một bất đẳng thức nhìn vào là hết biết đường làm. ☺

Nguyễn Hương Cảnh (HS chuyên toán khóa 2008 – 2011 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Lấy ý tưởng từ một bất đẳng thức khác (khó!) và phát biểu dưới một cách khác sau khi đã áp dụng một số bổ đề. Tất nhiên khi đó trình độ phải cao hơn, cách làm phải khó hơn, thế mới là sáng tạo !!!

Trương Hữu Hà Ninh (HS chuyên toán khóa 2002 – 2005 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bất đẳng thức có tính tổng quát, khó, đẹp là bất đẳng thức hay!!!

Trương Hữu Đông Hà (HS chuyên toán khóa 2000 – 2003 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Những bất đẳng thức ở dạng tổng quát mà trường hợp đặc biệt của nó là những bất đẳng thức cơ bản, quen thuộc là bất đẳng thức hay!!!

Chương 6 : Hướng dẫn giải bài tập

Bài tập chương 1:

Bài 1:

Ta cần: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 \geq -b^3 + a^2b + ab^2$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + a^3 \geq 2a^3 - b^3 + a^2b + ab^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 \geq a^3 - b^3 + a^3 + a^2b + ab^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 \geq (a^3 - b^3) + (a^3 + a^2b + ab^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 \geq (a - b)(a^2 + ab + b^2) + a(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow 3a^3 \geq (a^2 + ab + b^2)(2a - b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq 2a - b. \quad \text{Hoàn toàn tương tự cho } c, \text{ c biếu thức cón l}^1\text{i, ta cần:}$$

$$\frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} \geq 2b - c, \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq 2c - a.$$

Khi đó cộng các vế của 3 BĐT trên lại với nhau ta được BĐT cần chứng minh.

Bài 2:

Sử dụng biến đổi và BĐT cô si cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a + 2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} \geq a - \frac{2(ab)^{2/3}}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 2 BĐT

$$\frac{b^2}{b + 2c^2} \geq b - \frac{2(bc)^{2/3}}{3} ; \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq c - \frac{2(ca)^{2/3}}{3}$$

Từ đây ta chỉ cần CM

Bài 3:

Chứng minh tương tự như bài 6, ta đưa BĐT về dạng

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq 3$$

Sau đó sử dụng BĐT cô si

$$ba^{2/3} \leq b(2a + 1), cb^{2/3} \leq c(2b + 1), ac^{2/3} \leq a(2c + 1)$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Bài 4:

Theo BĐT cô si dễ thấy

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{(a+1)b^2}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{ab+b}{2}.$$

Tương tự ta cũng có hai BĐT nữa với b và c rồi cộng lại

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} &\geq \left(a+1 - \frac{ab+b}{2}\right) + \left(b+1 - \frac{bc+c}{2}\right) + \left(c+1 - \frac{ca+a}{2}\right) \\ &= 3 + \frac{a+b+c-ab-bc-ca}{2} \geq 3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=1.

Bằng cách tương tự ta có bài toán với 4 số

Bài 5:

Tương tự như bài trên

$$\begin{aligned} \text{Theo BĐT cô si ta có: } \frac{a+1}{b^2+1} &\geq a+1 - \frac{ab+b}{2}; \frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{bc+c}{2} \\ \frac{c+1}{d^2+1} &\geq c+1 - \frac{cd+d}{2}; \frac{d+1}{a^2+1} \geq d+1 - \frac{da+a}{2} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có điều phải chứng minh.

Bài 6

Cũng bằng phương pháp tương tự trên ta có

$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Làm tương tự với b, c và d rồi cộng theo vế ta có

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 4 - \frac{a+b+c+d}{2} = 2. (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 7:

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại điểm rơi: a = b = c = 2. Ta có:

