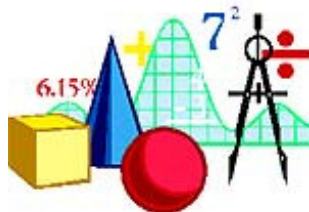


500

Bài Toán Bất Đẳng Thức Chọn Lọc

Cao Minh Quang

♦♦♦♦



Vĩnh Long, Xuân Mậu Tý, 2008

500 Bài Toán Bất Đẳng Thức Chọn Lọc



1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Komal

2. [Dinu Serbănescu] Cho $a, b, c \in (0, 1)$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Junior TST 2002, Romania

3. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

Gazeta Matematică

4. Nếu phương trình $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực, thì

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

Tournament of the Towns, 1993

5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

6. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} \leq a + b + c.$$

Ukraine, 2001

7. [Darij Grinberg] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

8. [Hojoo Lee] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4} \geq a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab}.$$

Gazeta Matematică

9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 2$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

JBMO 2002 Shortlist

10. [Ioan Tomescu] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \leq \frac{1}{7^4}.$$

Gazeta Matematică

11. [Mihai Piticari, Dan Popescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1.$$

12. [Mircea Lascu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, $a > 0$ sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \frac{a^2}{n-1}.$$

Chứng minh rằng

$$x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right], i = 1, 2, \dots, n.$$

13. [Adrian Zahariuc] Cho $a, b, c \in (0, 1)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1.$$

14. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

15. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + x \geq b + y \geq c + z$, $a + b + c = x + y + z$. Chứng minh rằng

$$ay + bx \geq ac + xz.$$

16. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{3}{a + b + c} \geq \frac{6}{ab + bc + ca}.$$

Junior TST 2003, Romania

17. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

JBMO 2002 Shortlist

18. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $n > 3$ thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 x_2} + \frac{1}{1 + x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{1 + x_n + x_n x_1} > 1.$$

Russia, 2004

19. [Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

a) $xyz \leq \frac{1}{8},$

b) $x + y + z \leq \frac{3}{2},$

$$c) \quad xy + yz + zx \leq \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2,$$

$$d) \quad xy + yz + zx \leq \frac{1}{2} + 2xyz.$$

20. [Marius Olteanu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 0$. Chứng minh rằng

$$|\cos x_1| + |\cos x_2| + \dots + |\cos x_5| \geq 1.$$

Gazeta Matematică

21. [Florina Cărlan, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}.$$

22. [Laurentiu Panaitopol] Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x, y, z > -1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

JBMO, 2003

23. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b} \geq 2.$$

24. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

Kvant, 1988

25. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \dots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

Vietnam, 1998

26. [Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$a) \quad xyz \geq 27,$$

$$b) \quad xy + yz + zx \geq 27,$$

$$c) \quad x + y + z \geq 9,$$

$$d) \quad xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) + 9.$$

27. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

Russia 2002

28. [D. Olteanu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c+a}{a+b} \cdot \frac{c}{2c+a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

29. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}.$$

India, 2002

30. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ac + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

Proposed for the Balkan Mathematical Olympical

31. [Adrian Zahariuc] Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số nguyên đôi một phân biệt nhau. Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 + 2n - 3.$$

32. [Murray Klamkin] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \dots + x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_1.$$

Crux Mathematicorum

33. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện $x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_k$ với mọi k . Hãy tìm giá trị lớn nhất của hằng số c sao cho $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \leq c \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$.

IMO Shortlist, 1986

34. Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn điều kiện $a + x = b + y = c + z = 1$. Chứng minh rằng

$$(abc + xyz) \left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx} \right) \geq 3.$$

Russia, 2002

35. [Viorel Vâjăitu, Alexvâră Zaharescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Gazeta Matematică

36. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$a^3(b+c+d) + b^3(c+d+a) + c^3(d+a+b) + d^3(a+b+c).$$

37. [Walther Janous] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

Cruix Mathematicorum

38. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$ là n số thực sao cho $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Chứng minh rằng

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \dots + a_n a_1^4 \geq a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \dots + a_1 a_n^4.$$

39. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

40. Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số nguyên dương lớn hơn 1. Tồn tại ít nhất một trong các số $\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, \dots, \sqrt[n]{a_n}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt[n]{3}$.

Adapted after a well – known problem

41. [Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

a) $xyz \leq \frac{1}{8},$

b) $x + y + z \geq \frac{3}{2},$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z),$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 4(x + y + z) \geq \frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)}, z = \max\{x, y, z\}.$

42. [Manlio Marangelli] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3.$$

43. [Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq 1$$

Chứng minh rằng

$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

44. [Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc} \right) \left(2 + \frac{b^2}{ca} \right) \left(2 + \frac{c^2}{ab} \right) \geq 6(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

45. Cho $a_0 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$. Chứng minh rằng

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

TST Singapore

46. [Călin Popa] Cho $a, b, c \in (0, 1)$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c} \right).$$

47. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x, y, z \leq 1$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}.$$

48. [Gabriel Dospinescu] Cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2 \geq 2^{15}xyz(x+y)(y+z)(z+x).$$

49. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng

a) $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z),$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}.$

50. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

IMO Shortlist, 1987

51. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ và σ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i} \geq \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i \cdot x_{\sigma(i)}} \right).$$

52. Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Vojtech Jarnik

53. [Titu Văreescu] Cho $n > 3$ và a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n a_i \geq n$

và $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq n^2$. Chứng minh rằng

$$\max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2.$$

USAMO, 1999

54. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

55. Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^y + y^x > 1.$$

France, 1996

56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1).$$

MOSP, 2001

57. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc(ab+bc+ca).$$

58. [D.P.Mavlo] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3 \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}.$$

Kvant, 1988

59. [Gabriel Dospinescu] Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$n^n \cdot \prod_{i=1}^n (x_i^n + 1) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^n.$$

60. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27} \right\}.$$

Kvant, 1993

61. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum (1+a^2)^2 (1+b^2)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 \geq (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2.$$

AMM

62. [Titu Văreescu, Mircea Lascu] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$ và $\alpha \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

63. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \leq 2 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right).$$

Korea, 2001

64. [Laurentiu Panaitopol] Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số nguyên dương khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

TST Romania

65. [Călin Popa] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c} + \sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a} + \sqrt{bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b} + \sqrt{ca})} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

66. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16$. Chứng minh rằng

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

67. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

APMO, 2004

68. [Vasile Cirtoale] Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các điều kiện $0 < x \leq y \leq z$, $x + y + z = xyz + 2$. Chứng minh rằng

$$a) (1-xy)(1-yz)(1-zx) \geq 0,$$

$$b) x^2y \leq 1, x^3y^2 \leq \frac{32}{27}.$$

69. [Titu Văreescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

TST 2001, USA

70. [Gabriel Dospinescu, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

71. [Marian Tetiva] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{a^3 - b^3}{a+b} + \frac{b^3 - c^3}{b+c} + \frac{c^3 - a^3}{c+a} \right| \leq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{4}.$$

Moldova TST, 2004

72. [Titu Văreescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

USAMO, 2004

73. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = n^2 + 1.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} \right) > n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}.$$

74. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

75. [Titu Văreescu, Zuming Feng] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+b+c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

USAMO, 2003

76. Cho x, y là các số thực dương và m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x).$$

Austrian – Polish Competition, 1995

77. Cho a, b, c, d, e là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcde = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} + \frac{b+bcd}{1+bc+bcde} + \frac{c+cde}{1+cd+cdea} + \frac{d+dea}{1+de+deab} + \frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geq \frac{10}{3}.$$

Crux Mathematicorum

78. [Titu Văreescu] Cho $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin a \cdot \sin(a-b) \cdot \sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b \cdot \sin(b-c) \cdot \sin(b-a)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c \cdot \sin(c-a) \cdot \sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

TST 2003, USA

79. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \geq \sqrt{a^3 b + b^3 c + c^3 a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}.$$

KMO Summer Program Test, 2001

80. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Hãy tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{a_1 a_2}{(a_1^2 + a_2)(a_2^2 + a_1)} + \frac{a_2 a_3}{(a_2^2 + a_3)(a_3^2 + a_2)} + \dots + \frac{a_n a_1}{(a_n^2 + a_1)(a_1^2 + a_n)} \leq k_n.$$

81. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

Kvant, 1989

82. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1\right) \geq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

83. [Walther Janous] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right).$$

Crux Mathematicorum

84. [Vasile Cirtoaje, Gheoghe Eckstein] Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

TST 1999, Romania

85. [Titu Văreescu] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

USAMO, 2001

86. [Titu Văreescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max \left\{ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \right\}.$$

TST 2000, USA

87. [Kiran Kedlaya] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

88. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với bất kì số nguyên dương n không chính phương, ta có

$$\left| (1 + \sqrt{n}) \sin(\pi \sqrt{n}) \right| > k.$$

Vietnamese IMO Training Camp, 1995

89. [Trần Nam Dũng] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện $(x + y + z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x + y + z)^4}.$$

Vietnam, 2004

90. [George Tsintifas] Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a+b)^3 (b+c)^3 (c+d)^3 (d+a)^3 \geq 16a^2 b^2 c^2 d^2 (a+b+c+d)^4.$$

Crux Mathematicorum

91. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$ và n là số nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(bc)^n}{1-bc} + \frac{(ca)^n}{1-ca}.$$

92. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}.$$

93. [Trần Nam Dũng] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c) - abc \leq 10.$$

Vietnam, 2002

94. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\left(b + \frac{1}{c} - 1\right) + \left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) + \left(c + \frac{1}{a} - 1\right)\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) \geq 3.$$

95. [Gabriel Dospinescu] Cho n là số nguyên lớn hơn 2. Tìm số thực lớn nhất m_n và số thực nhỏ nhất M_n sao cho với các số thực dương bất kì x_1, x_2, \dots, x_n (xem $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1$), ta có

$$m_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + 2(n-1)x_i + x_{i+1}} \leq M_n.$$

96. [Vasile Cirtoaje] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2}.$$

Gazeta Matematică

97. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$2(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1)(d^3 + 1) \geq (1 + abcd)(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2).$$

Gazeta Matematică

98. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Vietnam TST, 1996

99. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

Bulgaria, 1997

100. [Trần Nam Dũng] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Vietnam, 2001

101. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3.$$

102. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Japan, 1997

103. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_n = \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Chứng minh rằng

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n \geq (n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_n}{n-1} - a_n \right)^n.$$

104. [Turkervici] Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 t^2 + x^2 z^2 + y^2 t^2.$$

Kvant

105. Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j.$$

106. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (1001, 2002)$ sao cho $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + \dots + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

TST Singapore

107. [Titu Văreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)^2.$$

108. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

Gazeta Matematică

109. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Gazeta Matematică

110. [Gabriel Dospinescu] Cho n số thực a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i \right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + \dots + a_j)^2.$$

TST 2004, Romania

111. [Trần Nam Dũng] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

112. [Gabriel Dospinescu, Călin Popa] Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$ thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - n \geq \frac{2n}{n-1} \sqrt[n]{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n - n).$$

113. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Gazeta Matematică

114. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

Iran, 1996

115. [Cao Minh Quang] Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\prod_{i=1}^n (3x_i + 1) \leq 2^n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6x_i + 1} \geq \frac{n}{3}.$$

116. [Suranyi] Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1 a_2 \dots a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}).$$

Miklos Schweitzer Competition

117. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 - n.$$

A generalization of Tukervici's Inequality

118. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n < \frac{1}{n-1}$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, n > 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{1 - (n-1)a_i}}.$$

119. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1)$ thỏa mãn điều kiện

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{a_2}{1-a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1-a_n^2} \geq \frac{na}{1-a^2}.$$

120. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.$$

Chúng minh rằng

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

121. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_n}} \leq n-1.$$

Mathlinks Contest

122. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Tìm hằng số k_n lớn nhất sao cho

$$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) \geq k_n x_1 x_2 \dots x_n.$$

123. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

IMO, 1995

124. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

IMO Shortlist, 1996

125. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}.$$

Hong Kong, 2000

126. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1} + \frac{1}{(b+1)^2+c^2+1} + \frac{1}{(c+1)^2+a^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

127. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

IMO, 2000

128. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

IMO Shortlist, 1998

129. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}.$$

130. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

Poland, 1999

131. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

Macedonia, 1999

132. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

133. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Russia, 1991

134. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Hungary, 1996

135. Cho các số thực x, y . Chứng minh rằng

$$3(x+y+1)^2 + 1 \geq 3xy.$$

Columbia, 2001

136. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Czech and Slovakia, 2000

137. Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}.$$

Hong Kong, 1998

138. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Korea, 1998

139. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

IMO, 2001

140. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

IMO Shortlist, 1993

141. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

IMO Shortlist, 1990

142. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab}.$$

Romania, 1997

143. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Canada, 2002

144. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

USA, 1997

145. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Belarus, 1999

146. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1.$$

Belarus, 1998

147. Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$, $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

Poland, 1996

148. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6} + \frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6} + \frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq 2.$$

Roania, 1997

149. Cho $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Vietnam, 1991

150. Cho $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

Ukraine, 1992

151. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz(x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)} \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{9}.$$

Hong Kong, 1997

152. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

IMO Shortlist, 1998

153. Cho hai số thực a, b , $a \neq 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

Austria, 2000

154. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

China, 1984

155. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx).$$

Russia, 2000

156. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \geq xy + yz + zx$. Chứng minh rằng

$$xyz \geq 3(x + y + z).$$

India, 2001

157. Cho $x, y, z > 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}.$$

IMO, 1992

158. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

IMO Shortlist, 2004

159. Cho $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$. Chứng minh rằng

$$(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \geq 125xyz.$$

Saint Petersburg, 1997

160. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geq 1.$$

Singapore, 2000

161. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Czech – Slovak Match, 1999

162. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b}.$$

Moldova, 1999

163. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

Baltic way, 1995

164. Cho x, y, u, v là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xy + xu + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}.$$

Poland, 1993

165. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

APMO, 1998

166. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

Canada, 1999

167. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a + b + c + d + e + f = 1, ace + bdf \geq \frac{1}{108}.$$

Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq \frac{1}{36}.$$

Poland, 1998

168. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

Italy, 1993

169. Cho $a, b, c \geq 0, a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Ireland, 1997

170. Cho $a, b, c \geq 0, a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

BMO, 2001

171. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 9(x + y + z).$$

Belarus, 1996

172. Cho x_1, x_2, x_3, x_4 là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq \max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right\}.$$

Iran, 1997

173. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Belarus TST, 2000

174. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd \geq 3.$$

Latvia, 2002

175. Cho $x, y, z > 1$. Chứng minh rằng

$$x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}.$$

Proposed for 1999 USAMO

176. Cho $c \geq b \geq a \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc.$$

Turkey, 1999

177. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{2}(xy + yz).$$

Macedonia, 2000

178. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}.$$

Bosnia and Hercegovina, 2002

179. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b^4+c^4} + \frac{1}{a^4+b+c^4} + \frac{1}{a^4+b^4+c} \leq 1.$$

Korea, 1999

180. Cho $a > b > c > 0, x > y > z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

Korea, 2000

181. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Mediterranean, 2003

182. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1.$$

Moldova, 2002

183. Cho $\alpha, \beta, x_1, x_2, \dots, x_n > 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1 + \beta x_2} + \frac{x_2^3}{\alpha x_2 + \beta x_3} + \dots + \frac{x_n^3}{\alpha x_n + \beta x_1} \geq \frac{1}{n(\alpha + \beta)}.$$

Moldova TST, 2002

184. Cho a là một số thực dương, $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \dots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2}.$$

Serbia, 1998

185. Cho $x, y \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Russia, 2000

186. Cho $x, y, z > 0, xyz = 1, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > x + y + z, k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} > x^k + y^k + z^k.$$

Russia, 1999

187. Cho $x_n \geq x_{n-1} \geq x_{n-2} \geq \dots \geq x_1 > 0, n \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Saint Petersburg, 2000

188. Cho $x_1, \dots, x_6 \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + \dots + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_3^5 + x_4^5 + \dots + x_1^5 + 5} + \dots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5}.$$

Ukraine, 1999

189. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \dots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1).$$

Czech – Slovak – Polish Match 2001

190. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a \sqrt[3]{1+b-c} + b \sqrt[3]{1+c-a} + c \sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Japan, 2005

191. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Iran, 2005

192. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

Austria, 2005

193. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Poland, 2005

194. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bosnia and Hercegovina, 2005

195. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}.$$

Germany, 2005

196. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Balkan, 2005

197. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}} \geq \frac{4}{3}.$$

APMO, 2005

198. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

Baltic way, 2005

199. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

IMO, 2005

200. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

Belarusian, 2005

201. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$$

Croatia, 2005

202. Cho x là số thực dương. Chứng minh rằng

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

Russia, 2005

203. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

Romania, 2005

204. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{a}{(b+1)(c+1)} + \frac{a}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Czech and Slovak, 2005

205. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - bc + 1} + \frac{1}{b^2 - ca + 1} + \frac{1}{c^2 - ab + 1} \leq 3.$$

China, 2005

206. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab(1-c)} + \sqrt{bc(1-a)} + \sqrt{ca(1-b)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Republic of Srpska, 2005

207. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

Serbia and Montenegro, 2005

208. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

Moldova, 2005

209. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} + 6(a+b+c) \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{abc}.$$

Slovenia TST, 2005

210. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$(2 + abc) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

211. [Huỳnh Tân Châu] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x^6}{x^3 + y^3} + \frac{y^6}{y^3 + z^3} + \frac{z^6}{z^3 + x^3} \geq \frac{1}{2}.$$

212. [Đặng Thanh Hải] Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

213. [Ngô Văn Thái] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n > 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2 + x_2 x_3}{x_1(x_2 + x_3)} + \frac{x_2^2 + x_3 x_4}{x_2(x_3 + x_4)} + \dots + \frac{x_{n-1}^2 + x_n x_1}{x_{n-1}(x_n + x_1)} + \frac{x_n^2 + x_1 x_2}{x_n(x_1 + x_2)} \geq n.$$

214. [Nguyễn Duy Liên] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10.$$

215. [Lê Thanh Hải] Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{\sqrt[4]{abcd}}.$$

216. Cho $x \in [0, 2]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4x - x^3} + \sqrt{x + x^3} \leq 3\sqrt{3}.$$

217. Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{15 - 10\sqrt{2}} \cos x \leq 6.$$

218. [Trần Văn Hạnh] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1 - x^{2n}} + \frac{y}{1 - y^{2n}} + \frac{z}{1 - z^{2n}} \geq \frac{(2n + 1)^{2n} \sqrt{2n + 1}}{2n}.$$

