§2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Dãy số $\{u_n\}$ gọi là có giới hạn bằng L khi $n \to +\infty$ và kí hiệu là

$$L = \lim_{n\to+\infty} u_n = a,$$

nếu như với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $n > n_0$, ta có :

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

2. Giả sử tồn tại

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a\ ;\ \lim_{n\to+\infty} v_n = b, \text{ thì :}$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \pm v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \pm b$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n . v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n . \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = ab$;

c) Nếu $b \neq 0$, thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n} = \dfrac{a}{b}$.

3. Nếu $u_n \le v_n, \forall n$ và tồn tại :

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_n\ ;\ b = \lim_{n\to+\infty} v_n, \text{thì } a \le b.$$

4. a) Nếu $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi M, thì tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$L = \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ và } L \le M.$$

b) Nếu $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi m, thì tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$L = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ và } L \ge m.$$

5. ("Nguyên lí kẹp").

Nếu $v_n \le u_n \le w_n \quad \forall n$ và tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Ngoài ra $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Chương 2.

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

BÀI 1. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \dfrac{-1}{3+u_{n-1}}, \text{ với } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Ta có :

$$u_n - u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3+u_n} = \frac{u_n^2 + 3u_n + 1}{3+u_n}. \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng $u_n > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ (2)

(2) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

– Với $n = 0$, thì $u_0 = 1$; với $n = 1$, thì $u_1 = \dfrac{-1}{4}$.

Từ đó dễ dàng suy ra (2) đúng khi $n = 0$ và $n = 1$.

– Giả sử kết luận (2) đã đúng đến $n = k$, tức $u_k > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó : $$3 + u_k > \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + 3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3+u_k} < \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow u_{k+1} = -\frac{1}{3+u_k} > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy (2) cũng đúng với $k+1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (2) đúng với mọi n. Vì $u_n > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ với mọi n, nên $3+u_n > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, tức là

$3+u_n > 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Do $u_n > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ (theo (2)), nên theo định lí thuận về dấu tam thức bậc hai, thì :

$u_n^2 + 3u_n + 1 > 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Vậy từ (1) có $u_n > u_{n+1}$ với mọi n, nghĩa là $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Suy ra tồn tại giới hạn của $\{u_n\}$ khi $n \to \infty$, và đặt :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x.$$

Từ $u_n = \dfrac{-1}{3+u_{n-1}}$ và lấy giới hạn 2 vế khi $n \to \infty$, ta có :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-1}{3+\lim\limits_{n\to\infty} u_{n-1}}$$

hay
$$x = \frac{-1}{3+x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0. \quad (3)$$

Để ý rằng $u_n > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ với mọi n, nên $x = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. (4)

Bây giờ từ (3), (4) đi đến :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

BÀI 2. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1 \ ; \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hãy tìm giới hạn sau : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Bài giải

Ta thấy với mọi $n \geq 2$, thì $-1 < u_n < 0$. Từ đó suy ra nếu đặt dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là α thì $-1 \leq \alpha \leq 0$, và α thoả mãn phương trình :

$$\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0.$$

Do $-1 \leq \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = 1 - \sqrt{3}$.

Xét hiệu sau đây :

$$\left|u_{n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)\right| = \left|\left(\frac{u_n^2}{2} - 1\right) - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{u_n^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2} - 1\right)\right|$$

$$= \left|\frac{u_n^2}{2} - \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|u_n - \left(1-\sqrt{3}\right)\right|\left|u_n + \left(1-\sqrt{3}\right)\right|.$$

Do $u_n < 0$ và $1 - \sqrt{3} < 0$, nên :

$$\left|u_n + \left(1-\sqrt{3}\right)\right| = \left|u_n\right| + \left|1-\sqrt{3}\right|$$

$$= \left|u_n\right| + \sqrt{3} - 1 < \sqrt{3} \text{ (do } \left|u_n\right| < 1\text{)}$$

$$\Rightarrow \left|u_{n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}\left|u_n - \left(1-\sqrt{3}\right)\right|. \qquad (*)$$

Lặp lại bất đẳng thức (*) n lần ta đi đến :

$$\left|u_{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)\right|<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\left|u_2-\left(1-\sqrt{3}\right)\right|<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}.$$

Như thế ta có : $0<\left|u_{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)\right|<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$, $\forall n=1, 2, \ldots$

Do là $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}=0$ nên theo "nguyên lí kẹp" suy ra :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)=0$$

hay
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=1-\sqrt{3}.$$

BÀI 3. Xét các dãy số với số hạng tổng quát như sau :

1) $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

2) $u_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_n=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng các dãy số trên đều có giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Bài giải

1. Ta có :
$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}\right)-$$
$$-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2}<0$$

$\Rightarrow u_{n+1}<u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ suy ra $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Dễ thấy :

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}. \qquad (1)$$

Trong (1) lần lượt thay $k=1, 2, \ldots, n+1$ ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1}}>2\sqrt{2}-2\sqrt{1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}>2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ \ldots \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1} \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta có :

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}>2\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}-2$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}>2\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-2>-2$$

$$\Rightarrow u_{n+1}>-2,\ \forall n=0, 1, 2, \ldots$$

Như vậy dãy $\{u_n\}$ bị chặn dưới bởi -2. Theo nguyên lí giới hạn, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Đó là đ.p.c.m.

2. Rõ ràng $u_{n+1}>u_n$, vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Ta chứng minh rằng

$$u_n<2,\ \forall n\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

Thật vậy (2) đúng khi $n=1$ và $n=2$ $\left(\text{do } u_1=\dfrac{1}{1!}=1\ ;\ u_2=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{3}{2}\right)$.

Chú ý là :

$$3!=2.3>2^2,$$
$$4!=2.3.4>2^3$$
$$\ldots$$
$$n!=2.3.4\ldots n>2^{n-1}.$$

Vậy $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$. (*)

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2 \Rightarrow u_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dãy $\{u_n\}$ là đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2. Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to+\infty} u_n$. Đó là đ.p.c.m.

3. Ta sử dụng kết quả đã biết sau : "Nếu r là số hữu tỉ dương, thì $1 + r < 3^r$".

Xét dãy $u_n = \left(1 + \frac{1}{1!}\right)\left(1 + \frac{1}{2!}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n!}\right)$.

Rõ ràng $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Theo nhận xét trên ta có :

$$1 + \frac{1}{1!} < 3^{\frac{1}{1!}}$$

$$1 + \frac{1}{2!} < 3^{\frac{1}{2!}}$$

$$\cdots$$

$$1 + \frac{1}{n!} < 3^{\frac{1}{n!}}$$

Nhân các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta đi đến

$$u_n < 3^{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} \text{ (do mọi thừa số đều dương)}$$

Áp dụng các tính toán trong phần 2, ta đi đến :

$$u_n < 3^2 = 9.$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi 9. Theo nguyên lí giới hạn suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Đó là đ.p.c.m.

Vậy $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$. (*)

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2 \Rightarrow u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dãy $\{u_n\}$ là đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2. Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Đó là đ.p.c.m.

3. Ta sử dụng kết quả đã biết sau : "Nếu r là số hữu tỉ dương, thì $1 + r < 3^r$".

Xét dãy $u_n = \left(1 + \frac{1}{1!}\right)\left(1 + \frac{1}{2!}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n!}\right)$.

Rõ ràng $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Theo nhận xét trên ta có :

$$1 + \frac{1}{1!} < 3^{\frac{1}{1!}}$$

$$1 + \frac{1}{2!} < 3^{\frac{1}{2!}}$$

$$\cdots$$

$$1 + \frac{1}{n!} < 3^{\frac{1}{n!}}$$

Nhân các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta đi đến

$$u_n < 3^{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} \text{ (do mọi thừa số đều dương)}$$

Áp dụng các tính toán trong phần 2, ta đi đến :

$$u_n < 3^2 = 9.$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi 9. Theo nguyên lí giới hạn suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 4. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_1 = 1$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2005} + u_n \text{ ; với } n = 1, 2, \ldots$$

Tìm giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \cdots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Bài giải

Từ hệ thức đã cho, ta có : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2005}$; với $n = 1, 2, \ldots$

hay
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2005\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) \text{ ; với } n = 1, 2, \ldots$$

Trong đẳng thức trên lần lượt cho $n = 1, 2, \ldots, k$ rồi cộng k đẳng thức trên vế theo vế, ta có :

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}} = 2005\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) = 2005\left(1 - \frac{1}{u_{k+1}}\right). \qquad (1)$$

Theo công thức xác định dãy $\{u_n\}$, hiển nhiên ta có :

$$1 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots$$

Vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Có hai khả năng sau xảy ra :

1. Nếu $\{u_n\}$ bị chặn trên. Theo nguyên lí giới hạn, tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2005} + u_n$,

sau khi lấy giới hạn (với $n \to +\infty$), ta có phương trình :

$$a = \frac{a^2}{2005} + a$$

$$\Rightarrow a = 0.$$

Đó là điều vô lí vì $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và $u_1 = 1$.

2. Nếu $\{u_n\}$ không bị chặn trên. Do $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng, nên ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Vì thế từ (1) có : $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)=2005.$

BÀI 5. Dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn các điều kiện sau :

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}(1-u_n) > \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Tìm giới hạn sau : $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương u_{n+1} và $1-u_n$ và kết hợp với giả thiết ta có : $u_{n+1}+(1-u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1-u_n)} > 2\frac{1}{2} = 1$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra theo giả thiết thứ nhất thì $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi 1. Vậy theo nguyên lí giới hạn, tồn tại giới hạn hữu hạn

$$L = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Do
$$u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[u_{n+1}(1-u_n)\right] \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow L(1-L) \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(L-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow L = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

BÀI 6. Dãy số $\{u_n\}$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \ldots u_n \text{ ; với mọi } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. Tìm $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Bài giải

Từ $u_{i+1} = 1 + u_1 u_2 \ldots u_i$ với $i = 1, 2, \ldots$ suy ra :

$$u_{i+1} - 1 = u_1 u_2 \ldots u_i = u_i\left(u_1 u_2 \ldots u_{i-1} + 1 - 1\right)$$

hay

$$u_{i+1} - 1 = u_i\left(u_i - 1\right) \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots$$

Theo cách xác định dãy và $u_1 = 1$, nên hiển nhiên ta có :

$$u_i > 1, \forall i = 2, 3, \ldots$$

Từ cách lập luận trên suy ra :

$$\frac{1}{u_{i+1} - 1} = \frac{1}{u_i\left(u_i - 1\right)} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_i}, \forall i = 2, 3, \ldots$$

Vì thế

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}. \quad (1)$$

Do $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + u_1 = 2$, nên từ (1), ta có :

$$S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}. \quad (2)$$

Từ (2) đi đến $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1}$. (3)

Vì $u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \ldots u_n > u_1\left(1 + u_1\right)^{n-1} = 2^{n-1}$

nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1} - 1\right) = +\infty.$$

Vì lẽ ấy từ (3) có : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2.$

Chú ý : 1. Do $u_2 = 1+u_1$; $u_3 = 1+u_1u_2 = 1+u_1(1+u_1) > 1+u_1$.

Tương tự có $u_n > 1+u_1 \quad \forall n = 2, 3, \ldots$ Vì thế $u_1u_2\ldots u_n > (1+u_1)^{n-1}$.

2. Ta có bài toán tương tự sau :

Dãy số $\{u_n\}$; n = 1, 2, ...được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1};\ n=1, 2,\ldots \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i+2} \qquad (n=1, 2,\ldots)$

Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Ta có :

$$u_{n+1} = \sqrt{(u_n^2+3u_n)(u_n^2+3u_n+2)+1}$$
$$= \sqrt{(u_n^2+3u_n+1)^2} \qquad (1)$$

Để ý rằng từ cách xác định dãy suy ra $u_n > 0$ với mọi n, do đó từ (1) có

$$u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1$$

hay

$$u_{n+1} + 1 = (u_n+1)(u_n+2)$$

Vì lẽ đó $\frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{(u_n+1)(u_n+2)} = \frac{1}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+2}$

Do đó :

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i+2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{u_i+1} - \frac{1}{u_{i+1}+1}\right)$$
$$= \frac{1}{u_1+1} - \frac{1}{u_{n+1}+1}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1}+1} \qquad (2)$$

Từ $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1$ suy ra $u_{n+1} > 3u_n$

Kết hợp với $u_1 = 1$ ta có $u_n > 3^{n-1}$ với mọi n

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}+1} = 0$

Kết hợp với (2) suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

BÀI 7. Giả sử $a > b > 0$. Lập hai dãy số sau đây $\{u_n\}$, $\{v_n\}$:

$$u_1 = a\ ;\ v_1 = b\ ;$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\ ;\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{ab}$.