$$\begin{aligned}
 & + \begin{cases} \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{a^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{c}{2} + \frac{19a^3}{8}} \geq \frac{8}{a} + \frac{5b}{2} + \sqrt{\frac{c}{2}} + \frac{19a}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \\ \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{b^2} + \frac{5c^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{19b^3}{8}} \geq \frac{8}{b} + \frac{5c}{2} + \sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{19b}{2} \sqrt{\frac{b}{2}} \\ \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{c^2} + \frac{5a^2}{4} + \frac{b}{2} + \frac{19c^3}{8}} \geq \frac{8}{c} + \frac{5a}{2} + \sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{19c}{2} \sqrt{\frac{c}{2}} \end{cases} \\
 & \Rightarrow \sqrt{29} \cdot S \geq \left(\frac{8}{a} + 2a \right) + \left(\frac{8}{b} + 2b \right) + \left(\frac{8}{c} + 2c \right) + \frac{1}{2}(a+b+c) \\
 & \quad + \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{c}{2}} + \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}} \right) + 9 \left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}} \right) \\
 & \geq 2\sqrt{\frac{8}{a} \cdot 2a} + 2\sqrt{\frac{8}{b} \cdot 2b} + 2\sqrt{\frac{8}{c} \cdot 2c} + \frac{1}{2}(a+b+c) + 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}} + \\
 & \quad + 2\sqrt{\sqrt{\frac{b}{2}} \cdot \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}} + 2\sqrt{\sqrt{\frac{c}{2}} \cdot \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}} + 9 \left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}} \right) \\
 & = 15 + \frac{3}{2}(a+b+c) + 6 \left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}} \right) + \\
 & \quad + 3 \left[\left(2\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + 1 \right) + \left(2\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}} + 1 \right) + \left(2\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} + 1 \right) \right] \\
 & \geq 15 + \frac{3}{2}(a+b+c) + 6 \left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}} \right) + 3 \left(\frac{3a}{2} + \frac{3b}{2} + \frac{3c}{2} \right) \\
 & = 15 + 6 \left[a \left(1 + \sqrt{\frac{a}{2}} \right) + b \left(1 + \sqrt{\frac{b}{2}} \right) + c \left(1 + \sqrt{\frac{c}{2}} \right) \right] = 15 + 6.12 = 3.29
 \end{aligned}$$

Vậy $S \geq 3.29 / \sqrt{29} = 3\sqrt{29}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$

Bài 8:

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có :

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq a^4(b^2 + c^2) + b^4(c^2 + a^2) + c^4(a^2 + b^2) \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức **AM-GM** thì :

$$(a^6 + a^4b^2) + (a^6 + a^4c^2) \geq 2a^5(b+c) \quad (2)$$

$$(b^6 + b^4c^2) + (b^6 + b^4a^2) \geq 2b^5(c+a) \quad (3)$$

$$(c^6 + c^4a^2) + (c^6 + c^4b^2) \geq 2c^5(a+b) \quad (4)$$

Cộng (1),(2),(3),(4) về theo về suy ra đpcm

Bài tập chương 2:

Bài 1:

Ta có :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} = 4S$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$64S^3 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 \geq 2bc - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 \geq 4bc \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\tan \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc \sin^2 \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2}} = 2bc \sin A = 4S$$

Tương tự ta cũng có :

$$\frac{b^2}{\tan \frac{B}{2}} \geq 4S \quad ; \quad \frac{c^2}{\tan \frac{C}{2}} \geq 4S$$

$$\Rightarrow (1) \text{ đúng } \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 2:

Ta có :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{2R^3 \sin A \sin B \sin C}{8} = \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{S}{R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{\sqrt{8} \sqrt{2 \sin A \sin B \sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Vậy :

$$R + r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}} + \frac{\sqrt{8} \sqrt{2 \sin A \sin B \sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Theo Cauchy ta có :

$$\frac{R+r}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S \sqrt{S} \sqrt{\sin A \sin B \sin C}}{8 \sin A \sin B \sin C (\sin A + \sin B + \sin C)}}$$

mà :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow R + r \geq \sqrt[3]{\frac{4S\sqrt{S}}{4^4 \cdot 27 \cdot 3\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 3:

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

Hiển nhiên :

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0$$

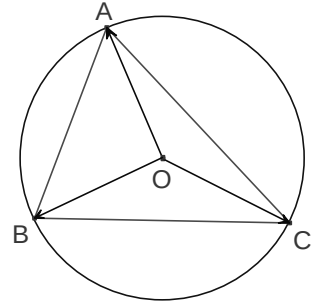
$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2 [\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) + \cos(\vec{OB}, \vec{OC}) + \cos(\vec{OC}, \vec{OA})] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2 (\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0 \Leftrightarrow \vec{OG} = 0 \Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.



