

Chủ đề 04. Đồ thị khả phẳng

Nếu ta vẽ một đồ thị trên mặt phẳng thì một cách rất tự nhiên ta luôn cố gắng vẽ nó sao cho dễ dàng quan sát nhất có thể được. Nhận thấy rằng sở dĩ khó quan sát đồ thị khi vẽ đồ thị trên một mặt phẳng là do sự lộn xộn gây ra bởi giao điểm giữa hai cạnh của nó nên nếu ta có thể vẽ một đồ thị sao cho hai cạnh bất kì của nó không có giao điểm chung nào khác ngoài hai đầu mút thì ta có thể quan sát đồ thị một cách dễ dàng nhất.

Nếu một đồ thị thỏa mãn yêu cầu vừa trình bày ở trên thì nó được gọi là một **đồ thị khả phẳng**.

Trong suốt phần mục này ta tập trung giải quyết câu hỏi:

“Một đồ thị phải thỏa mãn những điều kiện gì để nó là một đồ thị khả phẳng?”

Đầu tiên trong mục 4.1) ta sẽ khảo sát một số tính chất topo cơ bản nhằm tạo tiền đề cần thiết cho việc thực hiện các phép chứng minh chặt chẽ mà không phải đòi hỏi quá nhiều về kỹ thuật tính

toán. Trong mục 4.2) ta sẽ giới thiệu sơ lược qua một số tính chất cơ bản về cấu trúc của một đồ

thị phẳng – trường hợp đặc biệt của đồ thị khả phẳng. Trong mục 4.3) ta sẽ khảo sát những đặc điểm cơ bản dùng để phân biệt hai phép nhúng phẳng của cùng một đồ thị. Kết quả quan trọng nhất cần chú ý đến trong mục này là sự kiện mọi đồ thị phẳng 3 – liên thông đều chỉ có duy nhất một biểu diễn phẳng. Trong hai mục 4.4) và 4.5) ta tập trung thời gian để trình bày phép chứng minh cho các kết quả cổ điển về tính khả phẳng của một đồ thị. Sau cùng để kết thúc chủ đề bản luận ta sẽ giới thiệu thêm khái niệm về tính chất **đối ngẫu phẳng** – một khái niệm có nhiều sự kết nối đa dạng về cả lý thuyết lẫn ứng dụng.

Thông thường ta thường quan niệm một cách biểu diễn của đồ thị trên mặt phẳng là một hình vẽ bao gồm các đỉnh là các điểm trên mặt phẳng còn các cạnh được biểu diễn bởi các đường cong nối giữa các điểm, các đường cong này chỉ có thể giao nhau tại các đầu mút của chúng. Nhằm để tránh phải trình bày quá nhiều những khái niệm về topo quá mức cần thiết ta sẽ hạn chế khảo sát các đường cong tuyến tính; không quá khó khăn để ta có thể chỉ ra rằng mọi cách biểu diễn khác của đồ thị đều có thể chuyển về dạng biểu diễn vừa trình bày ở trên, nên hai cách nêu vấn đề nêu trên thật ra chính là một.

4.1. Các tính chất topo cơ bản

Trong mục này của bài viết ta sẽ chỉ giới thiệu sơ lược qua về các khái niệm cũng như các kết quả cơ bản về topo dùng để làm tiền đề cho các mục sau của bài viết. Những kết quả này rất quen thuộc đối với phần lớn những người làm toán. Phép chứng minh của những kết quả này có thể được tìm thấy dễ dàng trong bất kì giáo trình sơ cấp nào viết về topo hình học nên ta sẽ không trình bày lại chúng trong bài viết này. Sau cùng, do tất cả các phép chứng minh được trình bày ở đây đều sẽ được suy ra từ các định nghĩa và các tính chất cơ bản (những kết quả này có thể được gợi ý từ các hình vẽ nhưng ta sẽ không dựa dẫm hoàn toàn vào các hình vẽ trực quan này) nên ta sẽ giữ cho các lập luận liên quan đến lý thuyết topo ở mức sơ cấp nhất có thể được.

Nhắc lại một số khái niệm hình học cơ bản:

Đoạn thẳng là một tập con của $\mathbb{R}^2$ có dạng $\{p + \lambda(q - p) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $p, q \in \mathbb{R}^2$ là hai đỉnh phân biệt nào đó.

