Bài toán chia kẹo của Euler

I.Giới thiệu:

Bài toán chia kẹo là một trong những bài toán tổ hợp hay và thú vị. Nên được ứng dụng nhiều trong các bài tập. Sau đây tôi sẽ trình bày về bài toán này.

II.Bài toán mở đầu:

Bài toán mở đầu: Có m chiếc kẹo giống nhau chia cho n em bé. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Đây cũng chính là bài toán: "Tìm số nghiệm không âm của phương trình :

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ (n, m $\in N^*$)."

Giải:

Với mỗi bộ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ tương ứng 1-1 với bộ $\underbrace{11..1}_{x_1}0\underbrace{11...1}_{x_2}0..0\underbrace{11..1}_{x_n}$ gồm m số 1 và n-1 số 0 (Đây là kĩ thuật song ánh). Để có một bộ số chúng ta cần chọn n-1 vị trí trong m+n-1 vị trí để đặt chữ số 0 và còn lại đặt chữ số 1.

Suy ra số cách chia kẹo là: d $= C_{m+n-1}^{n-1}$.

Bài toán 1: Tìm số *nghiệm nguyên dương* của phương trình: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ (n, m $\in N^*$).

Giải:

Đặt $y_i = x_i - 1$ (Với $i = \overline{1,n}$) ta có:

$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n = m - n$.

- Nếu m < n phương trình vô nghiệm.
- Nếu m ≥ n, quay trở lại bài toán ban đầu số nghiêm của phương trình trên chính là số nghiệm của phương trình là: d= C_{m-1}^{n-1} .

Có thể tổng quát dạng toán này như sau: Cho n số tự nhiên, $a_1, a_2, \ldots, a_n$.Tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình:$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ thỏa mãn $x_i \geq a_i$ ($\forall i = \overline{1,n}$).

Giải:

Đặt $y_i = x_i - a_i$ ($\forall$ $i = \overline{1,n}$) và $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nên ta có:

$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_1 + a_2 + \ldots + a_n = m - S$.

- Nếu m < S. Phương trình vô nghiệm.
- Nếu m = S. Phương trình có 1 nghiệm.
- Nếu m > S. Phương trình có $C_{m+n-S-1}^{n-1}$ nghiệm.

III.Một bài toán nâng cao:

Bài toán tổng quát: Tìm số nghiệm của phương trình: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ với $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Trước tiên để giải bài toán tổng quát này ta sẽ làm với những bài toán nhỏ hơn:

Bài toán 1: Tìm số nghiệm của phương trình: x + y = m với x ≤ y.

Giải: *Đây là lời giải của thầy Nguyễn Vũ Lương (Trường THPT Chuyên KHTN):*

Vì x≤y nên từ phương trình suy ra x ≤ $\left[\frac{n}{2}\right]$:

- Nếu n chia hết cho 2 thì x có thể nhận $\frac{n}{2}$ + 1=$\left[\frac{n}{2}\right]$ +1 giá trị

  0,1,2,…, $\left[\frac{n}{2}\right]$ và y tính được theo x (vì y=n-x) suy ra ta có $\left[\frac{n}{2}\right]$ +1 bộ (x,y) nguyên không âm thỏa mãn x+y=n và x≤ y.

- Nếu n không chia hết cho 2 suy ra x ≤ $\left[\frac{n}{2}\right]$ và x có thể nhận $\left[\frac{n}{2}\right]$ +1 giá trị và có $\left[\frac{n}{2}\right]$ + 1 bộ (x,y) nguyên không âm thỏa mãn bài toán.

Bài toán 2: Tìm số nghiệm không âm của phương trình: x+y+z=n thỏa mãn điều kiện x ≤ y ≤ z.

Giải: *Đây là lời giải của thầy Nguyễn Vũ Lương (Trường THPT Chuyên KHTN):*

- Kí hiệu r_{1xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn x < y < z. Tương tự có r_{1xzy} ,r_{1yzx} ,r_{1yxz} ,r_{1zxy} ,r_{1zyx}.

  Do vai trò của x,y,z hoàn toàn bình đẳng trong phương trình: x+y+x=n

  Ta có: $r_{1xyz} = r_{1xzy} = r_{1yzx} = r_{1yxz} = r_{1zxy} = r_{1zyx} = r_1$.

- Kí hiệu r_{2xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn x=y<z. Tương tự có r_{2yzx} ,r_{3zxy}.