Bài 4:

$$\text{Đặt } \overset{r}{a} = \left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} y \right), \overset{r}{b} = \left(y + \frac{z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} z \right), \overset{r}{c} = \left(z + \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$\Rightarrow \overset{r}{a} + \overset{r}{b} + \overset{r}{c} = \left(\frac{3}{2}(x+y+z), \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z) \right)$$

Ta có:

$$\text{Ta luôn có } |\overset{l}{a}| + |\overset{l}{b}| + |\overset{l}{c}| \geq |\overset{l}{a} + \overset{l}{b} + \overset{l}{c}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$$

Bài 5:

$$\text{Đặt } \begin{cases} \vec{a} = (x-p, |p|) \\ \vec{b} = (q-x, |q|) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (q-p, |p|+|q|)$$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ta có

$$y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2} \geq \sqrt{(q-p)^2 + (|q|+|p|)^2}$$

Vậy, GTNN của y là $\sqrt{(q-p)^2 + (|q|+|p|)^2}$

Bài 6:

Với $\forall m, n, p, q \in \mathbb{R}$; Trong mặt phẳng tọa độ, ta đặt

$$\begin{cases} \vec{a} = (m, n) \\ \vec{b} = (p, q) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = (m+p, n+q)$$

Từ đó suy ra

$$|\vec{a}| = \sqrt{m^2 + n^2}; |\vec{b}| = \sqrt{p^2 + q^2}; |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(m+p)^2 + (n+q)^2}$$

Ta có áp dụng công thức $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ từ đó ta có được đpcm

Đối với bài toán trên thì ngoài cách chứng minh như trên ta còn có thể chứng minh bất đẳng thức bằng cách bình phương 2 vế rồi sau đó sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Cách đó cũng cho ra kết quả tương tự

Bài 7:

Với $n=2$ ta có bất $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, bất này đúng qua kiểm tra trực tiếp. Giả sử (1) đúng với một giá trị n nào đó, ta chứng minh bất cũng đúng với $n+1$, tức là

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > n+1 \quad (n=2,3,\dots) \quad (2)$$

Thật vậy cộng 2 vế bất đẳng thức (2) với số hạng $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \quad (3)$$

$$\text{nhưng } \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

Từ đây suy ra đpcm

Bài 8:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 2(y - \sqrt{5})x + 6y^2 - 4y\sqrt{5} + 6 \geq 0, \forall x, y$$

$$\text{Xét tam thức: } f(x) = x^2 + 2(y - \sqrt{5})x + 6y^2 - 4y\sqrt{5} + 6$$

$$\text{Ta có } \Delta' = (y - \sqrt{5})^2 - 6y^2 + 4y\sqrt{5} - 6$$

$$= (y - 2y\sqrt{5} + 5) - 6y^2 + 4y\sqrt{5} - 6$$

$$= -5y^2 + 2y\sqrt{5} - 1 = -(y\sqrt{5} - 1)^2$$

Ta thấy : $\Delta' \leq 0, \forall x, y$. Suy ra : $f(x) \geq 0, \forall x, y$.

$$\square \text{ ẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Bài 9:

$$VT(1) = (a_1 + a_3) \left(\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_3 + a_4} \right) + (a_2 + a_4) \left(\frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_4 + a_1} \right)$$

$$\geq (a_1 + a_3) \left(\frac{4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right) + (a_2 + a_4) \left(\frac{4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right) \quad (\text{Vận dụng BĐT VI})$$

$$= \left(\frac{4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right) (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = a_3 + a_4 \\ a_2 + a_3 = a_4 + a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_4 \end{cases}$$

Bài 10:

$$\begin{aligned} \text{VT}(1) &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+d} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{a}{a+b} \right) \\ &= \frac{a(d+a) + c(c+d)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \\ &\geq 4 \cdot \frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(a+b+c+d)^2} + 4 \cdot \frac{b^2 + ab + cd + c^2}{(a+b+c+d)^2} \quad (\text{Áp dụng BĐT VI}) \\ &= 2 \cdot \frac{(a+b+c+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 11:

Ta có:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \frac{1}{a} \quad (\text{Vận dụng BĐT I})$$

$$\text{Tương tự :} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{1}{c}$$

Cộng theo vế các BĐT thức ta được đpcm.

Bài 12:

Để giải những bài toán dạng này ta xây dựng cách giải như sau:
Ta sẽ biến đổi để xuất hiện dạng (II)

Trước hết ta tìm 2 số x, y sao cho:

$$(a+3c) + x(a+b) = (c+3a) + y(b+c) = M$$

$$(1+x)a + xb + 3c = 3a + yb + (1+y)c$$

sử dụng phương pháp đồng nhất thức ta có :

$$\text{và } \begin{cases} 1+x=3 \\ 1+y=3, x=y=2, M=3a+2b+3c \end{cases}$$

Bây giờ ta tìm m, n sao cho:

$$4b + m(c+a) = n(3a+2b+3c)$$

Tương tự trên ta tìm được $m=6, n=2$

Đến đây ta chứng minh (2) như sau

Ta có (2) tương đương với

$$\left(\frac{a+3c}{a+b} + 2 + \frac{c+3a}{b+c} + 2 + \frac{4b}{c+a} \right) \geq 16$$

tức là

$$(3a+2b+3c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a} \right) \geq 16$$