Đường gấp khúc mở là một tập con của $\mathbb{R}^2$ hợp thành bởi một số hữu hạn các đoạn thẳng và đồng phôi với đoạn thẳng đơn vị $[0,1]$. Ảnh của các điểm 0 và 1 qua phép đồng phôi chính là các **đầu mút**

của đường gấp khúc. Nếu P là một đường gấp khúc mở nối giữa hai đỉnh x, y thì tập hợp $P \setminus \{x, y\}$ được gọi là **phần trong** của P và kí hiệu là P^0 .

Đường gấp khúc khép kín/đa giác là một tập con của $\mathbb{R}^2$ hợp thành bởi một số hữu hạn các đoạn thẳng và đồng phôi với đường tròn đơn vị.

Cho trước một tập mở $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Mỗi quan hệ định nghĩa bởi việc nối bằng một đường gấp khúc giữa hai điểm trong O xác định một quan hệ tương đương trên O . Những lớp tương đương ứng với quan hệ này cũng là các tập mở; chúng được gọi là các **miền** của O . Tập đóng $X \subseteq \mathbb{R}^2$ được gọi là **tách** O nếu $O \setminus X$ có nhiều hơn một miền liên thông. **Biên** Y của một tập $X \subseteq \mathbb{R}^2$ là tập gồm tất cả các điểm $y \in \mathbb{R}^2$ sao cho mọi lân cận của y đều chứa đồng thời các điểm thuộc X và $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Nhận thấy rằng tập biên của một miền O của $\mathbb{R}^2 \setminus X$ (X hợp thành bởi một số hữu hạn các điểm và đường gấp khúc) có hai tính chất cơ bản sau:

Tính chất thứ nhất. Nếu $x \in X$ nằm trong tập biên của miền O thì x có thể nối với một điểm nào đó trong O bằng một đoạn thẳng có phần trong nằm hoàn toàn trong O .

Một hệ quả tất yếu là nếu hai điểm nào đó cùng nằm trong tập biên của miền O thì có thể nối chúng với nhau bởi một đường gấp khúc có phần trong nằm hoàn toàn trong O .

Tính chất thứ hai. Biên của miền O tách O ra khỏi phần còn lại của $\mathbb{R}^2$.

Một số kết quả quan trọng sẽ được sử dụng đến trong các lập luận của bài viết này:

Kết quả 4.1.1. (Định lí Jordan cho đa giác)

Mọi đa giác $P \subseteq \mathbb{R}^2$ đều chia tập $\mathbb{R}^2 \setminus P$ thành hai miền phân biệt, có chính xác một trong hai miền này là bị chặn và cả hai miền này đều nhận đa giác P làm tập biên.

Từ kết quả 4.1.1), ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau:

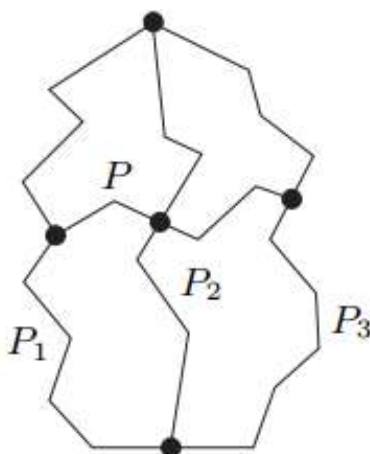
Bổ đề 4.1.2.

Cho trước P_1, P_2, P_3 là ba đường gấp khúc đôi một phân biệt nối giữa hai điểm.

Khi đó:

i) $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ chứa chính xác ba miền và các miền này nhận $P_1 \cup P_2, P_2 \cup P_3, P_1 \cup P_3$ làm các tập biên tương ứng.

ii) Nếu P là một đường gấp khúc nối giữa một điểm nằm trong P_1^0 và một điểm nằm trong P_3^0 sao cho phần trong của P nằm trong miền của $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ có chứa P_2^0 thì $P^0 \cup P_2^0 \neq \emptyset$.