  Ta có: $r_{2xyz} = r_{2yzx} = r_{1zxy} = r_2$.

- Kí hiệu r_{3xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn x<y=z. Tương tự có r_{3yzx} ,r_{3zxy}.

  Ta có: $r_{3xyz} = r_{3yzx} = r_{3zxy} = r_3$.

- Kí hiệu r_4 là nghiệm số của phương trình thỏa mãn x=y=z.

Tất cả các bộ số nguyên không âm (x,y,z) thỏa mãn x+y+z=n bằng

$C_{n-1}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ mỗi bộ số sẽ thuộc một trong những trường hợp trên nên ta có: $6r_1 + 3r_2 + 3r_3 + r_4 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Ta có : $r_2 + r_3 + r_4$ chính là số nghiệm của phương trình 2u+v=n (vì từ phương trình x+y+z=n ta có thể cho 2 số hạng x=y hoặc y=z hoặc z=x và tất nhiên bao gồm cả trường hợp x=y=z).

Giả sử x=y sẽ bao gồm x=y>z, x=y<z, x=y=z.

Phương trình 2u+v=n <=> u+(u+v)=n. Đặt $t=u+v \geq u$ thu được u+t=n với $u \leq t$.

Theo như bài toán 1 số nghiệm của phương trình này là $\left[\frac{n}{2}\right]+1$

hay $r_2 + r_3 + r_4 = \left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Xét:

- Nếu n chia hết cho 3 => $r_4 = 1$.
- Nếu n không chia hết cho 3 => $r_4 = 0$ hay $r_4 = \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]$..

Vì $x \leq y \leq z$ bao gồm x<y<z hoặc x=y<z hoặc x<y=z hoặc x=y=z.

Vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu của bài toán là: $d = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$.

Từ những dữ liệu trên ta có:

d = $\frac{1}{6}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3r_2 - 3r_3 - r_4\right]$ + $r_2 + r_3 + r_4$. $= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}(r_2 - r_3) + \frac{5}{6}r_4$ $= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}(r_2 + r_3 + r_4) + \frac{1}{3}r_4$ $= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}(\left[\frac{n}{2}\right] +1) + \frac{1}{3}(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{2}\right])$

Bài toán 3: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa mãn:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ với $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$.

Giải: *Lời giải của Nguyễn Long Nhật và Nguyễn Hùng Quang (Trường Chuyên KHTN):*

Bổ đề Burnside: *" Nếu ϕ là các tập thuộc tập X. Với mỗi φ thuộc ϕ với X^{φ} biểu thị các phần tử trong tập X được xác định bởi φ.Bổ đề Burnside xác định số quỹ đạo khác nhau của bài toán, biểu thị |X/ ϕ |: $|X/\phi| = \frac{1}{|\phi|}\sum_{\varphi\in\phi} v(\varphi)$ (trong đó $v(\varphi)$ là số phần tử của từng tập."*

- Nếu φ= id : v(φ) là số nghiệm của phương trình
  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ => v(φ) =C_{n+3}^{3} và có 1(φ).
- Nếu $\varphi \in \phi$: v(φ) là số nghiệm của phương trình 2x+y+z=n và C_4^2 = 6 (φ).

  Ta có x ∈{ 0;1;…;$\left[\frac{n}{2}\right]$ } và phương trình có n-2x+1 với mỗi x.

  => v(φ) = $\sum_{x=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2x+1) = (\left[\frac{n}{2}\right]+1)(n+1) - \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$

  $= (\left[\frac{n}{2}\right]+1)(\left[\frac{n+1}{2}\right]+1)$.

- Nếu $\varphi \in \phi$: v(φ) là số nghiệm của phương trình 2x+2y=n và $\frac{1}{2}C_4^2$ = 3 (φ).

  * Nếu n lẻ, phương trình vô nghiệm.

* Nếu n chẵn, phương trình có $\frac{n}{2} + 1$ nghiệm.

=> v(φ) = $(\left[\frac{n}{2}\right] + 1)(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right])$.

- Nếu $\varphi \in \phi$: v(φ) là số nghiệm của phương trình 3x+y=n và 2.4 = 8 (φ).

  => v(φ) = $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$.

- Nếu $\varphi \in \phi$: v(φ) là số nghiệm của phương trình 4x=n và $\frac{4!}{4}$ = 6 (φ).

  => v(φ)= $\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]$.