VP tương đương với

$$[(a+b) + (b+c) + (c+a) + (c+a)] \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+a} \right] \geq 16$$

(đúng)

$\Rightarrow$ đpcm

Bài 13:

Để thấy $x_1, x_2 \neq 0$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + 2 \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_1} \geq 3+2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \right| \geq \sqrt{5}$$

dễ thấy $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \geq 0$, do đó ta có:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \geq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} \geq \sqrt{5} \quad (1)$$

Theo định lí Viét, từ (1) ta có:

$$\frac{(-2k)^2}{4} - 2 \geq \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2 \geq \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |k| \geq \sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

Nghĩa là $k \geq \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ hoặc $k \leq -\sqrt{\sqrt{5} + 2}$ thì ta có: $\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \geq 3$

Bài tập chương 3:

Bài 1:

Chứng minh các bất đẳng thức sau rồi xét khi dấu bằng xảy ra :

- $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{3}{4}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$
- $\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan A \tan B \tan C$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^2 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$

Bài 1:

Vế trái là số nguyên, nên ta đặt $\frac{6x-4}{5} = y$ y là số nguyên.

Ta tính x theo y

$$6x - 4 = 5y$$

$$x = \frac{5y + 4}{6}$$

Thay $x = \frac{5y + 4}{6}$ vào vế trái, ta được $\left[\frac{2y + 34}{36} \right] = y$

*Theo định nghĩa phần nguyên ta có thể viết:

$$0 \leq \frac{20y + 34}{36} - y < 1$$

$$0 \leq 34 - 16y < 36$$

$$-34 \leq -16y < 2$$

Giải ra ta được $-\frac{1}{8} < y \leq \frac{17}{8} \approx 2,1$

y nhận các giá trị 0, 1, 2.

*Với y=0 thì $x = \frac{2}{3}$. Thử lại thấy:

$$\frac{3 + \frac{8}{3}}{6} = \frac{17}{8} \text{ do đó } \left[\frac{17}{8} \right] = 0$$

*Vậy $y=1$ thì $x = \frac{3}{2}$. Thử lại $\frac{3+\frac{12}{2}}{6} = \frac{9}{6}$ do đó $\left[\frac{9}{6}\right] = 1$.

*Vậy $y=2$ thì $x = \frac{7}{3}$ Thử lại $\frac{3+\frac{28}{3}}{6} = \frac{37}{18}$ do đó $\left[\frac{37}{18}\right] = 2$.

Phương trình có ba nghiệm $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{3}{2}; x_3 = \frac{7}{3}$.

Bài 2:

Ta chứng minh được với mọi số tự nhiên n , ta có bất đẳng thức:

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$$

Thật vậy, vì $4n(n+1) < (2n+1)^2$

$$\text{nên } 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$$

Do đó: $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2$

hay $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ (vì $n, n+1, 4n+2$ không âm).

*Từ kết quả trên ta có thể viết:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] \leq \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

Giả sử số $n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\left[\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0+1}\right] \leq \left[\sqrt{4n_0+2}\right]$$

Có nghĩa là tồn tại số tự nhiên m_0 thỏa mãn:

$$\left[\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0+1}\right] < m_0 \leq \left[\sqrt{4n_0+2}\right]$$

Bất phương trình kép trên được viết thành:

$$4n_0(n_0+1) < (\sqrt{m_0^2} - (2n_0+1))^2 \leq 4n_0(n_0+1)+1 = (2n_0+1)^2$$

Vì $(\sqrt{m_0^2} - (2n_0+1))^2 \in \mathbb{N}$ nên $(\sqrt{m_0^2} - (2n_0+1)) = 2n_0+1$.

Suy ra $\sqrt{m_0^2} = 2(2n_0+1)$

$\sqrt{m_0^2}$ là số chẵn chia hết cho 4.

$2(2n_0+1)$ chia hết cho 4 dư 2.