Bài giải

Từ cách xác định dãy ta suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$.

Vì lẽ đó với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì $u_n v_n = ab$. (1)

Bây giờ ta chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì

$$\frac{u_n - \sqrt{u_n v_n}}{u_n + \sqrt{u_n v_n}} = \left(\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}\right)^{2^{n-1}} \qquad (2)$$

Thật vậy :

– Với $n = 1$, thì $\dfrac{u_1 - \sqrt{u_1 v_1}}{u_1 + \sqrt{u_1 v_1}} = \dfrac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} = \left(\dfrac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}\right)^{2^{1-1}}$

Vậy (2) đúng khi $n = 1$.

– Giả sử (2) đã đúng đến n.

– Xét với $n+1$. Theo cách xác định dãy và sử dụng (1), ta có :

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}}{u_{n+1} + \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}} = \frac{\dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}}{\dfrac{u_n + v_n}{2} + \sqrt{u_n v_n}} = \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{u_n - \sqrt{u_n v_n}}{u_n + \sqrt{u_n v_n}}\right)^2. \qquad (3)$$

Từ (3) và theo giả thiết quy nạp (xem (2)), ta có :

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}}{u_{n+1} + \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}} = \left(\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}\right)^{2^n} \tag{4}$$

Từ (4) suy ra (2) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Do $a > b > 0$, nên $u_1 + v_1 > 0$, vì thế :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} > 0 \text{ và } v_2 = \frac{2u_1v_1}{u_1 + v_1} = \frac{2ab}{u_1 + v_1} > 0.$$

Từ đó bằng quy nạp dễ dàng suy ra $u_n > 0$, $v_n > 0$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Ta có :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

(do $u_n + v_n > 0, \forall n$).

Nói cách khác $u_n > v_n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ (5)

Ta có $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} < \dfrac{u_1 + u_1}{2}$ (do $v_1 < u_1$)

$\Rightarrow u_2 < u_1$.

Từ đó kết hợp với (5) và dùng quy nạp suy ra $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm. Mặt khác dãy này bị chặn dưới bởi 0, vì thế tồn tại giới hạn hữu hạn

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} u_n. \tag{6}$$

Do $u_nv_n = ab$ với mọi n, mà $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, nên $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng (chú ý $u_n > 0$, $v_n > 0, \forall n$).

Do $u_nv_n > v_n^2$ (vì $u_n > v_n$), nên $v_n < \sqrt{ab}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Vậy $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $\sqrt{ab}$, nên cũng tồn tại giới hạn hữu hạn

$$l_2 = \lim_{n \to +\infty} v_n. \tag{7}$$

Do $\left|\dfrac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right|<1$, nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-1}}=0.$

Từ đó theo (2) suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n-\sqrt{u_nv_n}}{u_n+\sqrt{u_nv_n}}\right)=0$, hay $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n-\sqrt{ab}\right)=0.$

Vì lẽ đó dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\sqrt{ab}.$ (8)

Từ công thức xác định dãy : $v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$,

kết hợp với (6) và (7), suy ra :

$$l_2=\lim_{n\to+\infty}v_{n+1}=2\lim_{n\to+\infty}\frac{u_nv_n}{u_n+v_n}=2\frac{l_1l_2}{l_2+l_1}. \quad (9)$$

Do $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\sqrt{ab}$ (xem (8)), nên từ (9) có :

$$l_2=\frac{2l_2\sqrt{ab}}{l_2+\sqrt{ab}}. \quad (10)$$

Rõ ràng $l_2\geq b>0$ (vì $b=v_1<v_2<v_3<\ldots$), nên từ (10) đi đến :

$$l_2+\sqrt{ab}=2\sqrt{ab}\Rightarrow l_2=\sqrt{ab}.$$

Tóm lại ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\sqrt{ab}.$

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 8. Cho trước 3 số a, b, c. Xác định 3 dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ như sau :

$$u_1=a\ ;\ v_1=b\ ;\ w_1=c$$

$$u_{n+1}=\frac{v_n+w_n}{2}\ ;\ v_{n+1}=\frac{w_n+u_n}{2}\ ;\ w_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$$

(khi $n=1, 2, \ldots$).

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.

Bài giải

Từ cách xác định dãy suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ thì :

$$u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n. \qquad (1)$$

Vì $u_1 = a$; $v_1 = b$; $w_1 = c$, nên từ (1) suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì

$$u_n + v_n + w_n = a + b + c. \qquad (2)$$

Ta có : $u_{n+1} - v_{n+1} = -\dfrac{u_n - v_n}{2}$.

Vì lẽ đó suy ra $u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n (u_1 - v_1)$

hay $$u_{n+1} - v_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b).$$

Từ đó ta đi đến hệ thức sau :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0. \qquad (3)$$

Hoàn toàn tương tự, có :

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0 \qquad (4)$$

$$\lim_{n \to +\infty} (w_n - u_n) = 0. \qquad (5)$$

Mặt khác theo (1), thì :

$$\left|u_n - \frac{a+b+c}{3}\right| = \left|u_n - \frac{u_n + v_n + w_n}{3}\right| = \left|\frac{2u_n - v_n - w_n}{3}\right| = \left|\frac{u_n - v_n}{3} + \frac{u_n - w_n}{3}\right|.$$

Từ đó có :

$$0 \le \left|u_n - \frac{a+b+c}{3}\right| \le \left|\frac{u_n - v_n}{3}\right| + \left|\frac{w_n - u_n}{3}\right|. \qquad (6)$$

Từ (3), (5), (6) và theo "nguyên lí kẹp", suy ra :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(u_n - \frac{a+b+c}{3}\right) = 0$$

hay $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{a+b+c}{3}. \qquad (7)$$

Bây giờ từ (3), (4), (5) và (7) ta có :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \frac{a+b+c}{3}.$$

BÀI 9. Cho trước ba số dương a, b, c. Xác định ba dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ như sau :

$u_1 = a$; $v_1 = b$; $w_1 = c$

$u_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}$; $v_{n+1} = \sqrt{w_n u_n}$; $w_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Bài giải

Dễ dàng thấy rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có :

$$u_n v_n w_n = abc. \tag{1}$$

Theo cách xác định dãy, thì : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Từ đó dễ dàng đi đến hệ thức sau : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\dfrac{u_1}{v_1}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

hay $$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ và $a > 0, b > 0$, nên ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = 1. \tag{2}$$

Lập luận hoàn toàn tương tự, và có :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{u_{n+1}} = 1. \tag{3}$$

Mặt khác dễ thấy từ (1)

$$\frac{u_n}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{u_n}{\sqrt[3]{u_n v_n w_n}} = \sqrt[3]{\frac{u_n}{v_n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{u_n}{w_n}}. \tag{4}$$

Từ (2), (3) và (4), suy ra :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt[3]{abc}. \quad (5)$$

Bây giờ kết hợp (2), (3) và (5), ta thu được :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \sqrt[3]{abc}.$$

BÀI 10. Cho hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ sao cho :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a\ ;\ \lim_{n\to+\infty} v_n = b.$$

Dãy số $\{w_n\}$ được xây dựng như sau :

$$w_n = \frac{u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1}{n}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = ab.$

Bài giải

Xây dựng hai dãy $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ như sau :

$$\alpha_n = u_n - a\ ;\ \beta_n = v_n - b\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

Từ giả thiết suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0.$

Ta có thể viết lại w_n dưới dạng sau :

$$w_n = ab + a\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + $$
$$+ \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}.$$

Đưa vào xét thêm ba dãy nữa như sau :

$$x_n = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n}\ ;\ y_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$$

và

$$z_n = \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}.$$

Từ đó ta có :

$$w_n = ab + ax_n + by_n + z_n. \quad (1)$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, nên với mọi ε > 0, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $|\beta_n| < \varepsilon$.

Như vậy với mọi $n > n_0$, thì :

$$|x_n| = \left|\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n_0} + \beta_{n_0+1} + \cdots + \beta_n}{n}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n_0}}{n}\right| + \left|\frac{\beta_{n_0+1}}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|.$$

Từ đó đi đến : $|x_n| < \left|\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n_0}}{n}\right| + \varepsilon\frac{n - n_0}{n} < \left|\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n_0}}{n}\right| + \varepsilon.$

Từ bất đẳng thức trên, theo định nghĩa giới hạn suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.$

Tương tự có $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0.$

Vì vậy từ (1) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = ab.$

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 11. Cho trước hai số α, β. Lập hai dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ như sau : $u_0 = \alpha$; $v_0 = \beta$;

Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì $u_n = Au_{n-1} - Bv_{n-1}$; $v_n = Bu_{n-1} + Av_{n-1}$,

ở đây A và B là hai số cố định sao cho $A^2 + B^2 < 1$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0.$

Bài giải

Đưa vào xét dãy số $\{w_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ như sau :

$$w_n = u_n^2 + v_n^2. \qquad (1)$$

Khi đó từ (1) có $w_0 = u_0^2 + v_0^2 = \alpha^2 + \beta^2.$ (2)

$$w_1 = u_1^2 + v_1^2 = (Au_0 - Bv_0)^2 + (Bu_0 + Av_0)^2$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)(A^2 + B^2). \qquad (3)$$

Từ (2), (3) và bằng quy nạp suy ra :

$$w_n = (\alpha^2 + \beta^2)(A^2 + B^2)^n. \qquad (4)$$

Do $A^2 + B^2 < 1$, nên từ (4) suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0.$

Vì lẽ đó từ (1) suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0.$

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 12. Cho hai dãy số dương $\{u_n\}$; $\{v_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2}, \end{cases}$$

Với $n = 1, 2, \ldots$ Tìm các giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ và $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

Bài giải

Ta có nhận xét sau đây : Với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì

$$u_n^2 + v_n^2 = 1. \qquad (1)$$

(1) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

– Với $n = 1$, ta có $u_1^2 + v_1^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, vậy (1) đúng khi $n = 1$.

– Giả sử (1) đã đúng đến $n = k$, tức là : $u_k^2 + v_k^2 = 1$.

– Xét khi $n = k + 1$. Ta có theo công thức xác định dãy :

$$u_{k+1}(4v_{k+1}^2 - 1) = u_k \ ; \ v_{k+1}(1 - 4u_{k+1}^2) = v_k.$$

Từ đó áp dụng giả thiết quy nạp, ta có :

$$\left[u_{k+1}(4v_{k+1}^2 - 1)\right]^2 + \left[v_{k+1}(1 - 4u_{k+1}^2)\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1}^2(16v_{k+1}^4 + 1 - 8v_{k+1}^2) + v_{k+1}^2(1 + 16u_{k+1}^4 - 8u_{k+1}^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 - 1\right) + 16u_{k+1}^2 v_{k+1}^4 - 16u_{k+1}^2 v_{k+1}^2 + 16v_{k+1}^2 u_{k+1}^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 - 1\right) + 16u_{k+1}^2 v_{k+1}^2 \left(u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 - 1\right)\left(16u_{k+1}^2 v_{k+1}^2 + 1\right) = 0. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 = 1$.

Vậy (1) cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp, suy ra (1) đúng với mọi n. Do $u_n > 0,\ v_n > 0$ với mọi n, nên ta có :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2} > v_n > v_{n-1} > \ldots > v_2 > v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Như vậy dãy $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1, nên tồn tại giới hạn

$$\beta = \lim_{n\to\infty} v_n. \qquad (4)$$

Tương tự ta có : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} < u_n$

(vì theo (3) ta có $v_{n+1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4v_{n+1}^2 - 1 > 1$).