Tổng số các φ là 1+6+3+8+6=24.

Theo bổ đề Burnside số nghiệm của phương trình ban đầu là:

$$\frac{1}{24}\left(C_{n+3}^3 + 6\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1\right) + 3\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) + 8\left(\left[\frac{n}{3}\right] + 1\right) + 6\left(\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]\right)\right)$$

Quay lại bài toán tổng quát: Tìm số nghiệm của phương trình:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ thỏa mãn : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Giải:

Có thể áp dụng bổ đề Burnside hoặc dung phương thức đệ quy như sau:

Giả sử $M_{m,n}$ là tập hợp các kết quả của phương trình và P (m,n) số tập thỏa mãn của các yếu tố của phương trình. Chúng ta dễ dàng thấy rằng:

P (0, n) = 1 với mọi k, P (m, n) = P (m, m) cho tất cả các k ≥ n.

Do đó, ta giả định thêm rằng m cố định, chúng ta có 1< n ≤ m. Ta chia nhỏ các tập $M_{m,n}$ vào thành các tập T_i (i = 0,1, ..., n-1), nên T_i chứa chính xác những kết quả của bài toán trong đó N_0 thoả mãn điều kiện:

$0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \ldots < x_n$.

Ta có $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (x_{i+1}-1, x_{i+2}-1, \ldots, x_n-1)$, định nghĩa một song ánh từ T_i đến

$M_{m-n+i,n-i}$ từ $0 \leq x_{i+1}-1 \leq x_{i+2}-1 \leq \ldots \leq x_n-1$,

$(x_{i+1}-1)+(x_{i+2}-1)+\ldots+(x_n-1) = m-n+i$, và ánh xạ:

$(y_1,y_2,\ldots,y_{n-i}) \to (0,0,\ldots,0, y_1+1,y_2+1,\ldots,y_{n-i}+1)$.

Có nghĩa là $|T_i| = |M_{m-n+i,n-i}|$, và do đó có thể viết:

$\boxed{P(m, n) = P(m-1,1) + P(m-2,2) + \ldots + P(m-n, n)\ (1< n \leq m)}$

và với phương trình cụ thể ta có thể tính được kết quả cụ thể.

IV.Một số bài toán áp dụng:

Bài 1: Tìm số nghiệm không âm của phương trình: x+y+z+t=1000 với

$t \leq 499$.

Giải:

Số nghiệm thỏa mãn x+y+z+t =1000 là C_{1003}^3 được chia ra như sau:

- Thỏa mãn yêu cầu đề bài $t \leq 499$.
- Không thỏa mãn yêu cầu đề bài $t \geq 500$.

Xét $t \geq 500$ ta có: x+y+z+(t-500) = 500

Đặt t_1=t-500 ta thu được số nghiệm trong trường hợp này là C_{503}^3.

Vậy đáp số của bài toán là: d = $C_{1003}^3 - C_{503}^3$.

Đây là phương pháp bù trừ rất hay sử dụng trong các bài toán tổ hợp không chỉ trong bài toán chia kẹo này một số bài toán sau cũng sử dụng phương pháp này.

Bài 2: Tìm số nghiệm không âm của bất phương trình: $x+y+z+t \leq 1000$.

Giải:

Đặt $u=1000-(x+y+z+t) \geq 0$ ta thu được bài toán tương đương x+y+z+t+u=1000 (với x,y,z,u là những số nguyên không âm)

Đáp số của bài toán là: d= C_{1004}^4

Tổng quát: Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình

$x_1+ x_2+\ldots+ x_n \leq m$ là C_{m+n}^m.

Bài 3: Tìm số bộ số nguyên không âm (x,y,z,t) thỏa mãn :

$1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 1000$.

Giải:

Đặt $a_1=x-1 \geq 0$, $a_2=y-x \geq 0$, $a_3=z-y \geq 0$, $a_4=t-z \geq 0$, $a_5=1000-t \geq 0$. Ta có:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 999$.

Đáp số: : C_{1003}^4

Bài 4: Tìm số nghiệm của phương trình sau: $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ ($5\leq x_i\leq 10\ \forall i = \overline{1,4}$)

Giải:

Đặt $y_i=x_i-5\ \forall i = \overline{1,4}$.Từ giả thiết suy ra $0\leq y_i\leq 5$. Ta có phương trình:

$y_1+y_2+y_3+y_4=10$ ($\forall i = \overline{1,4}$).