Do đó không tồn tại n_0, m_0 hay điều giả sử

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] < \left[\sqrt{4n+2}\right] \text{ không xảy ra.}$$

Mà ta luôn có $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] \leq \left[\sqrt{4n+2}\right]$

Vậy $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Bài 3:

Gọi các số thực dương cần tìm là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

Và không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có:

$$x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \quad (2)$$

$$x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \quad (3)$$

$$x_3 = (x_1 + x_2 + x_4 + x_5)^2 \quad (4)$$

$$x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_5)^2 \quad (5)$$

$$x_5 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \quad (6)$$

Đặt $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, các đẳng thức (1), (2), (3), (4), (5), (6) có thể viết:

$$x_1 = (S - x_1)^2$$

$$x_2 = (S - x_2)^2$$

$$x_3 = (S - x_3)^2$$

$$x_4 = (S - x_4)^2$$

$$x_5 = (S - x_5)^2$$

Do giả thiết (1) ta có:

$$x_1 = (S - x_1)^2 \geq (S - x_2)^2 \geq (S - x_3)^2 \geq (S - x_4)^2 \geq (S - x_5)^2 = x_5 \quad (7)$$

*Ta có đồng thời $x_1 \leq x_5$ (suy từ (1))

$$x_1 \geq x_5 \quad (\text{suy từ (7)}).$$

Ta suy ra:

$$x_1 = (S - x_1)^2 = (S - x_2)^2 = (S - x_3)^2 = (S - x_4)^2 = (S - x_5)^2 = x_5.$$

do đó $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

$$\text{Giải phương trình } (S - x_1)^2 = x_1 \quad (x_1 > 0) \quad (8)$$

$$\text{Ta được } 16x_1^2 = x_1 \quad (x_1 > 0) \quad (9)$$

Nghiệm của (9) là $x_1 = \frac{1}{16}$, thử lại ta thấy đúng.

Đáp số: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{16}$.

Bài 4:

Ta kí hiệu diện tích các tam giác MBC, MCA lần lượt là s_1, s_2, s_3 .

Dễ dàng chứng minh:

$$\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_1} \text{ suy ra } \frac{MA}{MA_1} = \frac{s_2}{s_1} + \frac{s_3}{s_1}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{MB}{MB_1} = \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_3}{s_2}$$

$$\frac{MC}{MC_1} = \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_1}{s_3}$$

$$\frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} + \frac{MC}{MC_1} = \left(\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_1}{s_2} \right) + \left(\frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_2} \right) + \left(\frac{s_1}{s_3} + \frac{s_3}{s_1} \right) \geq 6 \quad (s_i > 0) \quad (1)$$

*Gọi diện tích tam giác ABC là S.

*Dấu đẳng thức của (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{S}{3}.$$

Từ đây suy ra M là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 5:

Gọi s_3, s_4 lần lượt là diện tích của tam giác AOB và BOC.

Dễ chứng minh: $s_1.s_2 = s_3.s_4$.

a) Giả sử $AB \parallel CD$, ta chứng minh được $s_3 = s_4$.

Xét $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = S \quad (1)$

Vì $s_3 = s_4$ nên $s_3 + s_4 = 2\sqrt{s_3.s_4} = 2\sqrt{s_1.s_2}$.

Từ (1) ta có thể viết:

$$\sqrt{s_1^2} + \sqrt{s_2^2} + 2\sqrt{s_1.s_2} = S \Rightarrow (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2 = S$$

ta suy ra $\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} = \sqrt{S}$.

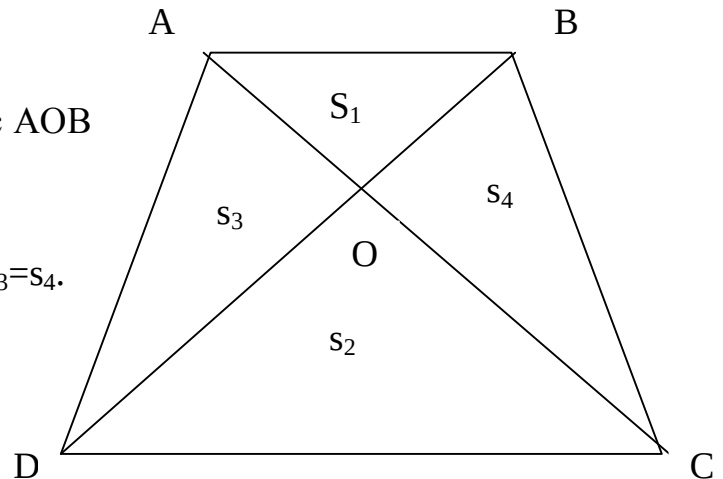
b) Giả sử $\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} = \sqrt{S}$, ta chứng minh $AB \parallel CD$

Xét $(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2 = (\sqrt{S})^2$ hay $s_1 + s_2 + 2\sqrt{s_1.s_2} = S$.

Vì $s_1.s_2 = s_3.s_4$ nên $s_1 + s_2 + 2\sqrt{s_3.s_4} = S$.