219. [Kiều Phương Chi] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

220. [Vũ Đức Cảnh] Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + x) \left(1 + \frac{1}{y} \right) + (1 + y) \left(1 + \frac{1}{x} \right) \geq 4 + 3\sqrt{2}.$$

221. [Ngô Văn Thái] Cho $a, b, c \in (0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + b + c} \geq \frac{1}{3} + (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

222. [Nguyễn Văn Thông] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{3x}{x + 1} + \frac{4y}{y + 1} + \frac{2z}{z + 1} = 2.$$

Chứng minh rằng

$$x^3 y^4 z^2 \leq \frac{1}{8^9}.$$

223. [Nguyễn Bá Nam] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} \right).$$

224. Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$(16 \cos^4 x + 3)^4 + 768 \geq 2048 \cos x.$$

225. [Lê Quốc Hán] Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8} \leq \frac{(1+x)^8 + 16x^4}{(1+x^2)^4} \leq 17.$$

226. [Nguyễn Lê Dũng] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$$

227. [Trần Xuân Đáng] Cho a, b, c là các số thực dương, $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{n-1}.$$

228. [Trịnh Bằng Giang] Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa điều kiện $x + y + z = 1$, $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$x^n y + y^n z + z^n x \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

229. [Nguyễn Văn Ngọc] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$16xyz(x+y+z) \leq 3\sqrt{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}.$$

230. [Nguyễn Bá Đương] Cho $x, y, z \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{\sin z} + \frac{\sin y - \sin z}{\sin x} + \frac{\sin z - \sin x}{\sin y} \right| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

231. [Thái Nhật Phương] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 3.$$

232. [Thái Nhật Phương] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^7 + y^7} + \frac{y^2 z^2}{y^2 z^2 + y^7 + z^7} + \frac{z^2 x^2}{z^2 x^2 + z^7 + x^7} \leq 1.$$

233. [Trương Ngọc Đắc] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

234. [Nguyễn Minh Phương] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2007$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}} \geq 3.669^9.$$

235. [Phạm Thị Thanh Quỳnh] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c.$$

236. [Lê Quang Năm] Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x, y, z \geq -1$ và $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$. Chứng minh rằng

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

237. [Nguyễn Đễ] Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, |\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma| \geq 2$. Chứng minh rằng

$$|\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma| \leq \sqrt{5}.$$

238. [Huỳnh Tấn Châu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

239. [Đỗ Thanh Hải] Cho x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyzt = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3(yz + zt + ty)} + \frac{1}{y^3(xz + zt + tx)} + \frac{1}{z^3(xt + ty + yx)} + \frac{1}{t^3(xy + yz + zx)} \geq \frac{4}{3}.$$

240. [Đỗ Bá Chủ] Cho $a_1, a_2, \dots, a_k > 0, a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k; k, n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \dots + a_k^{n+1}} \leq 1.$$

241. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1} \leq \frac{10}{3}.$$

Vietnam, 1999

242. [Đặng Thanh Hải] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2 \left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} \right).$$

243. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$a + b + c + abc \geq \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

244. [Phan Hoàng Vinh] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1], n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2 a_3 \dots a_n + 1} + \frac{a_2}{a_1 a_3 \dots a_n + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1} \leq n - 1.$$

245. [Đào Mạnh Thắng] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq a^2 b^2 c^2.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

246. [Đỗ Ngọc Ánh] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{a^3}\right) \left(1 + \frac{1}{b^3}\right) \left(1 + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}.$$

247. [Trương Hoàng Hiếu] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1} \leq \frac{7}{2}.$$

248. [Trần Tuấn Anh] Cho a, b, c là các số thực dương và $k \geq \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}.$$

249. [Trương Ngọc Đắc] Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{xy} \geq 4 + 2\sqrt{3}.$$

250. [Hồ Quang Vinh] Cho a, b, c, d là các số thực thỏa điều kiện $a^2 + b^2 = c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$ac + bd + cd \leq 4 + 4\sqrt{2}.$$

251. [Trương Ngọc Đắc] Cho x, y, z với $x = \max\{x, y, z\}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}} \geq 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}.$$

252. Cho a là số thực dương và x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$a(x^2 + y^2) + z^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}.$$

253. [Triệu Văn Hưng] Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

254. [Phạm Văn Thuận] Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$xy + \max\{x, y\} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

255. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^3+c^3} + \frac{b^3}{c^3+a^3} + \frac{c^6}{a^3+b^3} \geq \frac{1}{18}.$$

256. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{3}{2}.$$

257. [Trần Tuấn Anh] Cho x là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+9}.$$

258. Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a > b \geq 0$. Chứng minh rằng

$$2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geq 5.$$

259. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 4$. Chứng minh rằng

$$2a + 3b + \frac{6}{a} + \frac{10}{b} \geq 18.$$

260. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+a} \leq 3\sqrt[3]{3}.$$

261. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(x + y + z)^6 \geq 432xy^2z^3.$$

262. Cho $a \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$13\sqrt{a^2 - a^4} + 9\sqrt{a^2 + a^4} \leq 16.$$

263. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(2 + \frac{3a}{5b}\right)\left(2 + \frac{3b}{5c}\right)\left(2 + \frac{3c}{5d}\right)\left(2 + \frac{3d}{5a}\right) \geq \frac{28561}{625}.$$

264. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right) \geq 9^4.$$

265. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcd \geq 16$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(b + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right)\left(d + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2401}{16}.$$

266. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} \geq 20.$$

267. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{81}{2}.$$

268. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{(2a+b)(a+c)a} + \sqrt[5]{(2b+c)(b+a)b} + \sqrt[5]{(2c+a)(c+b)c} \leq 3\sqrt[5]{6}.$$

269. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a^2 + a + 2)(b + 1)^2(c^2 + 3c) = 64$.
Chứng minh rằng

$$a^3 b^4 c^5 \leq 1.$$

270. [Trần Hồng Sơn] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq \frac{3}{2}$.
Chứng minh rằng

$$\left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 343.$$

271. Cho a, b, c, m, n, p là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 1, m + n + p \leq \frac{3}{2}$.
Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{c} + \frac{1}{p}\right) \geq 9^3.$$

272. [Phùng Văn Sự] Cho x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng

$$27(x^2 + 3)(y^2 + 3)(z^2 + 3) \geq 4(3xy + 3yz + 3zx)^2.$$

273. [Trần Anh Đức] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ac} \geq \frac{9}{2}.$$

274. [Lê Thanh Hải] Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+b} + \frac{b^3}{1+a} \geq 1.$$