Từ đó suy ra dãy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên tồn tại giới hạn

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} u_n. \qquad (5)$$

Từ hệ thức $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1}$, và theo (4), (5) suy ra :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{4\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1}^2 - 1} = \frac{\alpha}{4\beta^2 - 1}$$

hay $\alpha\left(4\beta^2 - 2\right) = 0.$ (6)

Có hai khả năng xảy ra :

1. Nếu $\alpha \neq 0$, khi đó từ (6) có $\beta^2 = \dfrac{1}{2}$ và do $\beta > 0$ nên $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (7)

Chú ý rằng (7) mâu thuẫn với (3). Vậy trường hợp này không thể xảy ra.

2. Do vậy từ (6) suy ra $\alpha = 0$. Mặt khác vì với mọi n ta có : $u_n^2 + v_n^2 = 1$,

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n^2 + v_n^2\right) = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$. (8)

Từ $\alpha = 0$, $\beta > 0$ và do (8) đi đến $\beta = 1$.

Tóm lại ta đã thu được kết quả sau : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

Chú ý : Ta có thể giải bài toán trên bằng cách khác như sau :

Sau khi đã chứng minh được hệ thức : Với mọi $n = 1, 2, \ldots$

$$u_n^2 + v_n^2 = 1,$$

thì có thể đặt $u_n = \sin\alpha_n$, $v_n = \cos\alpha_n$.

Theo công thức truy hồi ta có :

$$\begin{cases} \sin\alpha_{n+1} = u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} = \dfrac{\sin\alpha_n}{4\cos^2\alpha_{n+1} - 1} \\ \cos\alpha_{n+1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{1 - 4\sin^2\alpha_{n+1}} \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} \sin\alpha_{n+1} = \dfrac{\sin\alpha_n}{2\left(1+\cos 2\alpha_{n+1}\right) - 1} = \dfrac{\sin\alpha_n}{2\cos 2\alpha_{n+1} + 1} \\ \cos\alpha_{n+1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{1 - 2\left(1 - \cos 2\alpha_{n+1}\right)} = \dfrac{\cos\alpha_n}{2\cos 2\alpha_{n+1} - 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin\alpha_{n+1}\cos 2\alpha_{n+1} + \sin\alpha_{n+1} = \sin\alpha_n \\ 2\cos\alpha_{n+1}\cos 2\alpha_{n+1} - \cos\alpha_{n+1} = \cos\alpha_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 3\alpha_{n+1} = \sin\alpha_n \\ \cos 3\alpha_{n+1} = \cos\alpha_n \end{cases}$$

Vậy ta thu được $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{3}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Do $u_1 = v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{tức là } \alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}\right)$

Từ đó suy ra $\alpha_n = \dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$

Từ đó suy ra $u_n = \sin\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$ và $v_n = \cos\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$.

Dựa vào $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$, nên ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

BÀI 13. Hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \; ; \; v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \end{cases}$$

Với $n = 1, 2, \ldots$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$.

Bài giải

Với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có : $u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{2} = u_n^2 + 2v_n^2 + 2\sqrt{2}u_n v_n$

$$= \left(u_n + v_n\sqrt{2}\right)^2. \quad (1)$$

Áp dụng liên tiếp (1), suy ra : $u_n + v_n\sqrt{2} = \left(u_{n-1} + v_{n-1}\sqrt{2}\right)^2$

$$= \left[\left(u_{n-2} + v_{n-2}\sqrt{2}\right)^2\right]^2$$

$$= \cdots$$

$$= \left(u_1 + v_1\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$= \left[\left(\sqrt{2} + 1\right)^2\right]^{2^{n-1}}$$

Từ đó đi đến $u_n + v_n\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n}$

Lập luận tương tự, và có : $u_n - v_n\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$

Vì thế $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right]. \end{cases}$

Rõ ràng ta có : $u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] < \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$, vì thế :

$$\sqrt[2^n]{u_n} < \sqrt{2}+1. \qquad (2)$$

Tương tự ta có : (*) $\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] > \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{8}$

$$\Rightarrow \sqrt[2^n]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{8}} < \sqrt[2^n]{v_n}. \qquad (3)$$

Và hiển nhiên $v_n < u_n$, nên ta đi đến dãy bất đẳng thức sau với mọi $n = 1, 2, \ldots$

$$\sqrt[2^n]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{8}} < \sqrt[2^n]{v_n} < \sqrt[2^n]{u_n} < \sqrt{2}+1. \qquad (4)$$

Chú ý rằng với mọi $q > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$, và do đó từ (4) theo "nguyên lí kẹp" suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_n} = \sqrt{2}+1, \qquad (5)$$

(ở đây đã sử dụng $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}}{8}} = \left(\sqrt{2}+1\right)\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\dfrac{1}{8}} = \sqrt{2}+1$).

Theo cách xác định dãy, thì $v_{n+1} = 2u_n v_n$, hay $u_n = \dfrac{v_{n+1}}{2v_n}$.

Từ đó ta có :

$$u_1 u_2 \ldots u_n = \frac{v_2}{2v_1}\frac{v_3}{2v_2}\cdots\frac{v_{n+1}}{2v_n} = \frac{v_{n+1}}{2^{n+1}}. \qquad (6)$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_1u_2\ldots u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\dfrac{v_{n+1}}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_{n+1}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\dfrac{1}{2^{n+1}}}$. (7)

Theo (5), thì : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2u_nv_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_n} = 1\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3+2\sqrt{2}. \quad (8)$$

Lại có :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1. \quad (9)$$

Do đó từ (8), (9) đi đến : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_1u_2\ldots u_n} = 3+2\sqrt{2}$.

Tóm lại ta có : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_n} = \sqrt{2}+1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_1u_2\ldots u_n} = 3+2\sqrt{2}$.

BÀI 14. Cho dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 1 \\ u_n = \sqrt{\dfrac{1+u_{n-1}}{2}} \; ; \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hai dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ xác định như sau :

$$v_n = 4^n\left(1-u_n\right) \; ; \; w_n = u_1u_2\ldots u_n \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Bài giải

Chọn α là góc thuộc $(0\,;\,\pi)$ sao cho $u_0 = \cos\alpha$. Từ đó ta có :

$$u_1 = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

(do $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$). Vì thế : $v_1 = 4\left(1-u_1\right) = 4\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right) = 4.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2^2}$.

Từ đó bằng quy nạp dễ dàng suy ra : $u_n = \cos\frac{\alpha}{2^n}$

do đó $v_n = 4^n(1-u_n) = 4^n.2\sin^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(4^n.2\sin^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{\alpha}{2^{n+1}}}\right)^2.\frac{\alpha^2}{2}.$$

Đặt $y_n = \frac{\alpha}{2^{n+1}}$, và $y_n \to 0$ khi $n \to +\infty$, ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\alpha^2}{2}\left(\lim_{y_n\to 0}\frac{\sin y_n}{y_n}\right)^2. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, nên từ (1) suy ra $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\alpha^2}{2}$.

Theo trên, ta có : $w_n = u_1.u_2\ldots u_n = \cos\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\alpha}{2}$

$$= \frac{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\alpha}{2}}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}. \qquad (2)$$

Dùng liên tiếp công thức $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, từ (2) suy ra :

$$w_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

(do $\frac{\alpha}{2^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

BÀI 15. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_n(au_{n-1}+b)+c = 0,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $ax^2+bx+c=0$, với $|x_1|\le|x_2|$.

Từ công thức xác định dãy, với mọi $n=1, 2, \ldots$, ta thu được :

$$u_n\left(a u_{n-1}+b\right)+c=0$$

$$\Leftrightarrow u_n\left(u_{n-1}+\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}=0.$$

Áp dụng định lí Vi-ét, ta có :

$$u_n\left[u_{n-1}-\left(x_1+x_2\right)\right]+x_1x_2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n-x_2\right)\left(u_{n-1}-x_2\right)+x_2\left(u_{n-1}-x_2\right)-x_1\left(u_n-x_2\right)=0. \qquad (1)$$

Xét các khả năng sau :

1. Nếu $\alpha=x_2$, tức $u_0=x_2$.

Trong (1) thay $n=1$, và có $-x_1\left(u_1-x_2\right)=0$.

Do $x_1\neq 0$, suy ra $u_1-x_2=0\Rightarrow u_1=x_2$.

Từ đó suy ra trong trường hợp này ta có :

$u_n=x_2$ với mọi $n=0, 1, 2, \ldots$

Vì thế $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_2$.

2. Nếu $\alpha=x_1$, tức $u_0=x_1$.

Trong (1) thay $n=1$, và có :

$$\left(u_1-x_2\right)\left(u_0-x_2\right)+x_2\left(u_0-x_2\right)-x_1\left(u_1-x_2\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(u_0-x_2\right)\left(u_1-x_2+x_2\right)-x_1\left(u_1-x_2\right)=0$$

$$\Rightarrow u_1\left(u_0-x_2\right)-x_1\left(u_1-x_2\right)=0$$

$$\Rightarrow u_1\left(x_1-x_2\right)-x_1\left(u_1-x_2\right)=0$$

$$\Rightarrow -u_1x_2+x_1x_2=0$$

$$\Rightarrow x_2\left(x_1-u_1\right)=0.$$

Do $x_2\neq 0\Rightarrow x_1=u_1$.

Từ đó bằng quy nạp dễ thấy trong trường hợp này ta có :

$u_n = x_1$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Điều đó dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_1$.

3. Nếu $\alpha \neq x_1, \alpha \neq x_2$. Khi đó từ lập luận trên suy ra :

$u_n \neq x_1, u_n \neq x_2$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Đưa vào dãy mới sau đây : $v_n = \dfrac{1}{u_n - x_2}$ $\left(\Leftrightarrow u_n = x_2 + \dfrac{1}{v_n}\right)$.

Chia cả hai vế của (1) cho $(u_n - x_2)(u_{n-1} - x_2)$ và có :

$$1 + x_2 \frac{1}{u_n - x_2} - x_1 \frac{1}{u_{n-1} - x_2} = 0$$

hay
$$1 + x_2 v_n - x_1 v_{n-1} = 0.$$

Từ đó dẫn đến : $v_n = \dfrac{x_1}{x_2} v_{n-1} - \dfrac{1}{x_2}$, $n = 1, 2, \ldots$

hay $\left|v_n - \dfrac{1}{x_1 - x_2}\right| = \left|\dfrac{x_1}{x_2} v_{n-1} - \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1 - x_2}\right|$

$$= \left|\frac{x_1}{x_2}\right| \left|v_{n-1} - \frac{1}{x_1 - x_2}\right|. \tag{2}$$

Áp dụng liên tiếp biểu diễn trên, ta thu được :

$$\left|v_n - \frac{1}{x_1 - x_2}\right| = \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n \left|v_0 - \frac{1}{x_1 - x_2}\right|. \tag{3}$$

Có hai khả năng sau :

– Nếu $|x_1| < |x_2|$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right|^n = 0$.

Vì thế từ (3) có :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{x_1 - x_2}. \tag{4}$$

Dựa vào $u_n = x_2 + \frac{1}{v_n}$ và (4), suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_2 + x_1 - x_2 = x_1$.

– Nếu $|x_1| = |x_2|$, khi đó $x_1 + x_2 = 0$, và theo định lí Vi-ét suy ra $b = 0$.

Mặt khác từ (3) có : $\left|v_n - \frac{1}{x_1 - x_2}\right| = \left|v_0 - \frac{1}{x_1 - x_2}\right|$

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{x_1 - x_2} \pm \left|v_0 - \frac{1}{x_1 - x_2}\right|$$

$$\Rightarrow u_n = x_2 + \frac{1}{v_n} = x_2 + \frac{1}{\frac{1}{x_1 - x_2} \pm \left|v_0 - \frac{1}{x_1 - x_2}\right|}.$$

Trong trường hợp này không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Tóm lại : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} x_2, \text{ nếu } \alpha = x_2 \\ x_1, \text{ nếu } \alpha = x_1 \\ x_1, \text{ nếu } \alpha \neq x_2, \alpha \neq x_1 \text{ và } |x_1| < |x_2| \end{cases}$

Giới hạn không tồn tại khi $\alpha \neq x_2$, $\alpha \neq x_1$ và $|x_1| = |x_2|$.