Do $s_3, s_4 > 0$ nên $2\sqrt{s_3.s_4} \leq s_3 + s_4$

nên $s_1 + s_2 + 2\sqrt{s_3.s_4} \leq s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = S$.



dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $s_3=s_4$.

*Với $s_3=s_4$ ta chứng minh không khó khăn:

$$s_1+s_3=s_1+s_4.$$

Hai tam giác ABD và ABC có diện tích bằng nhau, suy ra $AB \parallel CD$.

Bài 6:

Kẻ đường cao AH, nó cắt DE tại K.

Đặt $AH=h$, $AK=k$

*Ta có:

$$\frac{S_{PDE}}{S_{ABC}} = \frac{DE}{BC} \cdot \frac{h-k}{h}$$

$$\text{mà } \frac{DE}{BC} = \frac{k}{h}$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{PDE}}{S_{ABC}} = \frac{k(h-k)}{h^2}$$

Ta có k , $h-k$ là hai số không âm mà $k+(h-k)=H$ không đổi, do đó tính $k(h-k)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $k=h-k$ hay $k = \frac{h}{2}$.

$$\text{Do đó: } \frac{S_{PDE}}{S_{ABC}} = \frac{k(h-k)}{h^2} \leq \frac{\frac{h^2}{4}}{h^2} = \frac{1}{4}.$$

Đó là điều phải chứng minh.

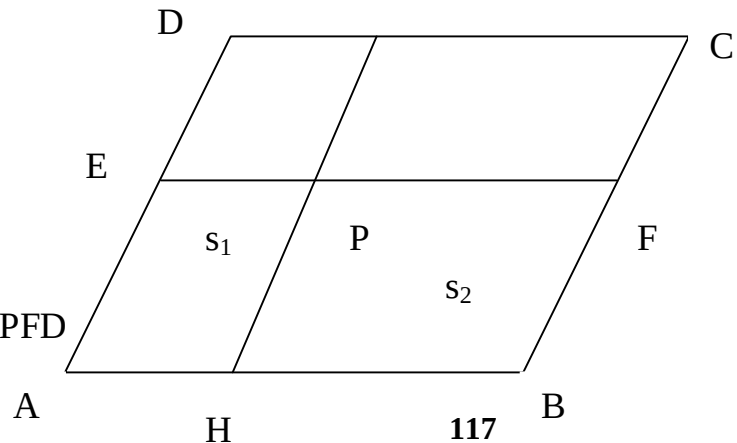
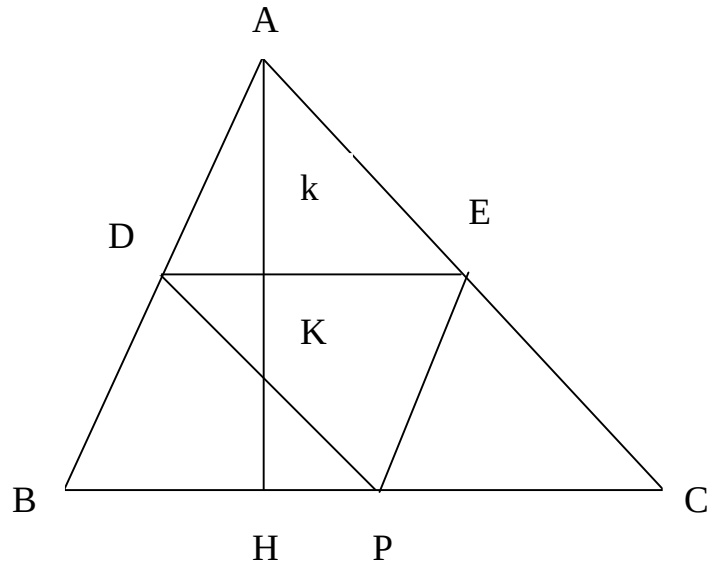
*DE là đường trung bình của ΔABC thì ΔPDE đạt giá trị lớn nhất. K

Bài 7:

Gọi E, F, H, K là các giao điểm như trong hình vẽ.

Gọi s_1, s_2, s_3, s_4 lần lượt là diện tích các hình bình hành AEPH, EDKP, PKCF, HPFD và S là diện tích ABCD.

Tổ 4.vip.pro.friendly – lớp 10 Toán



*Dễ dàng chứng minh $s_1.s_3 = s_2.s_4$

*Vì $s_1.s_3 = s_2.s_4 > 0$ nên ta áp dụng bất đẳng thức côsi, ta được:

$$2\sqrt{s_1.s_3} \leq s_1 + s_3$$

$$2\sqrt{s_1.s_3} \leq s_2 + s_4$$

Suy ra $\sqrt{s_1.s_3} \leq \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = \frac{S}{4}$

Do đó s_1, s_3 đều lớn hơn $\frac{S}{4}$ thì $s_1.s_3 > \frac{S^2}{16}$.