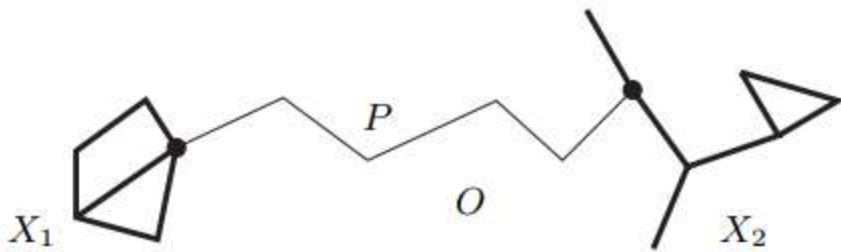


Bổ đề kế tiếp đóng vai trò như một sự bổ sung cho định lý Jordan khi chỉ ra một đường gấp khúc không tách mặt phẳng $\mathbb{R}^2$:

Bổ đề 4.1.3.

Cho trước $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ là hai tập phân biệt (mỗi tập này đều hợp thành bởi một số hữu hạn các điểm và đường gấp khúc), P là một đường gấp khúc nối giữa một điểm nằm trong X_1 và một điểm nằm trong X_2 sao cho phần trong P^0 nằm trong miền O của $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Khi đó, $O \setminus P^0$ là một miền nào đó của $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$.



Phần còn lại của phần mục sẽ giới thiệu một số khái niệm và kết quả sẽ được sử dụng chỉ một lần trong các lập luận và phân tích thực hiện trong “Chủ đề 04. Đồ thị phẳng”:

Kí hiệu S^n là mặt cầu $(n + 1) -$ chiều gồm tất cả các điểm nằm trong $\mathbb{R}^{n+1}$ có khoảng cách đến gốc tọa độ bằng 1.

Khi đó, mặt cầu S^2 bỏ đi “điểm cực bắc” $(0,0,1)$ sẽ đồng phôi với mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ qua một phép đồng phôi $\pi: S^2 \setminus \{0,0,1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nào đó: chẳng hạn, mặt cầu S^2 bỏ đi “điểm cực bắc” sẽ đồng phôi với mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ qua phép chiếu nới với tâm chiếu đặt tại “điểm cực bắc”.

Hơn nữa, nếu P là một đa giác trên $\mathbb{R}^2$ và O là miền bị chặn của tập $\mathbb{R}^2 \setminus P$ thì $C := \pi^{-1}(P)$ là một đường tròn trên S^2 và hai tập $\pi^{-1}(O), S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$ là các miền của C .

Kết quả 4.1.4. (Jordan – Schoenflies)

Giả sử $\varphi: C_1 \rightarrow C_2$ là một phép đồng phôi giữa hai đường tròn trên mặt cầu S^2 , O_1 là một miền của đường tròn C_1 , O_2 là một miền của đường tròn C_2 .

Khi đó, φ có thể được mở rộng thành một phép đồng phôi $\tilde{\varphi}: C_1 \cup O_1 \rightarrow C_2 \cup O_2$.

4.2. Đồ thị phẳng

Đồ thị phẳng là một cặp (V, E) (các phần tử của tập V được gọi là các **đỉnh**, các phần tử của tập E được gọi là các **cạnh**) thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;
- ii) Mọi cạnh của đồ thị phẳng đều là một đường gấp khúc nối giữa hai đỉnh;
- iii) Các cạnh khác nhau có tập các đầu mút khác nhau;
- iv) Phần trong của một cạnh bất kì không chứa bất kì đỉnh nào và cũng không chứa bất kì điểm nào nằm trong các cạnh khác.

Nhận thấy rằng một đồ thị phẳng (V, E) cũng xác định một cấu trúc đồ thị trên tập đỉnh V , nên nếu không có thông báo gì có thể gây ra nhầm lẫn trong quá trình chứng minh thì ta sẽ kí hiệu đồ thị phẳng (V, E) bởi G giống như trước đây.

Nhận thấy thêm rằng $\mathbb{R}^2 \setminus G$ là một tập mở với mọi đồ thị phẳng G . Các miền của nó được gọi là các **mặt** của G . Kí hiệu tập tất cả các mặt của G bởi $F(G)$.

Do G là một tập bị chặn (G nằm trong một hình tròn D với bán kính đủ lớn) nên có chính xác một mặt của G là không bị chặn: mặt có chứa $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Mặt này được gọi là **mặt ngoài**; các mặt còn lại được gọi là các **mặt trong**.