BÀI 16. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ được xác định như sau :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và hãy tìm giới hạn đó.

Bài giải

Ta có :
$$u_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k}. \quad (1)$$

Ta cần dùng đến mệnh đề phụ trợ sau :

Mệnh đề : Với $0 < x < 1$, ta có bất đẳng thức sau :

$$\ln(x+1) < x < -\ln(1-x).$$

(Xem chứng minh mệnh đề ở cuối bài).

Trở lại bài toán của ta. Áp dụng mệnh đề trên lần lượt với

$$x = \frac{1}{m+k} \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Khi đó ta có : $\ln\left(1 + \frac{1}{m+k}\right) < \frac{1}{m+k} < -\ln\left(1 - \frac{1}{m+k}\right)$

hay
$$\ln(m+k+1) - \ln(m+k) < \frac{1}{m+k} < -\ln(m+k-1) + \ln(m+k). \quad (2)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức dạng (2) khi cho k chạy từ 1 đến m, ta có :

$$\ln(2m+1) - \ln(m+1) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} < \ln 2m - \ln m$$

hay
$$\ln\left(2 - \frac{1}{m+1}\right) < u_{2m} < \ln 2. \quad (3)$$

Do $\lim\limits_{m\to\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{m+1}\right) = \ln 2$, nên từ (3) và theo "nguyên lí kẹp" ta có :

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m} = \ln 2. \quad (4)$$

Mặt khác : $u_{2m+1} = \sum\limits_{k=1}^{2m+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2m+1}$,

hay
$$u_{2m+1} = u_{2m} + \frac{1}{2m+1}. \quad (5)$$

Từ (4) và do $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1} = 0$, nên từ (5) đi đến : $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m} = \ln 2$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln 2$.

Bây giờ ta quay lại chứng minh mệnh đề phụ trợ.

Xét hàm số $f(t) = t - \ln(1+t)$ với $0 \le t \le 1$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$.

Từ đó $f'(t) \geq 0$ với mọi $0 \leq t \leq 1$ ($f'(t)$ chỉ bằng 0 khi $t = 0$). Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0 ; 1]$.

Do $0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x)$

hay $\Rightarrow 0 < x - \ln(1+x)$

$\Rightarrow \ln(1+x) < x.$

Phần còn lại của mệnh đề chứng minh hoàn toàn tương tự. Bài toán được giải hoàn toàn.

BÀI 17. Xét phương trình (với $n > 2$) : $x^n - x^2 - x - 1 = 0$.

1) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n > 2$, thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất x_n.

2) Xét dãy số sau đây : $u_n = n(x_n - 1)$, $n = 2, 3, \ldots$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Bài giải

1. Xét phương trình $f(x) = x^n - x^2 - x - 1 = 0,$ (1)

với n nguyên, $n > 2$.

Ta có $f'(x) = nx^{n-1} - 2x - 1$.

Do $n > 2$, nên khi $x > 1$, thì $f'(x) > 0$. Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến khi $x > 1$.

Ta có : $f(1) = -2 < 0$; $f(2) = 2^n - 7 > 0$ (vì n nguyên, $n > 2 \Rightarrow n \geq 3$).

Ta có : $f(1)f(2) < 0$, mà $f(x)$ là hàm liên tục, nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(1 ; 2)$. Mặt khác vì $f(x)$ là hàm đồng biến khi $x > 1$, nên nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm khi $x > 1$, thì $f(x)$ có nghiệm duy nhất trên $(1 ; +\infty)$.

Kết hợp lại ta thấy $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(1 ; +\infty)$. Rõ ràng nghiệm duy nhất này là nghiệm dương. Mặt khác với $0 < x < 1$, thì

$$x^n < x^2 \text{ (do } n > 2\text{)}.$$

Từ đó suy ra $f(x) < 0$ với mọi $0 < x < 1$.

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên, $n > 2$. Đó là đ.p.c.m.

2. Gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n - x^2 - x - 1 = 0$ (theo phần 1)). Bây giờ xét dãy sau $\{u_n\}$, $n = 3, 4, \ldots$, ở đây $u_n = n(x_n - 1)$.

Ta có : $x_n^n - x_n^2 - x_n - 1 = 0$ hay $x_n = \sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1} = \sqrt[n]{(x_n^2 + x_n + 1).\underbrace{1.1\ldots1}_{n-1 \text{ số } 1}} < \frac{x_n^2 + x_n + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ số } 1}}{n}. \quad (3)$$

(Chú ý rằng ở đây $1 < x_n$, nên $x_n^2 + x_n + 1 \neq 1$, vì thế trong bất đẳng thức Cô-si không có dấu bằng).

Mặt khác do $x_n < 2$, nên $x_n^2 + x_n < 6$, nên từ (2) và (3) có :

$$1 < x_n < 1 + \frac{6}{n}. \quad (4)$$

Bất đẳng thức (6) đúng với mọi $n \geq 3$ và $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{6}{n} = 0$, nên từ (4) đi đến :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1. \quad (5)$$

Ta có : $x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 \Rightarrow n \ln x_n = \ln(x_n^2 + x_n + 1)$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(x_n^2 + x_n + 1)}{\ln x_n}.$$

Từ đó $n(x_n - 1) = \dfrac{(x_n - 1)}{\ln x_n} \ln(x_n^2 + x_n + 1)$. (6)

Đặt $x_n - 1 = y_n$, khi đó từ (5) ta có $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$.

Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(y_n + 1)}{y_n} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t} = 1$

(chú ý là khi $n \to \infty$ thì $y_n \to 0$).

Như vậy kết hợp với (5), ta có : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{\ln x_n} = 1$ và $\lim_{n\to\infty} \ln\left(x_n^2 + x_n + 1\right) = \ln 3$.

Từ đó theo (6) suy ra : $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n\left(x_n - 1\right) = \ln 3$.

BÀI 18. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + \sin u_n \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Xét hai trường hợp sau :

1. Nếu $a = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Khi đó theo công thức xác định dãy, ta có :

$$u_1 = u_0 + \sin u_0 = k\pi.$$

Từ đó bằng quy nạp dễ dàng suy ra $u_n = k\pi$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ Như vậy trong trường hợp này, ta có : $\lim_{n\to\infty} u_n = k\pi$.

2. Nếu $a \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Xét hàm số $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Lúc này dãy $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right), \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu. Lại có hai khả năng sau :

– Nếu $2k\pi < a < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $\sin a > 0$.

Ta có $u_0 = a$

$$u_1 = a + \sin a.$$

Vậy $u_0 < u_1$ (do $\sin a > 0$). Do $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên có :

$$f\left(u_0\right) < f\left(u_1\right) \Rightarrow u_1 < u_2.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$ Vậy dãy $\{u_n\}$ là đơn điệu tăng.

Ta chứng minh tiếp rằng $2k\pi < u_n < (2k+1)\pi$ với mọi $n = 0, 1, \ldots$ (1)

(1) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

+ (1) hiển nhiên đúng khi $n = 0$, vì $u_0 = a$ mà $2k\pi < a < (2k+1)\pi$.

+ Giả sử (1) đã đúng đến $n = m$, tức là có $2k\pi < u_m < (2k+1)\pi$. Do $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên có :

$$f(2k\pi) < f(u_m) < f((2k+1)\pi). \tag{2}$$

Do $f(2k\pi) = 2k\pi + \sin(2k\pi) = 2k\pi$

$$f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi + \sin[(2k+1)\pi] = (2k+1)\pi$$

$$f(u_m) = u_{m+1},$$

nên thay vào (2) và có : $2k\pi < u_{m+1} < (2k+1)\pi$.

Vậy (1) cũng đúng với $n = m+1$. Từ đó suy ra (1) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ Như thế $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $(2k+1)\pi$, nên tồn tại giới hạn : $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Vì $2k\pi < u_n < (2k+1)\pi$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

$2k\pi \le l \le (2k+1)\pi$. Mặt khác do :

$a = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots$ nên lại có $l \ge a$.

Do $a > 2k\pi$, nên $2k\pi < l \le (2k+1)\pi$. (3)

Vì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ $(= l)$, và do

$u_{n+1} = u_n + \sin u_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ ta có :

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty}(\sin u_n). \tag{4}$$

Do tính liên tục của hàm $y = \sin x$, nên $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin u_n) = \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right) = \sin l$.

Bây giờ từ (4) có $l = l + \sin l$, hay $\sin l = 0$. (5)

Kết hợp (3) và (5), đi đến $l = (2k+1)\pi$.

Trong trường hợp $2k\pi < a < (2k+1)\pi$, ta có : $\lim_{n\to\infty} u_n = (2k+1)\pi$.

– Nếu $(2k-1)\pi < a < 2k\pi$ (khi đó $\sin a < 0$). Chứng minh tương tự như phần trên ta có $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm (chú ý là $u_0 > u_1$) và bị chặn dưới bởi $(2k-1)\pi$, vậy tồn tại $l = \lim_{n\to\infty} u_n$.

Lập luận như trên có : $\lim_{n\to\infty} u_n = (2k-1)\pi$,

nếu $(2k-1)\pi < a < 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Chú ý rằng :

$$2\left[\frac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = \begin{cases} k, & \text{nếu } a = k\pi \\ (2k+1), & \text{nếu } 2k\pi < a < (2k+1)\pi \\ (2k-1), & \text{nếu } (2k-1)\pi < a < 2k\pi \end{cases}$$

ở đây $[\alpha]$, $\operatorname{sgn}\alpha$, $\{\alpha\}$ tương ứng là các hàm phần nguyên, hàm dấu và hàm phần lẻ của α. Với kí hiệu đó, ta có : $\lim_{n\to\infty} u_n = \left(2\left[\frac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\}\right)\pi$.

Chú ý : – Nếu $2k\pi < a < (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow k < \frac{a}{2\pi} < k + \frac{1}{2}.$$

Từ đó $\left[\frac{a}{2\pi}\right] = k$; $\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = 1$,

và vì thế có $2\left[\frac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = 2k+1$.

– Nếu $(2k-1)\pi < a < 2k\pi$

$$\Rightarrow k - \frac{1}{2} < \frac{a}{2\pi} < k \Rightarrow \left[\frac{a}{2\pi}\right] = k-1.$$

Do $\frac{a}{2\pi}$ không phải là số nguyên nên $\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = 1$ vì thế có $2\left[\frac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = 2(k-1)+1 = 2k-1$.

– Nếu $a = k\pi$, thì $\dfrac{a}{2\pi} = \dfrac{k}{2}$.

Có hai khả năng xảy ra.

+ Nếu $k = 2m \Rightarrow \dfrac{a}{2\pi} = m \Rightarrow \left[\dfrac{a}{2\pi}\right] = m$, và $\left\{\dfrac{a}{2\pi}\right\} = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\left\{\dfrac{a}{2\pi}\right\} = 0$. Vậy $2\left[\dfrac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\dfrac{a}{2\pi}\right\} = 2m + 0 = k$.

+ Nếu $k = 2m+1 \Rightarrow \dfrac{a}{2\pi} = m + \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{2\pi}\right] = m\ ;\ \left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sgn}\left\{\frac{a}{2\pi}\right\} = 1.$$

Lúc này $2\left[\dfrac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\dfrac{a}{2\pi}\right\} = 2m + 1 = k$.

Tóm lại ta đã chứng minh xong công thức tính

$2\left[\dfrac{a}{2\pi}\right] + \operatorname{sgn}\left\{\dfrac{a}{2\pi}\right\}$ đã nêu trong bài.

BÀI 19. 1) Cho phương trình : $x^{2n+1} = x + 1$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực gọi là u_n.