Vậy tồn tại s_1 hoặc s_3 không lớn hơn $\frac{1}{4}$ diện tích ABCD.

Bài 8:

Ta thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình.

Ta chứng minh rằng ngoài $x=2$, phương trình không nhận nghiệm nào khác nữa.

Thật vậy, phương trình đã cho có thể viết:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

a) Nếu $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$

và $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$

Nên $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$

b) Nếu $x < 2$:

*Ta thấy $x=1, x=0$ đều không thỏa mãn phương trình đã cho.

*Với x là các số nguyên âm, ta đặt $x=-y$ thì y là số nguyên dương.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-y} = \left(\frac{5}{3}\right)^y$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{-y} = \left(\frac{5}{4}\right)^y$$

Ta cũng chứng minh được $\left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y$ khác 1.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Bài 9:

*Điều kiện $4 \leq x \leq 6$

Ta thấy $x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$

Mặt khác từ bất đẳng thức $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \leq \frac{A^2+B^2}{2}$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}}{2}\right)^2 \leq \frac{(\sqrt{x-4})^2 + (\sqrt{6-x})^2}{2} = 1$$

$$\text{Hay } \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq 2.$$

$$* \text{Ta suy ra: } x^2 - 10x + 27 = 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = 2. \quad (2)$$

Giải (1) ta được $x=5$.

Thay $x=5$ vào (2) ta thấy giá trị hai vế bằng nhau.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5$.

Bài 10:

Theo giả thiết x, y, z là các số dương và từ (1), (2), (3) ta có

$$x^2 > 1, y^2 > 1, z^2 > 1.$$

*Do tính đối xứng của hệ phương trình khi hoán vị vòng quanh $x \alpha y \alpha z \alpha x$ nên không mất tính tổng quát ta giả sử x là số lớn nhất.

$$x \geq y \geq z$$

$$* \text{Từ (1) suy ra } y = x^2 - 1 \quad (4)$$

$$* \text{Từ (2) suy ra } z = y^2 - 1 \quad (5)$$

$$* \text{Từ (3) suy ra } x = z^2 - 1 \quad (4)$$

Theo điều giả sử $x \geq y$ nên $z^2 - 1 \geq x^2 - 1$ hay $z^2 \geq x^2$ mà x, y, z là các số dương, nên $z \geq x$.

Theo điều giả sử $x \geq z$, mà ta có $z \geq x$, do đó ta suy ra $x = z$. Chứng minh tương tự $x = y$.

$$* \text{Giải phương trình } x^2 - x = 1 \text{ hay } x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{với } x > 0 \text{ ta được nghiệm: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$* \text{Hệ phương trình có nghiệm } x = y = z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại ta thấy thích hợp.

Bài 11:

a) Điều kiện $x \geq 0$

b) *Phương trình đã cho có thể viết:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 8x - 16\sqrt{2x} + 4 + 16 &= 0 \\ (x^2 - 4x + 4) + 8(x - 2\sqrt{2x} + 2) &= 0 \\ (x - 2)^2 + 8(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Ta luôn có: $(x - 2)^2 \geq 0, (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \geq 0$.

Do đó $(x - 2)^2 + 8(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = 0$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 & (2) \\ (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

*Giải (2) ta được $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào (3) ta thấy nghiệm đúng. Ta lại thấy $2 > 0$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình có nghiệm $x = 2$.

c) Điều kiện $x \geq 0$. Ta có:

$$x^2 + 2\sqrt{2x} + 2 = (x + \sqrt{2})^2.$$

Mà $(x + \sqrt{2})^2 > 0$ với mọi x không âm.

Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 12:

Ta thấy $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ.

*Khi một trong ba ẩn số x, y, z nhận giá trị khác 0 thì các giá trị còn lại cũng khác 0 và hơn nữa, chúng đều lớn hơn 0.

*Ta có:
$$\frac{8x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = xyz$$

Hay
$$8xyz = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2).$$

Phương trình trên với các điều kiện đặt ra trở thành:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = 8.$$

*Nhưng với $x, y, z > 0$ ta luôn có:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2; \left(y + \frac{1}{y}\right) \geq 2; \left(z + \frac{1}{z}\right) \geq 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$; $y=1$; $z=1$.