275. [Dương Châu Đình] Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Chứng minh rằng

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \leq 2 + (x^4 + y^4 + z^4).$$

276. [Nguyễn Tất Thu] Cho a, b, c, α là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + \frac{1}{ab}\right)^\alpha + \left(b^2 + \frac{1}{bc}\right)^\alpha + \left(c^2 + \frac{1}{ca}\right)^\alpha \geq 3 \cdot 2^\alpha.$$

277. [Trần Xuân Đáng] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.
Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c).$$

278. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(xyz + 1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq x + y + z + 6.$$

279. [Đàm Văn Nhi] Cho $a, b, c, d \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1} \leq 3.$$

280. [Cao Xuân Nam] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^8}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^8}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{c^8}{(c^2 + a^2)^2} \geq \frac{1}{12}.$$

281. [Trần Hồng Sơn] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 27 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 84.$$

282. [Dương Châu Đình] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \leq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a + b + c} + \frac{1}{a + 10b + c} + \frac{1}{a + b + 10c} \leq \frac{1}{12}.$$

283. [Lê Văn Quang] Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + cd + de + ef = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geq \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{7}}.$$

284. [Cao Minh Quang] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3 + a^2 + 1} + \frac{b}{b^3 + b^2 + 1} + \frac{c}{c^3 + c^2 + 1} \leq \frac{27}{31}.$$

285. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x + y + z}{3\sqrt{3}} \geq \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2}}.$$

286. [Walther Janous] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + 3 \geq a + b + 3 \cdot \frac{3ab + 1}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{3ab + 1}{4}}.$$

287. [Trần Thị Thuận] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{abc+1}.$$

288. Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy).$$

289. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

290. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$(x^x + y^y).$$

291. [Nguyễn Hữu Bằng] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 9.$$

292. [Cao Minh Quang] Cho 10 số thực không âm $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ thỏa mãn điều kiện $a_i^2 + b_i^2 = 1 (i = 1, 2, \dots, 5)$ và $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_5^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}.$$

293. Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq xyz(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)$$

294. [Vedula N. Murty] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}.$$

295. [Cao Minh Quang] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n, n \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x_j}{\sqrt{x_i^3 + 1}} \geq \frac{2n(n-1)}{3}.$$

296. Cho hàm số $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t + 2002t^{2002}}$. Chứng minh rằng với các số

thực $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$, ta có

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

297. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(a^2-9) + (a-c)(b^2-9) + (b-c)(c^2-9) \leq 36.$$

298. Cho các số thực a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Nordic, 1990

299. Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2)$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0$ và $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Đặt $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Chứng minh rằng

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Nordic, 1995

300. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 1)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Nordic, 1999

301. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, ta luôn có bất đẳng thức

$$x_1 x_2 \dots x_n + y_1 y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Poland, 2002

302. Cho x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) là các số thực dương. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}.$$

(ở đây ta xem $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$)

Poland, 2002

303. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2(c^2 + a^2)} \geq \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}.$$

Poland, 2004

304. Cho a, b là các số thực dương và các số thực $x_i, y_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 1$) thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a, y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq b$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Poland, 2005

305. Cho các số thực dương x_1, x_2, \dots, x_n và số thực $c > -2$. Chứng minh rằng nếu

$$\sqrt{x_1^2 + c x_1 x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + c x_2 x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + c x_n x_1 + x_1^2} = \sqrt{c+2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

thì $c = 2$ hoặc $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Poland, 2005.

306. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Poland, 2006

307. Cho $\frac{1}{2} \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3.$$

308. Cho $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^n a + \sin^n b}{(\sin a + \sin b)^n} \geq \frac{\sin^n 2a + \sin^n 2b}{(\sin 2a + \sin 2b)^n}.$$

309. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(-a+b+c)(a-b+c) + (a-b+c)(a+b-c) + (a+b-c)(-a+b+c) \leq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Romania TST, 2002

310. Cho a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5} (a_1 \sqrt{a_1} + a_2 \sqrt{a_2} + \dots + a_n \sqrt{a_n})^2.$$

Romania TST, 2002

311. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $1 \leq x^2 - xy + y^2 \leq 2$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{2}{9} \leq x^4 + y^4 \leq 8,$$

$$\text{b) } x^{2n} + y^{2n} \geq \frac{2}{3^n}, n \geq 3.$$

312. Cho $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (n \geq 3)$ là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} = 2n - 2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k(2n-k)x_k.$$

313. [V. Senderov] Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và m, n là các số tự nhiên sao cho $n > m$. Chứng minh rằng

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leq 3|\sin^m x - \cos^m x|.$$

314. [S. Berlov] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

315. Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\sin \sqrt{x} \leq \sqrt{\sin x}.$$

316. [D. Tereshin] Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \geq 3(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}).$$

317. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 4)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geq 2.$$

Xác định điều kiện xảy ra đẳng thức khi $n = 4$.

318. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$3(a+b+c+d) + 4(abc + bcd + cda + dab) = 8.$$

Chứng minh rằng

$$ab + ac + bc + ad + bd + cd \leq 2.$$

319. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 \leq y + z, y^2 \leq z + x, z^2 \leq x + y$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của z .

Serbia and Montenegro, 2002

320. Cho a, b, c là các số thực dương và n, k là các số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k.$$

321. [R. Sanojevic] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

Serbia and Montenegro, 2004

322. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 5xyz.$$

Serbia and Montenegro, 2006

323. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^2 + z} + \frac{y}{z^2 + x} + \frac{z}{x^2 + y} \geq \frac{9}{4}.$$

Serbia and Montenegro, 2006

324. Chứng minh rằng

$$\sqrt[44]{\tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 44^\circ} < \tan 22^\circ 30' < \frac{1}{44} (\tan 1^\circ + \tan 2^\circ + \dots + \tan 44^\circ).$$

325. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Yugoslavia, 1985

326. Cho $a \geq 1, b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$3 \left(\frac{a^2 - b^2}{8} \right)^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{8}}.$$

Yugoslavia, 1991

327. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}.$$

Yugoslavia, 1993

328. Cho các số thực x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Hãy xác định giá trị lớn nhất của số thực a để

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5).$$

Yugoslavia, 1996

329. [Đ. Dugosija] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

ít nhất hai trong ba số $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ đều lớn hơn 1.