2) Xét dãy $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ với u_n được xác định trong câu 1.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

1. Xét phương trình $x^{2n+1} = x + 1$. (1)

Viết lại (1) dưới dạng sau :

$$x\left(x^{2n} - 1\right) = 1. \qquad (2)$$

Xét các khả năng sau :

a) Nếu $x \le -1$, thì $x^{2n} \ge 1 \Rightarrow \text{VT}(2) \le 0$, vậy (2) không có nghiệm $x \le -1$.

b) Nếu $0 < x < 1$, thì $x^{2n} < 1 \Rightarrow \text{VT}(2) < 0$, vậy (2) cũng không có nghiệm $0 < x < 1$.

c) Nếu $-1 \le x \le 0$, thì $x^{2n+1} \le 0 < x+1$, vậy (2) không có nghiệm với $-1 \le x \le 0$.

d) Nếu $x \ge 1$. Đưa vào xét hàm số : $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$,

ta có : $$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1.$$

Dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $x \ge 1$. Mặt khác $f(1) = -1 < 0$; $f(2) = 2^{2n+1} - 3 > 0$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ $f(x)$ lại là hàm liên tục, nên tồn tại duy nhất nghiệm u_n với $u_n > 1$.

Tóm lại ta đã chứng minh được kết quả sau : Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, phương trình $x^{2n+1} = x + 1$
có duy nhất nghiệm u_n, trong đó $u_n > 1$.

2. Xét dãy $\{u_n\}$, với u_n xác định bởi phần 1.

Ta có $u_n^{2n+1} = u_n + 1$, vì thế :

$$u_n = \sqrt[2n+1]{u_n + 1}. \tag{3}$$

Từ (3) và theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$u_n = \sqrt[2n+1]{u_n+1} < \frac{(u_n+1) + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{2n \text{ số } 1}}{2n+1}$$

hay
$$u_n < \frac{u_n + (2n+1)}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)u_n < u_n + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 2nu_n < 2n+1$$

$$\Leftrightarrow u_n < \frac{2n+1}{2n}.$$

Kết hợp với $u_n > 1$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta có bất đẳng thức kép sau :

$$1 < u_n < \frac{2n+1}{2n}. \tag{4}$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$, và theo "nguyên lí kẹp" suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

BÀI 20. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \ ; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và hãy tính : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Bài giải

Dễ thấy $u_n > 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$

Ta có $u_2 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} = 2 \Rightarrow u_1 < u_2$.

Ta sẽ chứng minh rằng $u_n < u_{n+1}, \forall n = 1, 2, \ldots$ (1)

Thật vậy theo trên thì (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đã đúng khi $n \leq k$.

Xét khi $n = k+1$. Theo công thức truy hồi xác định dãy, thì :

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k+1}} + \sqrt{u_k} = u_{k+2}.$$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Như thế $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

Mặt khác khi $n \geq 3$, ta có : $u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} < 2\sqrt{u_n}$

$$\Rightarrow u_n^2 < 4u_n$$

Do $u_n > 0 \Rightarrow u_n < 4$.

Vậy $\{u_n\}$ là dãy các số dương đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 4, nên tồn tại giới hạn hữu hạn

$$L = \lim_{n \to +\infty} u_n. \qquad (2)$$

Từ $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}$, sử dụng (2) và lấy giới hạn cả hai vế ta có phương trình sau để xác định L.

$$L = 2\sqrt{L}$$

$$\Rightarrow L = 4 \text{ (chú ý } L > 0).$$

Vậy ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

BÀI 21. Cho a là số thực cho trước. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \left|u_n - 2^{-n}\right| ; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ và hãy tìm giới hạn này.

Bài giải

Xét hai trường hợp sau đây :

1. Nếu $a > 2$ hoặc $a < 0$. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ thì

$$u_n > 2^{-n+1}. \tag{1}$$

Thật vậy khi $n = 1$, ta có : $u_1 = \left|u_0 - 2^0\right| = |a-1| > 1$ (do $a > 2$ hoặc $a < 0$) hay $u_1 > 2^{-1+1}$, vậy (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đã đúng đến $n = k$, tức là ta có :

$$u_k > 2^{-k+1}. \tag{2}$$

Ta có : $u_{k+1} = \left|u_k - 2^{-k}\right| > \left|u_k\right| - 2^{-k}$. Theo (2) suy ra :

$$u_{k+1} > 2^{-k+1} - 2^{-k} = 2^{-k} \Rightarrow u_{k+1} > 2^{-(k+1)+1}.$$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Do (1) và do $u_{n+1} = \left|u_n - 2^{-n}\right|$, nên suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$u_{n+1} = u_n - 2^{-n}. \tag{3}$$

Từ (3) ta có thể viết lại như sau :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} - 2^{-n+1} \\ u_{n-1} = u_{n-2} - 2^{-n+2} \\ u_{n-2} = u_{n-3} - 2^{-n+3} \\ \ldots \\ u_2 = u_1 - 2^{-1} \end{cases}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta có :

$$u_n = u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n+k} = |a-1| - 1 + 2^{-n+1} \qquad (*)$$

(do ta đã áp dụng công thức của cấp số nhân

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - 2^{-n+1}).$$

Từ (*) suy ra : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = |a-1| - 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = |a-1| + 1.$

2. Nếu $0 \le a \le 2$. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ thì

$$0 \le u_n \le 2^{1-n}. \qquad (3)$$

Với $n = 1$, thì $u_1 = |a-1| \le 1 = 2^{1-1}$, vậy (3) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (3) đã đúng khi $n = k$, tức là ta có : $0 \le u_k \le 2^{1-k}$.

Ta có : $u_{k+1} = \left|u_k - 2^{-k}\right|$. Rõ ràng $u_{k+1} \ge 0$.

Từ giả thiết quy nạp, ta có : $u_k - 2^{-k} \le 2^{1-k} - 2^{-k}$

$$\Rightarrow u_k - 2^{-k} \le 2^{-k}$$

$$\Rightarrow u_{k+1} \le 2^{-k} = 2^{1-(k+1)}.$$

Vậy (3) cũng đúng khi $n = k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (3) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Từ (3) và $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{1-n} = 0$, nên theo nguyên lí kẹp suy ra trong trường hợp này ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Vậy ta thu được kết quả sau : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} |a-1| - 1, & \text{nếu } a < 0 \text{ hoặc } a > 2 \\ 0, & \text{nếu } 0 \le a \le 2. \end{cases}$

BÀI 22. Cho u_1 là số thực cho trước. Dãy $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_{n+1} = u_n(1 - u_n)\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm các giá trị của u_1 sao cho tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Bài giải

Xét hai khả năng sau đây :

1. Nếu $0 \le u_1 \le 1$. Ta sẽ chứng minh rằng dãy đã cho đồng thời thoả mãn hai điều kiện sau :

$$\begin{cases} 0 \le u_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N} & (1) \\ u_{n+1} \le u_n, \forall n \in \mathbb{N} & (2) \end{cases}$$

Thật vậy ta sẽ dùng nguyên lí quy nạp để chứng minh.

Với $n = 1$, ta đã có theo giả thiết $0 \le u_1 \le 1$. Giả sử (1) đã đúng đến $n = k$, tức là ta có $0 \le u_k \le 1$.

Do đó : $0 \le 1 - u_k \le 1 \Rightarrow 0 \le u_k(1 - u_k) \le u_k$

$$\Rightarrow 0 \le u_{k+1} \le u_k.$$

Do $u_k \le 1 \Rightarrow 0 \le u_{k+1} \le 1$.

Vậy (1) cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngay trong cách chứng minh trên, ta đã thấy (2) cũng đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Và như thế (1) và (2) đã được chứng minh. Điều ấy có nghĩa là dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới. Theo nguyên lí giới hạn thì tồn tại :

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} u_n \qquad (3)$$

và $u_{n+1} = u_n(1 - u_n) = u_n - u_n^2$, ta có :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2)$, và từ (3) suy ra phương trình sau đây :

$$\alpha = \alpha - \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Như thế $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, nếu $0 \le u_1 \le 1$.

2. Nếu $u_1 < 0$ hoặc $u_1 > 1$. Khi đó : $u_2 = u_1(1 - u_1) < 0$.

Từ đó đi đến $u_n < 0 \quad \forall n = 2, 3, \ldots$

Đưa vào xét dãy mới $v_n = -u_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Đưa vào $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ với $n = 1, 2, \ldots$, ta có : $v_{n+1} = v_n(1 + v_n)$.

Vì $u_n < 0, \forall n = 2, 3, \ldots$, nên từ $v_{n+1} = v_n(1 + v_n), n = 1, 2, \ldots$ suy ra $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

– Nếu $\{v_n\}$ bị chặn trên, thì theo nguyên lí sẽ tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\beta = \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

Từ $v_{n+1} = v_n(1 + v_n) \Rightarrow \beta = \beta + \beta^2 \Rightarrow \beta = 0.$

Đây là điều vô lí, vì $\{v_n\}$ đơn điệu tăng mà $v_2 > 0$.

– Nếu $\{v_n\}$ không bị chặn trên, tức là $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, từ đó $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Tóm lại khi $u_1 < 0$ hoặc $u_1 > 1$, thì không tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Vậy dãy đã cho $\{u_n\}$ tồn tại giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $0 \le u_1 \le 1$.

BÀI 23. a, b là các số cho trước. Dãy $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = b \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2 \ ; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Với những điều kiện gì với các hằng số a, b thì dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Bài giải

Từ công thức xác định dãy suy ra :

$$u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2 \Rightarrow u_{n+1} \ge u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Do đó tồn tại $\lim_{n \to +\infty} u_n$ hữu hạn khi và chỉ khi $\{u_n\}$ bị chặn trên. Nếu điều ấy thoả mãn, ta sẽ có :

$A = \lim_{n \to +\infty} u_n$, và A hữu hạn.

Khi ấy từ hệ thức truy hồi :

$$u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2 \Rightarrow A = A + (A - a)^2 \Rightarrow A = a.$$

Có hai khả năng sau :

1. Tồn tại chỉ số k mà $u_k > a$. Khi đó dãy là đơn điệu tăng nên $u_n > a, \forall n \ge k$.

Điều ấy trái với giả thiết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

2. Vì thế $u_k \le a, \forall k \in \mathbb{N}$

hay $$u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \le a, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 - a \le 0$$

$$\Leftrightarrow a - 1 \le u_n \le a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nói riêng ta phải có $a-1 \le u_1 \le a$, hay $a - 1 \le b \le a$. (1)

Vậy (1) là điều kiện cần để dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Đảo lại giả sử $a-1 \le b \le a$, tức là : $$a - 1 \le u_1 \le a$$

$$\Rightarrow u_1^2 + (1-2a)u_1 + a^2 - a \le 0$$

$$\Rightarrow u_2 - a \le 0$$

$$\Rightarrow u_2 \le a.$$

Vì $u_2 \ge u_1$ mà $u_1 \ge a-1 \Rightarrow a-1 \le u_2 \le a$

Nói chung : $a - 1 \le u_n \le a$.

Như vậy ta đi đến dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi a. Kết hợp với tính đơn điệu tăng của $\{u_n\}$, suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Như thế $a - 1 \le b \le a$ là điều kiện cần và đủ để dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

BÀI 24. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_1 = a$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2\{u_n\}^2}{[u_n]^2},$$

ở đây $a \ge 1$ cho trước và qua $[\alpha], \{\alpha\}$ tương ứng để chỉ phần nguyên và phần lẻ của số α.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Xét hai khả năng sau :

1. Nếu a là số nguyên. Khi đó $u_1 = a$ là số nguyên, $a \geq 1 \Rightarrow [u_1] = u_1$ và $\{u_1\} = 0$, và do đó theo công thức xác định dãy, thì

$$u_2 = \frac{u_1^2 - 2\{u_1\}^2}{[u_1]^2} = \frac{u_1^2 - 2.0}{u_1^2} = 1.$$

Từ đó suy ra $u_n \equiv 1$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Trong trường hợp này ta có :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1.$$

2. Nếu a không phải là số nguyên. Khi đó $a = [a] + \{a\}$.

Theo công thức xác định dãy, thì

$$u_2 = \frac{([a]+\{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = \frac{2[a]^2 - ([a]-\{a\})^2}{[a]^2}$$

$$= 2 - \left(\frac{[a]-\{a\}}{[a]}\right)^2 = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2. \quad (1)$$

Do a không phải là số nguyên nên $0 < \{a\} < 1$. Mặt khác vì $a \geq 1$, nên $[a] \geq 1$, từ đó ta có : $0 < \frac{\{a\}}{[a]} < 1$.