Nhằm tạo tiền đề vững chắc cho việc khảo sát một cách nghiêm túc các tính chất của lớp các đồ thị phẳng, ta sẽ giới thiệu sơ lược một số tính chất topo cơ bản của nó trước:

Bổ đề 4.2.1.

Cho trước đồ thị phẳng G và e là một cạnh của G .

Khi đó:

- i) Nếu X là biên của một mặt nào đó của G thì $e \subseteq X$ hoặc $X \cap e^0 = \emptyset$.
- ii) Nếu e nằm trên một chu trình $C \subseteq G$ thì e nằm trên tập biên của chính xác hai mặt khác nhau của G . Hơn nữa, hai mặt này được chứa trong hai mặt khác nhau của chu trình C .
- iii) Nếu e không nằm trên bất kì một chu trình nào thì e nằm trên tập biên của chính xác một mặt của G .

Chứng minh bổ đề 4.2.1.

Ta sẽ chứng minh cả ba khẳng định trên đồng thời cùng một lúc như sau:

Xét một điểm $x_0 \in e^0$, ta sẽ chứng minh rằng x_0 nằm trên tập biên của một hoặc hai mặt tùy thuộc vào việc cạnh e có nằm trên một chu trình nào đó trong G hay không.

Ý tưởng của phép chứng minh nằm ở việc ta sẽ chỉ ra rằng những điểm còn lại của phần trong e^0 cũng nằm trên các tập biên của các mặt giống như điểm x_0 .

Khi đó, các nút của cạnh e cũng nằm trên các tập biên của các mặt nói trên (mọi lân cận của các đầu nút của e cũng là lân cận của một điểm trong nào đó của e).

Nhận thấy rằng G được hợp thành bởi một số hữu hạn các đường gấp khúc còn bản thân các đường gấp khúc này lại được hợp thành bởi một số hữu hạn các đoạn thẳng nên có thể xem như

G được hợp thành bởi một số hữu hạn các đoạn thẳng.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử thêm rằng hai đoạn thẳng bất kì giao nhau tối đa tại một điểm.

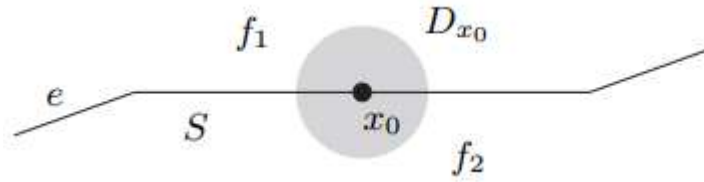
Nhận thấy rằng, với mỗi điểm $x \in e^0$, luôn tồn tại một hình tròn mở D_x với tâm tại x sao cho nó chỉ có giao với một đoạn thẳng nào đó có chứa x .

Nếu cố định một điểm $x_0 \in e$ thì tồn tại một đoạn thẳng $S \subseteq e$ sao cho $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$.

Như vậy, $D_{x_0} \setminus G$ được hợp thành bởi hai nửa hình tròn mở.

Nhận thấy rằng hai nửa đường tròn mở này không giao với G , nên chúng sẽ nằm trong hai mặt nào đó của G .

Kí hiệu f_1, f_2 là hai mặt nêu ở trên; điểm x_0 nằm trên biên của hai mặt này và chúng có thể trùng nhau.



Hình vẽ minh họa hai mặt f_1, f_2 nói đến trong phép chứng minh.

Nếu e nằm trên một chu trình $C \subseteq G$ thì D_0 có giao với cả hai mặt của chu trình C , điều này suy ra từ Kết quả 4.1.1).

Khi đó, hai mặt f_1, f_2 được chứa trong hai mặt khác nhau của chu trình C (do $C \subseteq G$ nên mọi mặt của G đều là một tập con của một mặt nào đó của C). Điều này gián tiếp chỉ ra rằng $f_1 \neq f_2$.

Nếu e không nằm trên bất kì một chu trình nào của G thì e đóng vai trò là một cạnh cầu của G .

Hơn nữa, cạnh e sẽ nối hai tập phân biệt X_1, X_2 lại với nhau và $X_1 \cup X_2 = G \setminus e^0$.

Nhận thấy rằng $f_1 \cup e^0 \cup f_2$ là tập con của một mặt f nào đó trong $G - e$.