Gọi X là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình. Khi đó $|X|=C_{13}^3$.

Gọi A,B,C,D lần lượt là các tập hợp thỏa mãn $y_1+y_2+y_3+y_4=10$ và $5\leq y_i$.

Theo bài 1 ta có:

$|A| = |B| = |C| = D| = C_7^3$.

$|A \cap B| = |A \cap C| = |A \cap D| = |B \cap C| = |B \cap D| = |C \cap D| = 0$.

$|A \cap B \cap C| = |A \cap C \cap D| = |B \cap C \cap D| = |A \cap B \cap D| = 0$.

$|A \cap B \cap C \cap D| = 0$.

Áp dụng nguyên lí bù trừ ta có số nghiệm bằng:

$|X| - (|A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| + |A \cap B \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|)$.

Vậy đáp số là: $C_{13}^3 - 4C_7^3 = 146$.

Bài 5: Tìm số nghiệm của phương trình sau: $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ và $|x_i|\leq 5$

($\forall i = \overline{1,4}$).

Giải:

Vì $|x_i| \leq 5$ => $-5 \leq x_i \leq 5$. Đặt $y_i = x_i + 5$ $(\forall i = \overline{1,4})$

=> $y_1+y_2+y_3+y_4=34$ với $0 \leq x_i \leq 10$ $(\forall i = \overline{1,4})$

Làm tương tự bài 4 ta có kết quả là:540 nghiệm.

Bài 6: Cho tập A={1;2;3;…;18} có bao nhiêu cách lấy ra 5 số mà giá trị tuyệt đối hiệu của 2 số bất kì trong 5 số đó không nhỏ hơn 2?

Giải:

Theo bài toán ta sẽ có 5 số thỏa mãn đề bài sẽ không có 2 số nào liên tiếp, suy ra 5 số này chia chuỗi 13 số còn lại thành 6 chuỗi con trong đó mỗi chuỗi đều có ít nhất 1 phần tử. Gọi số phần tử trong chuỗi là $a_1,a_2,..,a_6$ bài toán tương đương với việc tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $a_1+a_2+..+a_6=13$. Kết quả bài toán là 792.

Bài 7: Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10000 mà có tổng các chữ số bằng 14?

Giải:

Gọi số phải tìm có dạng $\overline{abcd}$ sao cho $0 \leq a, b, c, d \leq 9$.Theo bài ra ta có:

$a+b+c+d=14$.

Tương tự bài 4, số các số nguyên dương phải tìm là 456.

Bài 8: Có 8 viên giống nhau và 12 hộp bi khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đó vào các hộp sao cho tổng số bi trong hộp 1,2,3 là chẵn?

Giải:

Gọi số bi trong các hộp lần lượt là $a_1, \dots, a_{12}$.

Đặt $a_1+a_2+a_3=x$ => x chẵn.

- Nếu x=0 => có $a_4+\dots+a_{12}=8$

  Số nghiệm $(a_4,\dots,a_{12})$ là C_{16}^7. Số nghiệm (a_1,a_2,a_3) là 1.

- Nếu x=2 => $a_4+\dots+a_{12}=6$
  Số nghiệm $(a_4,\dots,a_{12})$ là C_{14}^5. Số nghiệm (a_1,a_2,a_3) là C_4^1.
- Nếu x=4 => $a_4+\dots+a_{12}=4$

Số nghiệm ($a_4,\ldots,a_{12}$) là C_{12}^3. Số nghiệm (a_1,a_2,a_3) là C_6^3 .

- Nếu x=6 => $a_4+\ldots+a_{12}=2$

Số nghiệm ($a_4,\ldots,a_{12}$) là C_{10}^1. Số nghiệm (a_1,a_2,a_3) là C_8^5 .

- Nếu x=8 => $a_4+\ldots+a_{12}=0$

Số nghiệm ($a_4,\ldots,a_{12}$) là 1. Số nghiệm (a_1,a_2,a_3) là C_{10}^7 .

Vậy số cách xếp bóng vào hộp là 24528 cách.

Tài liệu

- Counting and Configuration – Jiri Herman, Radan Kucera, Jaromir Simsa.
- Mathematical Olympiad Series, Vol.4: Combinatorial Problems on Mathematical Competitions – Yao Zhang.
- Problem-Solving Methods in Combinatorics – Pablo Soberón Bravo.
- Xung quanh bài toán chia kẹo-www.vietmaths.com

.