Bây giờ từ (1) suy ra $1 < u_2 < 2$. (2)

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 2, 3, \ldots$ thì :

$$1 < u_n < 2. \quad (3)$$

(3) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

– Theo (2) thì (3) đúng khi $n = 2$.

– Giả sử (3) đã đúng đến $n = k$, tức là $1 < u_k < 2$.

– Xét khi $n = k + 1$. Theo công thức truy hồi để xác định dãy, thì

$$u_{k+1} = \frac{u_k^2 - 2\{u_k\}^2}{[u_k]^2}.$$

Chú ý rằng do $1 < u_k < 2$, nên u_k không phải là số nguyên và $u_k > 1$. Làm tương tự như trên ta có : $u_{k+1} = 2 - \left(1 - \dfrac{\{u_k\}}{[u_k]}\right)^2$, và sẽ có $1 < u_{k+1} < 2$.

Vậy (3) cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra (3) đúng với mọi $n = 2, 3, \ldots$ Với mọi $n \geq 2$, ta có : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 2\{u_n\}^2}{[u_n]}$.

Do $1 < u_n < 2$, nên $[u_n] = 1$, từ đó $\{u_n\} = u_n - [u_n] = u_n - 1$.

Vì thế : $u_{n+1} = u_n^2 - 2(u_n - 1)^2$

hay
$$2 - u_{n+1} = 2 - u_n^2 + 2(u_n - 1)^2$$
$$= (2 - u_n)^2.$$

Từ đó ta có : $2 - u_{n+1} = (2 - u_n)^2 = (2 - u_{n-1})^4 = \ldots = (2 - u_2)^{2^{n-1}}$.

Do $1 < u_2 < 2 \Rightarrow 0 < 2 - u_2 < 1$. Áp dụng kết quả đã biết
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ khi } 0 < q < 1,$$

suy ra :
$$\lim_{n\to\infty}(2 - u_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(2 - u_2)^{2^{n-1}} = 0$$

hay
$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 2.$$

Điều đó có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

Tóm lại, ta có kết quả sau : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 1, \text{ nếu } a \in \mathbb{Z} \\ 2, \text{ nếu } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

BÀI 25. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3, có duy nhất một số $x_n \in [0\,;\,n]$ sao cho : $x_n^n = e^{x_n}$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$, $n \geq 3$ là dãy số có giới hạn khi $n \to \infty$.

Bài giải

Ta có :

$$x_n^n = e^{x_n} \Leftrightarrow x_n^n e^{-x_n} = 1. \quad (1)$$

Xét hàm số : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1.$

Ta có : $f_n(0) f_n(n) = (-1)\left[\left(\dfrac{n}{e}\right)^n - 1\right].$ (2)

Vì $n \geq 3 \Rightarrow \dfrac{n}{e} > 1,$ từ (2) suy ra : $f_n(0) f_n(n) < 0.$

Từ tính liên tục của hàm số $f_n(x)$ suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_n \in (0\,;\,n).$

Ta lại thấy

$$f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$

$$= e^{-x} x^{n-1}(n - x).$$

Từ đó suy ra $f_n'(x) > 0$ với mọi $0 < x < n,$ tức là $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $(0\,;\,n).$ Vì vậy phương trình : $f_n(x) = 0$

có duy nhất nghiệm trên $(0\,;\,n).$ Điều đó có nghĩa là với mỗi n nguyên dương, $n \geq 3,$ tồn tại duy nhất $x_n \in (0\,;\,n)$ sao cho $x_n^n = e^{x_n}.$

Như thế dãy $\{x_n\},\ n \geq 3$ hoàn toàn xác định.

Từ

$$x_n^n = e^{x_n}$$

$$\Leftrightarrow n \ln x_n = x_n. \quad (3)$$

Do $x_n > 0$ nên từ (3) suy ra: $\ln x_n > 0$ hay $x_n > 1,\ \forall n \geq 3.$

Xét hàm số : $f_{n+1}(x) = x^{n+1} e^{-x} - 1.$

Tương tự như trên, ta thấy $f_{n+1}(x)$ là hàm đồng biến trên $(0\,;\,n+1).$ Do $x_n > 1$ nên suy ra :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} e^{-x_n} - 1 > x_n^n e^{-x_n} - 1 = f_n(x_n). \quad (4)$$

Từ $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0,$ và (4), ta có : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}).$

Do $f_{n+1}(x)$ là hàm đồng biến trên $(0\,;n+1)$ mà $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$ suy ra $x_n > x_{n+1}$. Như vậy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, lại bị chặn dưới bởi 1. Từ đó suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 26. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình

$$\cos x = x^n$$

có duy nhất nghiệm trên $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Gọi nghiệm đó là u_n. Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Với mỗi n nguyên dương, xét hàm số : $f_n(x) = x^n - \cos x$, với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Ta có : $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin x \ge 0, \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Vì lẽ đó $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Lại có : $f_n(0).f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n < 0.$

Kết hợp với tính liên tục của $f_n(x)$ suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$. Nói cách khác với mỗi n nguyên dương, tồn tại duy nhất $u_n \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho :

$$\cos u_n = u_n^n. \tag{1}$$

Chú ý rằng $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình $\cos x = x^n$.

Vậy phương trình $\cos x = x^n$ có nghiệm duy nhất trên $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ với mọi n nguyên dương.

Do $f_{n+1}(x)$ là hàm đồng biến trên $(0\,;n+1)$ mà $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$ suy ra $x_n > x_{n+1}$. Như vậy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, lại bị chặn dưới bởi 1. Từ đó suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Đó là đ.p.c.m.

BÀI 26. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình

$$\cos x = x^n$$

có duy nhất nghiệm trên $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Gọi nghiệm đó là u_n. Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Với mỗi n nguyên dương, xét hàm số : $f_n(x) = x^n - \cos x$, với $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có : $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin x \ge 0, \forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Vì lẽ đó $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Lại có : $f_n(0).f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n < 0$.

Kết hợp với tính liên tục của $f_n(x)$ suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Nói cách khác với mỗi n nguyên dương, tồn tại duy nhất $u_n \in \left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho :

$$\cos u_n = u_n^n. \qquad (1)$$

Chú ý rằng $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình $\cos x = x^n$.

Vậy phương trình $\cos x = x^n$ có nghiệm duy nhất trên $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ với mọi n nguyên dương.

Từ (1) suy ra $0 < u_n < 1$. Xét dãy $\{u_n\}$. Ta chứng minh đây là dãy tăng. Thật vậy nếu không phải như vậy thì tồn tại n sao cho $u_{n+1} < u_n$. Do u_n, u_{n+1} đều thuộc $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, vì thế đi đến $\cos u_{n+1} > \cos u_n$.

Dựa vào cách xác định dãy, thì : $u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \cos u_{n+1} - \cos u_n > 0$.

Lại dựa vào $0 < u_n < 1, \forall n$, ta lại có : $u_{n+1}^n > u_{n+1}^{n+1} > u_n^n$, hay $u_{n+1} > u_n$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ở trên. Vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1, nên tồn tại giới hạn hữu hạn : $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Từ
$$\cos u_n = u_n^n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \sqrt[n]{\cos u_n}. \qquad (2)$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ cả hai vế của (2), và có : $L = 1$.

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

BÀI 27. Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

Chứng minh rằng phương trình có nghiệm dương duy nhất x_n. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài giải

Đặt $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

Rõ ràng $f_n(x)$ là hàm liên tục trên toàn trục số.

Dễ thấy $f_n'(x) = n x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1. \qquad (1)$

Nếu $x \geq 0$, thì từ (1) suy ra :

$f_n'(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$.

Vậy $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $(0 ; +\infty)$.

Ta có : $f_n(0) = -1 < 0$; $f_n(1) = n - 1 > 0$ khi $n \geq 2$.

Vậy với mọi $n \geq 2$, thì từ tính liên tục và đồng biến của $f_n(x)$ suy ra phương trình : $f_n(x) = 0$

có nghiệm dương duy nhất. Khi $n=1$, thì $f_n(x)=x-1$, và $f_n(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Tóm lại với mọi n nguyên dương thì phương trình đã cho có nghiệm dương duy nhất. Ta gọi nghiệm đó là x_n. Nói cách khác dãy $\{x_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ hoàn toàn xác định. Từ cách xác định dãy, suy ra với mọi $n=1, 2, \ldots$ ta có :

$$x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = 1. \qquad (2)$$

Từ (2) và do $x_n > 0$, nên suy ra khi n tăng thì x_n giảm. Vậy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm. Hiển nhiên dãy này bị chặn dưới bởi 0, nên tồn tại giới hạn hữu hạn

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n. \qquad (3)$$

Mặt khác ta có :

$$1 = x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = x_n \frac{1-x_n^n}{1-x_n}. \qquad (4)$$

Rõ ràng với mọi n, thì $0 < x_n < 1$, vì thế $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$. (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra : $1 = l\dfrac{1}{1-l}$ hay $1-l=l \Leftrightarrow l=\dfrac{1}{2}$.

Nói cách khác $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

BÀI 28. Cho phương trình $x^n - nx + 1 = 0$. Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm α_n và β_n sao cho $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

Bài giải

Đặt $f_n(x) = x^n - nx + 1$, thì $f_n(x)$ là hàm liên tục trên toàn trục số. Ta có :

$f_n'(x) = nx^{n-1} - n$, và có bảng biến thiên sau :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f_n(x)$ là hàm giảm trên $(0;1)$ và tăng trên $(1;+\infty)$. Do $f_n(0)=1>0$; $f_n(1)=2-n<0$ khi $n>2$.

Từ đó suy ra với mọi $n>2$, thì phương trình $f_n(x)=0$:

– Có duy nhất nghiệm α_n với $0<\alpha_n<1$.

– Có duy nhất nghiệm β_n với $\beta_n>1$.

Vậy hai dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ hoàn toàn xác định với $n=2, 3, \ldots$

Ta hãy xét dãy $\{\alpha_n\}$. Theo cách xác định dãy, thì với mọi $n\geq 3$, ta có :

$$\begin{cases}\alpha_{n-1}^{n-1}-(n-1)\alpha_{n-1}+1=0\\ \alpha_n^n-n\alpha_n+1=0\end{cases}$$

Từ đó có : $$\alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_n^n+n\alpha_n-(n-1)\alpha_{n-1}=0$$

hay $(\alpha_{n-1}-\alpha_n)(\alpha_{n-1}^{n-1}+\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n^{n-2}+\alpha_n^{n-1}-n)+\alpha_{n-1}+\alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_{n-1}^n=0$.

Do $\alpha_{n-1}>0$ và $\alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_{n-1}^n>0$ (vì $0<\alpha_{n-1}<1$), nên từ đẳng thức trên suy ra :

$$(\alpha_{n-1}-\alpha_n)(\alpha_{n-1}^{n-1}+\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_n^{n-1}-n)<0. \qquad (1)$$

Lại do $\alpha_{n-1}<1$ và $\alpha_n<1$, nên $\alpha_{n-1}^{n-1}+\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_n^{n-1}-n<0$.

Kết hợp với (1) suy ra $\alpha_{n-1}-\alpha_n>0$, hay $\alpha_{n-1}>\alpha_n$.

Vậy $\{\alpha_n\}$ là dãy đơn điệu giảm. Dãy này bị chặn dưới bởi 0, vậy tồn tại giới hạn hữu hạn

$$l_1=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n. \qquad (2)$$

Lập luận tương tự, với dãy $\{\beta_n\}$, ta cũng có :

$$l_2=\lim_{n\to+\infty}\beta_n. \qquad (3)$$

ở đây l_2 cũng là số hữu hạn.

Bây giờ ta tính l_1 và l_2. Theo cách xác định dãy thì $\alpha_n^n-n\alpha_n+1=0$

hay $$\alpha_n=\frac{\alpha_n^n}{n}+\frac{1}{n}. \qquad (4)$$

Lấy giới hạn khi $n \to +\infty$ cả hai vế của (4). Để ý đến (2) và do $0 < \alpha_n < 1, \forall n,$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^n = 0.$

Vì lẽ ấy từ (4) đi đến $l_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$

Một cách tương tự, ta có $l_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 1.$

BÀI 29. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ xác định như sau : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}.$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn (khi $n \to \infty$) và giới hạn đó là số vô tỉ.