Serbia and Montenegro TST, 2004

330. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Yugoslavia TST, 1985

331. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Sweden, 1985

332. Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)} \leq \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}{(1-x_1)^4 + (1-x_2)^4 + (1-x_3)^4 + (1-x_4)^4}.$$

Taiwan, 2002

333. Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_i}.$$

Turkey TST, 1997

334. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1} + \sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1} + \sqrt{\frac{1}{c}-1}\sqrt{\frac{1}{a}-1} \geq 6.$$

335. Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\sin 2x} + \dots + \frac{\sin(n+1)x}{\sin nx} < 2 \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Ukraine TST, 1999

336. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}.$$

Swiss TST, 2003

337. Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

338. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leq \frac{1}{2}.$$

Italy, 1990

339. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Irish, 1998

340. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] \leq a^2 + b^2 + c^2 - 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Irish, 2005

341. Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}.$$

Irish, 2002

342. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $xyz = -1$. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x+y+z) \geq \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}.$$

Iran, 2004

343. Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2} + \dots + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{3}.$$

Hungary – Israel Competition, 2003

344. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}.$$

Hong Kong, 2006

345. Cho a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ($n \geq 2$) là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}.$$

Hong Kong, 2004

346. Cho $x, y, z > 0, k > 2, a = x + ky + kz, b = kx + y + kz, c = kx + ky + z$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq \frac{3}{2k+1}.$$

Greek TST, 1998

347. Cho x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 - y^2}{2x^2 + 1} + \frac{y^2 - z^2}{2y^2 + 1} + \frac{z^2 - x^2}{2z^2 + 1} \leq 0.$$

Greek TST, 2005

348. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$K = x^3 y + xy^3.$$

Greek, 2006

349. Cho α, β, γ là các số thực thỏa mãn điều kiện $\beta\gamma \neq 0, \frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$. Chứng minh rằng

$$10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq 2\alpha\beta + 5\alpha\gamma.$$

Greek, 2002

350. Cho α, β, x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta = 1$. Chứng minh rằng

$$(\alpha x + \beta y) \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} \right) \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Greek, 2001

351. Cho x, y là các số thực dương. Hãy xác định số k lớn nhất để

$$\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(3x^2 + y^2)}} \leq \frac{1}{k}.$$

Greek, 2000

352. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a < b < c, a + b + c = 6, ab + bc + ca = 9$. Chứng minh rằng

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4.$$

Britain, 1995

353. Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

$$S = x^2 y - y^2 x, P = x^2 y + y^2 z + z^2 x - x^2 z - y^2 x - z^2 y.$$

Britain, 1995

354. Cho a, b, c, d, e là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{d}\right)^4 + \left(\frac{d}{e}\right)^4 + \left(\frac{e}{a}\right)^4 \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{e}{d} + \frac{a}{e}.$$

Britain, 1984

355. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Britain, 2004

356. Cho $a, b, c, p, q, \alpha \in (0, 1)$.

a) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{c^\alpha} + \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{(1-c)^\alpha}, \forall x \in (0,1)$.

b) Chứng minh rằng $\frac{a^{\alpha+1}}{p^\alpha} + \frac{b^{\alpha+1}}{q^\alpha} \geq \frac{(a+b)^{\alpha+1}}{(p+q)^\alpha}$.

Bulgarian, 1984

357. Cho x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các số thực dương. Hãy xác định số C bé nhất để

$$C(x_1^{2005} + x_2^{2005} + \dots + x_5^{2005}) \geq x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 (x_1^{125} + x_2^{125} + \dots + x_5^{125})^{16}.$$

Brasil, 2005

358. Cho a, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x \frac{a+z}{a+x} + y \frac{a+x}{a+y} + z \frac{a+y}{a+z} \leq x + y + z \leq x \frac{a+y}{a+z} + y \frac{a+z}{a+x} + z \frac{a+x}{a+y}.$$

359. Cho $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2^3 3^4 4^5 \dots n^n} < 2.$$

Austria, 1990

360. Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh rằng

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + 2 \geq 6abcd.$$

Austria, 2004

361. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$\min\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Italy, 1992

362. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện $a^2 \leq b^2 + c^2, b^2 \leq c^2 + a^2, c^2 \leq a^2 + b^2$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geq 4(a^6+b^6+c^6).$$

Japan, 2001

363. Cho $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2k-1} < 4.$$

Japan, 1992

364. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}).$$

Mediterranean, 2002

365. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c) + 1 \geq 32abc.$$

Mediterranean, 2004

366. Cho a, b, c là các số khác 0; x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{x}{1+a^2} + \frac{y}{1+b^2} + \frac{z}{1+c^2}.$$

Mediterranean, 1999

367. Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

368. Cho $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \dots + \log_n (n+1) < n + \ln n - 0,9.$$

369. Cho $x, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$y\sqrt{3-2x} + x\sqrt{3-2y} \leq x^2 + y^2.$$

Moldova, 2001

370. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Moldova, 2002

371. Cho n là một số tự nhiên và x là một số thực. Chứng minh rằng

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

372. [V. Yasinsky] Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \gamma \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

373. [V. Yasinsky] Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{2 \sin \alpha} + \beta \frac{\sin \gamma + \sin \alpha}{2 \sin \beta} + \gamma \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

374. [M. Kurylo] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

375. [M. Kurylo] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a(b+1)yz} + \sqrt[3]{b(c+1)zx} + \sqrt[3]{c(a+1)xy} \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

376. [V. Brayman] Cho $0 \leq a, b, c < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1-ab} + \frac{b+c}{1-bc} + \frac{c+a}{1-ca} \leq 2 \frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}.$$

377. [O. Kukush, R. Ushakov] Cho $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{\dots + \sqrt{2n-1}}}}} < 2.$$

378. [V. Gavran] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a}{c}(a+b-c) + \frac{c}{b}(c+a-b) + \frac{b}{a}(b+c-a).$$

379. [R. Ushakov] Cho $n \geq 2, p \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^p}\right) > \frac{p}{p+1}$$

380. [Prymak] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} + \dots + \frac{x_n^3}{y_n^2} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3}{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}.$$

381. [D. Mitin] Cho $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos x \cos y - 4}{\cos x + \cos y - 4} \leq 1 + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{x + y}{\cos x + \cos y - 4} \right).$$

382. [D. Mitin] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = 0$. Chứng minh rằng

$$|x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| - \min_{1 \leq k \leq n} |x_k| \right) (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|).$$