Thế lại ta thấy $x=y=z=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình trên có hai nghiệm $(x, y, z)=(0, 0, 0)$

và $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Bài 13:

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

*Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{(1+x)(1-x)} \leq \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1(1+x)} \leq \frac{1 + \sqrt{1+x}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1(1-x)} \leq \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \quad (3)$$

*Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-x^2} &\leq 1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \\ &\leq 1 + \frac{1+1+x}{2} + \frac{1+1-x}{2} = 3. \end{aligned}$$

*Dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \quad (4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 \quad (5)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 \quad (6)$$

Giải hệ phương trình này ta được $x=0$.

*Kiểm tra lại thấy $x=0$ thoả mãn nên phương trình đã cho có nghiệm $x=0$.

Mục lục

Chương 1 : Các bước đầu cơ sở	05
1.1. Các bất đẳng thức đại số cơ bản	06
1.1.1. Bất đẳng thức Cauchy	06
1.1.1.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi của BĐT Cauchy	09
1.1.1.2 Kỹ thuật Cauchy ngược dấu	14
1.1.2. Bất đẳng thức BunhiaCốpxi	17
1.1.2.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi của BĐT BunhiaCốpxi	20
1.1.3. Bất đẳng thức Jensen	25
1.2. Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác	27
1.2.1. Đẳng thức	27
1.2.2. Bất đẳng thức	29
1.3. Bất đẳng thức đối xứng ba biến	30
1.3.1 Bất đẳng thức không có điều kiện	30
1.3.2 Bất đẳng thức có điều kiện	31
1.4. Bài tập	33
Chương 2 : Các phương pháp chứng minh	34
2.1. Biến đổi tương đương, các tính chất của bất đẳng thức	35
2.2. Sử dụng các bước đầu cơ sở	38
2.3. Đưa về vector và tích vô hướng	41
2.4. Phương pháp quy nạp	45
2.5. Phương pháp phản chứng	47
2.6. Phương pháp dùng tam thức bậc hai	49
2.7. Sử dụng một số bất đẳng thức phụ	52
2.8. Sử dụng định lý Viét	58
2.9. Bài tập	61
Chương 3 : Áp dụng vào một số vấn đề khác	63
3.1. Định tính tam giác	64
3.1.1. Tam giác đều	64
3.1.2. Tam giác cân	67
3.1.3. Tam giác vuông	70
3.2. Vận dụng bất đẳng thức vào giải toán	71
3.3. Bài tập	74
Chương 4 : Một số chuyên đề bài viết hay, thú vị liên quan đến bất đẳng thức.	76
4.1. Về một bất đẳng thức có nhiều cách chứng minh	77
4.2. Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác	80
4.3. Thử trở về cội nguồn của môn Lượng giác	86
4.4. Từ một bài toán quen thuộc về bất đẳng thức	89
4.5. Những bài toán không thuộc dạng thông thường.	93

Chương 5 : Bất đẳng thức như thế nào là hay ?

Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức ? 100

Chương 6 : Hướng dẫn giải bài tập 103

www.diendan3t.net
www.mathnfriend.net
www.truongtructuyen.vn
www.nxbgd.com.vn/toanhocuoitre
www.diendantoanhoc.net
www.toanthpt.net
Tập chí Toán học & Tuổi trẻ (NXB Giáo dục)
Tập chí Toán tuổi thơ 2 (NXB giáo dục)
Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học & Tuổi trẻ (NXB giáo dục)
Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học & Tuổi trẻ (NXB giáo dục)
Tuyển tập Olympiad 30/4
Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn Toán – Hệ thức lượng giác (Trần Phương)
10000 bài toán sơ cấp – Tập 2 : Bất đẳng thức đại số (Phan Huy Khải)
10000 bài toán sơ cấp – Tập 3 : Bất đẳng thức hình học (Phan Huy Khải)
Bất đẳng thức hình học (Vũ Đình Hòa)
Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức (Trần Tuấn Anh)
Sáng tạo bất đẳng thức (Phạm Kim Hùng)
23 phương pháp chuyên đề bất đẳng thức và cực trị lượng giác (Nguyễn Đức Đồng – Nguyễn Văn Vĩnh)
Tuyển tập 200 bài thi vô định toán – Tập 6 : Lượng giác
Toán nâng cao lượng giác THPT (Phan Huy Khải)
263 bài toán bất đẳng thức chọn lọc (Nguyễn Vũ Thanh)
Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan (Nguyễn Văn Mậu)
Phương pháp giải toán bất đẳng thức cực trị (Nguyễn Văn Nho – Nguyễn Tiến Dũng – Nguyễn Việt Hà)
Phương pháp giải 555 bài toán bất đẳng thức đại số (Nguyễn Đức Đồng – Nguyễn Văn Vĩnh)