Bài giải

Do $\frac{1}{(k!)^2} > 0$ với mọi k, nên $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

Ta có nhận xét sau : Với mọi $k > 1$, thì :

$$\frac{1}{(k!)^2} = \frac{1}{\left(1.2\ldots(k-1).k\right)^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Do đó, với mọi $n \geq 3$ ta có :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k!)^2} < 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k}. \qquad (1)$$

Dễ thấy $\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum\limits_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Thay lại vào (1) và có với mọi $n \geq 3,$ thì : $u_n < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{4}.$

Dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $\left(1 + \frac{3}{4}\right)$, vậy tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$a = \lim_{n \to \infty} u_n. \qquad (2)$$

Để ý rằng với mọi $n \geq 3$ thì : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k!)^2} > 1 + \frac{1}{4}$

Như vậy với mọi $n \geq 3$ ta có : $1 + \frac{1}{4} < u_n < 1 + \frac{3}{4}$.

Vì lẽ đó dễ thấy $1 < a < 2$, ở đây a xác định bởi (2). Bây giờ ta sẽ chứng minh a là số vô tỉ.

Giả thiết phản chứng a là số hữu tỉ, tức $a = \frac{p}{q}$, trong đó $(p, q) = 1$; $p > q > 1$ (do $1 < a < 2$). Rõ ràng từ $p = aq$, nên

$$(q!)^2 a = q!\,1.2\ldots(q-1)qa = q!(q-1)!p \tag{3}$$

Đẳng thức (3) chứng tỏ rằng $(q!)^2 a$ là số nguyên dương.

Mặt khác ta có : $(q!)^2 a = (q!)^2 \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}. \tag{4}$$

Rõ ràng $\sum\limits_{k=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}$ là số nguyên dương (do $(q!)^2 \vdots (k!)^2$ với mọi $k = \overline{1, q}$).

Vì thế từ (4) và kết hợp với $(q!)^2 a$ cũng là số nguyên dương, nên

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}$$

cũng là số nguyên. Ta lại thấy :

$$0 < \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} < \sum_{j=1}^{n-q} \frac{1}{(q+1)^{2j}} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^{2j}} \tag{5}$$

(điều này suy ra từ $\frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)\ldots k} < \frac{1}{(q+1)^{k-q}}$ với $k \geq q+1$).

Lại thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{(q+1)^{2j}}=\frac{\frac{1}{(q+1)^2}}{1-\frac{1}{(q+1)^2}}=\frac{1}{q(q+2)}<\frac{1}{3}$ (do $q>1$).

kết hợp với (5) suy ra $0<\beta<\frac{1}{3}$.

Điều này mâu thuẫn với tính nguyên của β. Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là a là số vô tỉ. Đó là đ.p.c.m.

BÀI 30. Dãy số $\{u_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ được xây dựng như sau :

$$u_1=a.$$

$$u_{n+1}=1+u_n-\frac{u_n^2}{2}\ ;\ n=1, 2, \ldots$$

ở đây $1<a<2$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Bài giải

Ta có :
$$u_{n+1}=1+u_n-\frac{u_n^2}{2}=\frac{2+2u_n-u_n^2}{2}$$

hay
$$u_{n+1}=\frac{3-(u_n-1)^2}{2}\ ;\ n=1, 2, \ldots$$

Ta sẽ chứng minh rằng : Với mọi $n=1, 2, \ldots$ ta có :

$$1<u_n<2. \qquad (1)$$

(1) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

– Nếu $n=1$ thì (1) đúng theo giả thiết (vì $u_1=a$ và $1<a<2$).

– Giả sử (1) đã đúng đến $n=k$ $(k\ge 1)$, tức là : $1<u_k<2$.

– Xét với $n=k+1$. Ta có : $u_{k+1}=\frac{3-(u_k-1)^2}{2}$.

Do
$$1<u_k<2\Rightarrow 0<u_k-1<1$$
$$\Rightarrow 0<(u_k-1)^2<1$$

$$\Rightarrow \frac{3-1}{2} < \frac{3-(u_k-1)^2}{2} < \frac{3-0}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < u_{k+1} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < u_{k+1} < 2.$$

Vậy (1) cũng đúng khi $n = k+1$. Vì thế (1) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Ta có :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left[3-(u_n-1)^2\right] - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\left[3-(u_n-1)^2\right] - 2\sqrt{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[3-(u_n-1)^2\right] - \left[3-(\sqrt{2}-1)^2\right]\right| = \frac{1}{2}\left|(u_n-1)^2 - (\sqrt{2}-1)^2\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|\left|\sqrt{2} - (2-u_n)\right|. \qquad (2)$$

Vì $1 < u_n < 2 \Rightarrow 1 > 2 - u_n > 0 \Rightarrow \sqrt{2} > 2 - u_n > 0$

hay
$$\left|\sqrt{2} - (2-u_n)\right| = \sqrt{2} - (2-u_n) < \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Từ (2), (3) đi đến :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_n - \sqrt{2}\right|. \qquad (4)$$

Áp dụng liên tiếp (4), ta có :

$$0 < \left|u_n - \sqrt{2}\right| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left|u_1 - \sqrt{2}\right|. \qquad (5)$$

Từ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left|u_1 - \sqrt{2}\right|\right] = 0$, nên từ (5) và theo "nguyên lí kẹp" suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n - \sqrt{2}\right) = 0$, hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Chú ý : Ta có thể giải bài toán trên bằng cách khác như sau :

Bằng quy nạp suy ra $1 < u_n < 2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Xét hàm số $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ với $1 < x < 2$.

Ta có $f'(x) = 1 - x < 0, \forall x \in (1 ; 2)$, nên $f(x)$ là hàm nghịch biến trong $(1 ; 2)$. Có hai khả năng sau xảy ra :

1. Nếu $u_1 \geq u_3 \Rightarrow f(u_1) \leq f(u_3)$

$$\Rightarrow u_2 \leq u_4$$

$$\Rightarrow f(u_2) \geq f(u_4)$$

$$\Rightarrow u_3 \geq u_5.$$

Như vậy ta đã chứng minh được trong trường hợp này thì :

$$u_1 \geq u_3 \geq u_5 \geq \ldots$$

$$u_2 \leq u_4 \leq u_6 \leq \ldots$$

Mặt khác dãy $u_1, u_3, u_5, \ldots$ bị chặn dưới bởi 1 ; còn dãy $u_2, u_4, u_6, \ldots$ bị chặn trên bởi 2, do đó tồn tại các giới hạn hữu hạn sau :

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} u_{2k+1} \text{ và } \beta = \lim_{k\to\infty} u_{2k}.$$

Từ $u_{2k+1} = 1 + u_{2k} - \dfrac{u_{2k}^2}{2}$ với $k = 1, 2, \ldots,$

rồi lấy giới hạn khi $k \to \infty$ cả hai vế ta có :

$$\alpha = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{2}. \qquad (6)$$

Tương tự ta có : $\beta = 1 + \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2}.$ (7)

Trừ từng vế (6) và (7) đi đến :

$$\alpha - \beta = \beta - \alpha - \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow 2(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 4) = 0. \qquad (8)$$

Chú ý rằng thực chất ta đã chứng minh được $u_n < \dfrac{3}{2}$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$

Vì lẽ đó $\alpha \leq \dfrac{3}{2}$ và $\beta \leq \dfrac{3}{2} \Rightarrow \alpha + \beta \leq \dfrac{6}{2}$

$$\Rightarrow \alpha + \beta - 4 \neq 0.$$

Vì lẽ đó từ (8) suy ra $\alpha = \beta \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} u_{2k}.$

Nói khác đi khi $u_1 \geq u_3$, thì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

2. Nếu $u_1 \leq u_3$, bằng lí luận hoàn toàn tương tự, ta thấy $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ cũng tồn tại.

Vì lẽ đó ta suy ra $\{u_n\}$ có giới hạn khi $n \to \infty$, và đặt : $x = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Bây giờ từ công thức truy hồi : $u_{n+1} = 1 + u_n - \dfrac{u_n^2}{2}$,

bằng cách lấy giới hạn hai vế ta có : $x = 1 + x - \dfrac{x^2}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2. \qquad (9)$$

Do $u_n > 1$ với mọi n, nên $x = \lim\limits_{n \to \infty} u_n \geq 1$ (nói riêng $x > 0$). Vì thế từ (9) suy ra $x = \sqrt{2}$.

Ta thu lại kết quả : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \sqrt{2}$.

BÀI 31. Các dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + \cdots + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}}, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$v_n = \left(\frac{u_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

Bài giải

Trước hết ta thấy rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ và với mọi $k = \overline{1, n}$, ta có :

$$1 \leq \frac{n^k(1+n^k)}{1+n^{2k}} \leq 2. \qquad (1)$$

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow 1 + n^{2k} \leq n^k + n^{2k} \leq 2 + 2n^{2k}$

$$1 \leq n^k \leq 2 + n^{2k}. \qquad (2)$$

Vì (2) hiển nhiên đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ và với mọi $k = \overline{1, n}$, nên (1) đúng. Vì lẽ đó từ công thức xác định dãy suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì

$$n + 1 \leq u_n \leq 2n + 1 < 2(n+1).$$

Từ đó :

$1 \le \frac{u_n}{n+1} < 2$, hay với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì :

$$1 \le v_n \le 2^{\frac{1}{n(n+1)}} < 2^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2.\underbrace{1\ldots1}_{n-1 \text{ số } 1}} < \frac{2+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-1 \text{ số } 1}}{n} = 1+\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Thay (4) vào (3), và có :

$$1 \le v_n < 1+\frac{1}{n}. \tag{5}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, nên từ (5) và theo "nguyên lí kẹp" suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

Chú ý : Ta có thể sử dụng kết quả $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{q} = 1$ với $q > 0$, dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$.

BÀI 32. Xét dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 2004 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right) - 2005, \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 2005$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Từ đó dễ thấy :

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (\text{do } 1 + x^2 \ge 2|x|,\ \forall x \in \mathbb{R}).$$

Xét hàm số $g(x) = x - f(x) = x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + 2005$, với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có : $g(0) = 2005 > 0$; $g(-2005) = -\frac{1}{2}\ln(1 + 2005^2) < 0$.

Vậy $g(0)g(-2005) < 0$. (1)

Lại có : $g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x}{1 + x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $f'(x) \le \frac{1}{2}$).

Từ (1) suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trong $(-2005\ ;\ 0)$. Mặt khác do $g'(x) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình $g(x) = 0$, (tức là phương trình $f(x) = x$) có nghiệm duy nhất. Gọi nghiệm duy nhất này là x^*, thì

$f(x^*) = x^*$, và chú ý rằng $x^* \in (-2005\ ;\ 0)$.

Áp dụng định lí La-gơ-răng trọng $[u_n\ ;\ x^*]$, ta có tồn tại c sao cho

$$|f(u_n) - f(x^*)| = |f'(c)||u_n - x^*|. \tag{2}$$

Do $|f'(x)| \le \frac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$, nên từ (2) có (để ý rằng $u_{n+1} = f(u_n)$)

$$|u_{n+1} - x^*| \le \frac{1}{2}|u_n - x^*|. \tag{3}$$

Bất đẳng thức (3) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Từ đó áp dụng liên tiếp (3) và có :

$$0 \le |u_n - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - x^*|. \tag{4}$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, nên từ (4) và theo "nguyên lí kẹp" suy ra :

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n - x^*| = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x^*$, với $x^* \in (-2005\ ;\ 0)$.

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Suy ra đ.p.c.m.

BÀI 33. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{\sqrt{3}}{u_n^2} \text{ ; } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hỏi có tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ hay không ?

Bài giải

Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} u_n. \qquad (1)$$

Lúc đó từ công thức truy hồi : $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{\sqrt{3}}{u_n^2}$

ta có : $$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n} + \frac{\sqrt{3}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 2\alpha + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 2\alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\alpha - \sqrt{3}\right)\left(\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{3}.$$

Như vậy nếu tồn tại (1), thì $\alpha = \sqrt{3}$. Ta chứng minh rằng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ thì :

$$u_{2n} > u_{2n+2}. \qquad (2)$$

(2) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

– Với $n = 0$, ta có $u_0 = 1$, $u_1 = 2 + \sqrt{3}$, và

$$u_2 = \frac{2}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4+3\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} < 1.$$

Vì thế $u_0 > u_2$.