383. [V. Yasinsky] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 2$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\max \{a, b, c\} - \min \{a, b, c\} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

384. [V. Brayman] Cho $1 \leq a, b, c, d \leq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{3} \leq \frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \leq 2.$$

385. [O. Makarchuk] Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \leq 8.$$

386. [V. Yasinsky] Cho x, y, z là các số thực thỏa điều kiện $|x + y + z| \leq 1, |x - y + z| \leq 1, |4x + 2y + z| \leq 8, |4x - 2y + z| \leq 8$. Chứng minh rằng

$$|x| + 3|y| + |z| \leq 7.$$

387. [O. Rybak] Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4 + \frac{b^4}{2} + \frac{c^4}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{c^4}{2} + \frac{a^4}{2}} + \sqrt{c^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2}} \geq \sqrt{a^4 + b^3c} + \sqrt{b^4 + c^3a} + \sqrt{c^4 + a^3b}.$$

388. [Cezar Lupu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2 + bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 + ca}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2 + ab}{(c+a)(c+b)}.$$

389. [Daniel Campos Salas] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a + b + c + 1 = 4abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

390. [Bogdan Enescu] Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các điều kiện

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0, \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\cos 2x \cdot \cos 2y \cdot \cos 2z \leq 0.$$

391. [Phạm Hữu Đức] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{6 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}.$$

392. [Vasile Cartoaje] Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}(4-ab-bc-cd-da) \geq (\sqrt{2}+1)(4-a-b-c-d).$$

393. [Hồ Phú Thái] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

394. [Gabriel Dospinescu] Cho a_1, a_2, \dots, a_5 là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_1(1+a_2) + a_2(1+a_3) + \dots + a_5(1+a_1) + 2.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}.$$

395. Cho x_1, x_2, x_3, x_4 là các số thực thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3.$$

396. [Cezar Lupu] Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+abc}{b+c} + \frac{b^3+abc}{c+a} + \frac{c^3+abc}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2.$$

397. [Titu Andresscu] Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A \cos B \cos C \geq \frac{1}{2}.$$

398. [Phạm Hữu Đức] Cho a, b, c là các số thực không âm nhưng không có hai số nào trong ba số đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}.$$

399. [Titu Andresscu] Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

400. [Darij Grinberg] Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\cos \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \cot \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right).$$

401. [Marian Tetiva] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\text{a) Nếu } a \leq b \leq 1 \leq c \text{ thì } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

$$\text{b) Nếu } a \leq 1 \leq b \leq c \text{ thì } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

402. [Vasile Cartoaje] Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5.$$

403. [Zdravko F. Starc] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a(b^2-\sqrt{b}) + b(c^2-\sqrt{c}) + c(a^2-\sqrt{a}) \geq 0.$$

404. [Ivan Borsenco] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)^3 \leq 3(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2).$$

405. [Nikolai Nikolov] Cho $0 < y < x < 1, 0 < z < 1$. Chứng minh rằng

$$(x^z - y^z)(1 - x^z y^z) > \frac{x - y}{1 - xy}.$$

406. [Bogdan Enescu] Cho a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$|a - 1| + |b + 1| = |a| + |b| = |a - 1| + |b + 1|.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a + b|$.

407. [Iurie Boreico, Marcel Teleucă] Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{2x_i}{3}\right)^{x_i} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n \sqrt[4]{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)}.$$

408. [Iurie Boreico, Ivan Borsenco] Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \geq \frac{16abc}{(a + b + c)^2}.$$

409. [Titu Andreescu] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3(a + b) \geq 2|ab + 1|$. Chứng minh rằng

$$9(a^3 + b^3) \geq |a^3b^3 + 1|.$$

410. [Titu Andreescu] Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(a^2 - ab + b^2)(c^2 - cd + d^2) \geq 2(a^2c^2 - abcd + b^2d^2).$$

411. [Ivan Borsenco] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a) (a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca).$$

$$b) 9(a^4 + b^4 + c^4)^2 \geq (a^5 + b^5 + c^5)(a + b + c)^3.$$

412. [Titu Andreescu] Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Chứng minh rằng

$$7a + 5b + 12ab \leq 9.$$

413. [Phạm Hữu Đức] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + b + c} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) \geq \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

414. [Cezar Lupu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} + \frac{4(ab + bc + ca)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq ab + bc + ca.$$

415. [Bin Zhao] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2 + ab + 4b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{4b^2 + bc + 4c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{4c^2 + ca + 4a^2}} \leq 1.$$

416. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a \geq 1, a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc.$$

417. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \leq 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \geq 1.$$

418. Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $S = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1+x_i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+S-x_i}.$$

419. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(x+y-z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = 4$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4) \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right).$$

420. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

421. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geq 3.$$

422. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Hãy tìm giá trị lớn nhất của số thực k để

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq k(a+b+c)^3.$$

Iran, 2006

423. Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

China TST, 2006

424. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

China TST, 2006

425. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Romania TST, 2006

426. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right).$$

Junior Balkan TST, 2006

427. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Junior Balkan TST, 2006

428. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}.$$

Turkey TST, 2006

429. Cho a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) là các số thực. Giả sử rằng ta có

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1).$$

a) Tìm tất cả các giá trị của n để bất đẳng thức trên đúng khi a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương.

b) Tìm tất cả các giá trị của n để bất đẳng thức trên đúng khi a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực bất kì.

Italy, 2006

430. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3 + \left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3 + \left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3 \geq 3.$$

MOP, 2004

431. Cho $k \in \mathbb{Z}^+$, a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^n \frac{1-a_i^k}{a_i^k} \geq (n^k - 1)^n.$$

432. Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n \leq \frac{1}{4}.$$

433. Cho a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 1$) là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + n}{4}.$$

434. [Aaron Pixton] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$5 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

435. [Mildorf] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3 + 4b^3} + \sqrt[3]{4b^3 + 4c^3} + \sqrt[3]{4c^3 + 4a^3} \leq \frac{4a^2}{a+b} + \frac{4b^2}{b+c} + \frac{4c^2}{c+a}.$$

436. [Po – Ru Loh] Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1.$$

437. [Weighao Wu] Cho $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}.$$

438. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

439. [Gabriel Dospinescu] Cho a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 1$) là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a_1^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{a_2^2+1}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{a_n^2+1}{2}} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

440. [Vascile Cartoaje] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}.$$

441. Cho x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $\sum_{i < j} |x_i - x_j| = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^5 x_i.$$

442. Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [-1, 1]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \sum_{i=1}^4 x_i - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) - \prod_{i=1}^4 x_i.$$

443. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}.$$

444. [Cao Minh Quang] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}.$$

445. [Cao Minh Quang] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab} + \frac{b^2(c+1)}{b+c+ca} + \frac{c^2(a+1)}{c+a+ca} \geq 2.$$

446. [Cao Minh Quang] Cho x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) là n số thực dương thỏa điều kiện

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + 2} \leq 1.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 1} \geq \frac{n(n-1)}{n+1}.$$

447. [Cao Minh Quang] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3a^2 + 2b + 3} + \frac{bc}{3b^2 + 2c + 3} + \frac{ca}{3c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{12}.$$

448. Cho x_1, x_2, \dots, x_{2n} là các số thực thỏa mãn điều kiện $|x_{i+1} - x_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, 2n-1$. Chứng minh rằng

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n}| + |x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}| \leq n(n+1).$$

Romania TST, 2000

449. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leq 4(a + b + c).$$

450. [Rumen Kozarev] Cho $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$x \left(2 \cdot 3^x - \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} \right) \geq 0.$$

451. Cho $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Bulgaria, 1995

452. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4 + c^4} + \sqrt{a^4 + d^4} + \sqrt{b^4 + c^4} + \sqrt{b^4 + d^4} \geq 2\sqrt{2}(ad + bc).$$

Turkey, 2006

453. [Phan Thị Mùi] Cho $1 \leq a, b \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b)^2}{a^3 + b^3}$$

454. [Lê Quang Năm] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$4(xy + yz + zx) \leq \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}).$$

455. Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 12.$$

456. [Nguyễn Đức Tấn] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a\sqrt{ac} + b\sqrt{ba} + c\sqrt{cb}.$$

457. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2.$$

458. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = ab + 2bc + 3ca.$$

459. [Thái Nhật Phụng] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2xyz + xy + yz + zx \leq 1.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$xyz.$$

460. [Minh Trân] Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n.$$

461. [Trần Văn Tỏ] Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) + 2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right) \geq 9.$$

462. [Tạ Hoàng Thông] Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3(xy + yz + zx) - xyz.$$

463. [Trương Ngọc Đắc] Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k i(i+1), k = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n}{n+1}.$$

464. [Tạ Hoàng Thông] Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab + bc + ca)^2}.$$

465. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số thực k để ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c).$$

Vietnam, 2006

466. Cho $x, y, z \in [1, 2]$. Chứng minh rằng

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right).$$

Vietnam TST, 2006

467. [Đỗ Văn Ta] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}} + \frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

468. Cho $\frac{1}{2} \leq x, y, z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}.$$

469. [Phạm Hoàng Hà] Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa điều kiện $x+y+z=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}.$$

470. [Trần Tuấn Anh] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3.$$

471. [Tạ Đức Hải] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$4abc \left[\frac{1}{(a+b)^2 c} + \frac{1}{(b+c)^2 a} + \frac{1}{(c+a)^2 b} \right] + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} \geq 9.$$

472. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq \frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

473. [Trần Tuấn Anh] Cho $x, y \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2}.$$

474. Cho $x_1, x_2, \dots, x_{2007} \in [-1, 1]$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{2007} x_i^3 = 0$. Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_{2007}| \leq \frac{2007}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

475. [Phạm Hoàng Hà] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2006.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

476. [Cao Xuân Nam] Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\frac{8-x^4}{16+x^4} + \frac{8-y^4}{16+y^4} + \frac{8-z^4}{16+z^4} \geq 0.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức xyz .

477. [Nguyễn Khánh Nguyên] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+b-a} + \frac{b^2}{1+c-b} + \frac{c^2}{1+a-c} \geq 1.$$

478. [Phan Tiến Thành] Cho $x, y, z \in (0, 1)$ thỏa mãn điều kiện $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}.$$

479. [Trần Tuấn Anh] Cho $a, b, c \geq -1, a+b+c = \sqrt[3]{4} - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3.$$

480. [Bùi Tuấn Anh] Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc}.$$

481. [Trần Việt Anh] Cho $n \in \mathbb{N}$. Kí hiệu $(2n+1)!!$ là tích các số nguyên dương lẻ từ 1 đến $2n+1$. Chứng minh rằng

$$(2n+1)^{n+1} \leq (2n+1)!! \pi^n.$$

482. [Ngô Trung Kiên] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$ab+bc+ca \leq 3abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4a}{2c+a} \geq 1.$$

483. [Phạm Văn Thuận] Cho a, b, c, d là các số thực phân biệt thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4, ac = bd.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ad+cd)^2}.$$

484. [Phạm Kim Hùng] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}.$$

485. [Trần Nam Dũng] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x+y+z).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

486. [Trần Nam Dũng] Cho $k \in (-1, 2)$ và a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\left[a^2 + b^2 + c^2 + k(ab+bc+ca) \right] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{9(2-k)}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

487. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Chứng minh rằng

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

488. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{c} + 1} + \sqrt{\frac{bc}{a} + 1} + \sqrt{\frac{ca}{b} + 1} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

489. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{bc+a}{1+a}\right)\left(\frac{ca+b}{1+b}\right)\left(\frac{ab+c}{1+c}\right) \geq abc.$$

490. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{yz}{x(x+y+z)+1} + \frac{zx}{y(x+y+z)+1} + \frac{xy}{z(x+y+z)+1} \\ & \geq \frac{x^2}{x(x+y+z)+1} + \frac{y^2}{y(x+y+z)+1} + \frac{z^2}{z(x+y+z)+1}. \end{aligned}$$

491. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a + b + c.$$

492. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+xy}} + \frac{1}{\sqrt{1+yz}} + \frac{1}{\sqrt{1+zx}} \geq \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

493. Cho $-1 \leq x, y \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

494. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n-n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

495. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

496. Cho a, b, x, y là các số thực dương, $a < b$. Chứng minh rằng

$$(x^a + y^a)^b \geq (x^b + y^b)^a.$$

497. Cho $0 < a, b, c \leq \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq \left(\frac{3}{a+b+c}-1\right)^3.$$

498. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd.$$

499. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}} \geq 1.$$

500. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2ab)^a (b^2 + 2bc)^b (c^2 + 2ca)^c \geq (a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}.$$

... sẽ tiếp tục cập nhật