Như vậy (2) đúng khi $n = 0$.

– Giả sử (2) đã đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots, k$.

– Xét khi $n = k + 1$.

Theo cách xác định dãy thì :

$$u_{2k+1} = \frac{2}{u_{2k}} + \frac{\sqrt{3}}{u_{2k}^2}. \tag{3}$$

Theo giả thiết quy nạp thì $u_{2k} > u_{2k+2}$. Vì thế từ (3) có :

$$u_{2k+1} < \frac{2}{u_{2k+2}} + \frac{\sqrt{3}}{u_{2k+2}^2} = u_{2k+3}. \tag{4}$$

Lại theo cách xác định dãy, thì

$$u_{2k+2} = \frac{2}{u_{2k+1}} + \frac{\sqrt{3}}{u_{2k+1}^2}. \tag{5}$$

Theo (3) thì $0 < u_{2k+1} < u_{2k+3}$, do vậy từ (5) đi đến

$$u_{2k+2} > \frac{2}{u_{2k+3}} + \frac{\sqrt{3}}{u_{2k+3}^2} = u_{2k+4},$$

tức là :

$$u_{2(k+1)} > u_{2(k+1)+2}.$$

Điều đó có nghĩa là (2) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (2) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ Như vậy ta có :

$$1 = u_0 > u_2 > u_4 > \ldots > u_{2n} > \ldots > 0. \tag{6}$$

Dãy $\{u_{2n}\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}$.

Mặt khác do $u_0 = 1$ nên $\beta \le 1$. (7)

Vì tồn tại giới hạn hữu hạn $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3}$, nên nói riêng

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3},$$

tức là $\beta = \sqrt{3}$. (8)

Từ (7) và (8) suy ra điều vô lí. Vậy giả thiết phản chứng là sai. Câu trả lời của bài toán là *phủ định*, tức là không tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

BÀI 34. Giả sử $x \ge 1$ là số hữu tỉ mà tồn tại dãy số nguyên $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ và hằng số $c \ne 0$ sao cho : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c x^n - u_n\right) = 0$.

Chứng minh rằng x là số nguyên.

Bài giải

Do $x \ge 1$ là số hữu tỉ, nên : $x = \dfrac{p}{q}$,

ở đây $p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$. Do

$$\lim_{n\to\infty}\left(c x^n - u_n\right) = 0,$$

nên theo định nghĩa giới hạn suy ra tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \ge m$ ta có :

$$\left|c x^n - u_n\right| < \frac{1}{p+q}. \quad (1)$$

Để ý rằng do $x \ge 1, c > 0$ nên $c x^n \equiv c$ nếu $x = 1$; hoặc $c x^n \to +\infty$ khi $n \to \infty$, nếu $x > 1$. Vì

$$\lim_{n\to\infty}\left(c x^n - u_n\right) = 0,$$

nên theo định nghĩa giới hạn, suy ra không tồn tại vô hạn n để $u_n = 0$. Vì lẽ đó không giảm tổng quát có thể cho là $u_m \neq 0$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ mà $n \geq m$, từ (1) ta có

$$\begin{cases} p c x^n = q c x^{n+1} \quad \left(\text{do } x = \dfrac{p}{q}\right) \\ \left|c x^n - u_n\right| < \dfrac{1}{p+q} \\ \left|c x^{n+1} - u_{n+1}\right| < \dfrac{1}{p+q} \end{cases} \tag{2}$$

Áp dụng tính chất giá trị tuyệt đối $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, ta có :

$$\left|p u_n - q u_{n+1}\right| \leq \left|p c x^n - p u_n\right| + \left|q c x^{n+1} - q u_{n+1}\right|. \tag{3}$$

(dựa vào $p c x^n = q c x^{n+1}$).

Dựa vào (2), ta có :

$$\left|p c x^n - p u_n\right| = p\left|c x^n - u_n\right| < \frac{p}{p+q}$$

$$\left|q c x^{n+1} - q u_{n+1}\right| = q\left|c x^{n+1} - u_{n+1}\right| < \frac{q}{p+q}.$$

Vì thế thay vào (3) và đi đến :

$$\left|p u_n - q u_{n+1}\right| < 1. \tag{4}$$

Mặt khác $p u_n - q u_{n+1}$ là số nguyên (do $p, q \in \mathbb{N}^*$, còn $\{u_n\}$ là dãy số nguyên theo giả thiết). Kết hợp với (4) ta thu được

$$p u_n - q u_{n+1} = 0$$

hay
$$u_{n+1} = \frac{p}{q} u_n.$$

Nói khác đi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq m$, ta có :

$$u_{n+1} = \frac{p}{q} u_n. \tag{5}$$

Áp dụng liên tiếp (5) ta có :

$$u_n = \frac{p}{q}u_{n-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 u_{n-2} = \ldots = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-m} u_m.$$

Do $$u_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^{n-m} .u_m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \left(u_m . p^{n-m}\right) \vdots\, q^{n-m}. \qquad (6)$$

Từ (6) và do $(p, q) = 1$, nên suy ra :

$$u_m \vdots\, q^{n-m}. \qquad (7)$$

Vì (7) đúng với mọi $n \geq m$, và $u_m \neq 0$ suy ra $q = 1$. Từ đó :

$x = p$, nghĩa là $x \in \mathbb{Z}$. Đó là đ.p.c.m.

BÀI 35. Cho ba dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n w_n}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{w_n u_n}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{u_n v_n}$$

u_0, v_0, w_0 là các số dương cho trước

Tìm tất cả các số thực a sao cho $u_n > a\sqrt[3]{n}$ với mọi n.

Bài giải

Từ giả thiết suy ra $u_n > 0, v_n > 0, w_n > 0,$ và

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \frac{1}{u_n v_n w_n} \qquad (1)$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ Từ (1) suy ra :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{u_n}{v_n} = \ldots = \dfrac{u_0}{v_0} \\ \dfrac{u_{n+1}}{w_{n+1}} = \dfrac{u_n}{w_n} = \ldots = \dfrac{u_0}{w_0} \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (2) và theo công thức xác định dãy ta có :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n w_n} = u_n + \left(\frac{u_n}{v_n}\right)\left(\frac{u_n}{w_n}\right)\frac{1}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{u_0^2}{v_0 w_0} \cdot \frac{1}{u_n^2}$$

hay $$u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{u_n^2}, \qquad (3)$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$;

ở đây $\alpha = \dfrac{u_0^2}{v_0 w_0}$.

Do $\alpha > 0$ (vì u_0, v_0, w_0 là các số dương), nên từ (3) suy ra :

$$0 < u_0 < u_1 < u_2 < \ldots$$

Như vậy dãy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng, nên luôn luôn tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn). Ta sẽ chứng minh rằng :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty. \qquad (4)$$

Thật vậy giả thiết trái lại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, ở đây l hữu hạn. (Chú ý rằng ở đây $l > 0$). Từ (3) sau khi lấy giới hạn hai vế khi $n \to \infty$, ta có :

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n + \frac{\alpha}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)^2}$$

hay $$l = l + \frac{\alpha}{l^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{l^2} = 0. \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra vô lí vì l hữu hạn lớn hơn 0. Vậy (4) được chứng minh. Vẫn từ (3), ta có :

$$u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3\alpha + 3\frac{\alpha^2}{u_n^3} + \frac{\alpha^3}{u_n^6}. \qquad (6)$$

Do $\alpha > 0$, nên từ (6) có :

$$u_{n+1}^3 > u_n^3 + 3\alpha. \qquad (7)$$

Bất đẳng thức (7) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$; nên áp dụng liên tiếp (7) ta có :

$$u_{n+1}^3 > u_n^3 + 3\alpha > u_{n-1}^3 + 6\alpha > \ldots > u_0^3 + 3(n+1)\alpha > 3(n+1)\alpha.$$

Nói cách khác với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$, ta thu được :

$$u_n > \sqrt[3]{3\alpha}\,.\sqrt[3]{n}. \qquad (8)$$

Từ (8) suy ra a sẽ thoả mãn yêu cầu đề bài nếu $a \le \sqrt[3]{3\alpha}$. (9)

Bây giờ giả sử $a > \sqrt[3]{3\alpha}$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ mà

$$a\sqrt[3]{n} > u_n$$

có nghĩa là lúc này a không thoả mãn yêu cầu đề bài và điều đó đồng nghĩa với (9) là tập hợp tất cả các giá trị a cần tìm).

Do $a > \sqrt[3]{3\alpha}$, nên xét tất cả các $\varepsilon > 0$ mà ta vẫn có : $a > \sqrt[3]{3\alpha + \varepsilon}$.

Do $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ và kết hợp với (6), suy ra tồn tại $m \in \mathbb{N}$, sao cho với mọi $n \ge m$, ta có :

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3\alpha + \varepsilon, \qquad (10)$$

(điều này suy ra từ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^2}{u_n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^3}{u_n^6} = 0$, và do $\alpha > 0$; $0 < u_0 < u_1 < u_2 < \ldots$, nên

$\left\{\dfrac{\alpha^2}{u_n^3}\right\}$ và $\left\{\dfrac{\alpha^3}{u_n^6}\right\}$ là các dãy đơn điệu giảm và dần đến 0, do đó tồn tại m mà khi $n \geq m$, thì $3\dfrac{\alpha^2}{u_n^3} + \dfrac{\alpha^3}{u_n^6} < \varepsilon$).

Áp dụng liên tiếp (10), ta có :

$$u_n^3 < u_{n-1}^3 + 3\alpha + \varepsilon < u_{n-2}^3 + 2(3\alpha + \varepsilon) < \ldots < u_m^2 + (3\alpha + \varepsilon)(n-m).$$

Từ đó với mọi $n \geq m$, thì

$$\frac{u_n^3}{n} < \frac{u_m^2 + (3\alpha + \varepsilon)(n-m)}{n}. \qquad (11)$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_m^2 + (3\alpha + \varepsilon)(n-m)}{n} = 3\alpha + \varepsilon$, và theo giả thiết thì $3\alpha + \varepsilon < a^3$.

Từ đó theo (11) suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$, mà $\dfrac{u_n^3}{n} < a^3$ hay $a\sqrt[3]{n} > u_n$.

Như thế ta đã chỉ ra rằng các giá trị của a cần tìm là $a \leq \sqrt[3]{3\alpha}$.

BÀI 36. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$u_1 = a$$
$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

ở đây $a > 1$ là số cho trước.

Tìm giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Bài giải

Ta có : $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 = u_n + (u_n - 1)^2$, với $n = 1, 2, \ldots$

Do $u_1 = a > 1$, nên bằng quy nạp dễ dàng suy ra :

$u_{n+1} > u_n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Như vậy ta có :

$$1 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots \qquad (1)$$

Vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng, nên tồn tại giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn. Chú ý rằng nếu tồn tại dãy giới hạn hữu hạn $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, thì từ (1) suy ra $\alpha > 1$.

Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} u_n. \tag{2}$$

Từ công thức xác định dãy :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \text{ với } n = 1, 2, \ldots;$$

sau khi lấy giới hạn khi $n \to \infty$ hai vế và sử dụng (2), ta đi đến :

$$\alpha = \alpha^2 - \alpha + 1$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1. \tag{3}$$

(3) mâu thuẫn với $\alpha > 1$. Vậy giả thiết (2) với α là số hữu hạn là sai, tức là :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty. \tag{4}$$

Theo công thức xác định dãy, thì với mọi k, ta có :

$$u_{k+1} = u_k^2 - u_k + 1$$

hay

$$u_{k+1} - 1 = u_k\left(u_k - 1\right).$$

Từ đó có :

$$\frac{1}{u_{k+1} - 1} = \frac{1}{u_k\left(u_k - 1\right)} = \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_k},$$

hay

$$\frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1}. \tag{5}$$

Từ (5) đi đến :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}. \tag{6}$$

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{a - 1}.$$