Từ Bổ đề 4.1.3), $f \setminus e^0$ là một mặt nào đó của G .

Từ cách định nghĩa của mặt f , $f \setminus e^0$ cũng chứa hai mặt f_1 và f_2 .

Như vậy, $f_1 = f \setminus e^0 = f_2$, do $f_1, f_2, f \setminus e^0$ đều là các mặt của G .

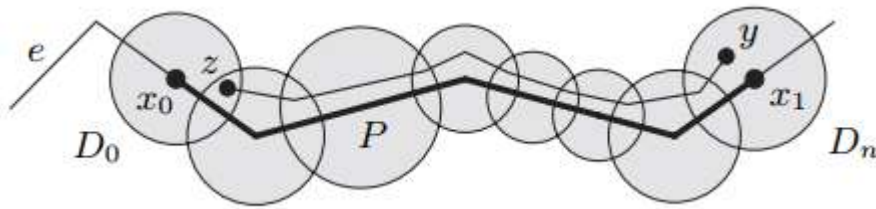
Xét một điểm x_1 khác cũng nằm trên e^0 , giả sử P là phần đường gấp khúc nối giữa x_0 và x_1 chứa trong cạnh e .

Nhận thấy rằng P compact nên tồn tại một họ hữu hạn các hình tròn mở D_x với $x \in P$ phủ kín P .

Để thuận tiện cho việc trình bày phép chứng minh ta đánh số thứ tự các hình tròn này lại dưới dạng $D_0, \dots, D_n$ dựa trên thứ tự trước sau của tâm các hình tròn này trên P .

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử thêm rằng $D_0 = D_{x_0}$ và $D_n = D_{x_1}$.

(nếu cần thiết có thể bổ sung thêm hình tròn mở D_{x_0} hoặc D_{x_1} vào họ)



Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo n :

“Mọi điểm $y \in D_n \setminus e$ đều có thể được nối với bằng một đường gấp khúc nằm hoàn toàn trong $(D_0 \cup \dots \cup D_n) \setminus e$ với một điểm $z \in D_0 \setminus e$ ”.

Khi đó, hai điểm y và z là tương đương với nhau trong $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Nhận thấy rằng bằng cách làm trình bày ở trên, có thể nối hai nửa hình tròn mở của $D_0 \setminus e$ với hai nửa hình tròn mở của $D_n \setminus e$; nên x_1 nằm trên biên của cả hai mặt f_1 và f_2 .

Hơn nữa, mọi điểm nằm trong $D_n \setminus e$ hoặc nằm trong f_1 hoặc nằm trong f_2 , nên x_1 không thể nằm trên biên của bất kì một mặt nào khác của G . □

Hệ quả 4.2.2.

Biên của một mặt f của đồ thị G cũng là một đồ thị con của G .

Đồ thị con của G với tập các đỉnh là biên của một mặt f được gọi là **biên của mặt f** , kí hiệu bởi $G[f]$; hơn nữa, mặt f cũng được gọi là **liên thuộc** với các đỉnh và các cạnh của nó.

Nhận thấy rằng nếu $H \subseteq G$ thì mọi mặt f của G đều được chứa trong một mặt f' nào đó của H , nên nếu $G[f] \subseteq H$ thì $f = f'$. Hệ quả tất yếu là f cũng đồng thời là một mặt của $G[f]$. Những tính chất cơ bản sẽ được sử dụng thường xuyên trong các phép chứng minh mà ta trình bày.

Kết quả 4.2.3.

Mọi rừng phẳng chỉ có duy nhất một mặt.

Chứng minh kết quả 4.2.3.

Dựa trên Bổ đề 4.1.3) và việc thực hiện một phép quy nạp toán học cơ bản theo số các cạnh của đồ thị ta dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn của khẳng định nêu ở trên. $\square$

Khẳng định sau đây sẽ chỉ ra rằng ngoại trừ một số trường hợp ngoại lệ ra nếu ta xét hai mặt khác nhau của cùng một đồ thị phẳng thì biên của chúng cũng sẽ khác nhau:

Bổ đề 4.2.4.

Nếu một đồ thị phẳng chứa hai mặt khác nhau có cùng biên thì đồ thị này phải là một chu trình.

Chứng minh bổ đề 4.2.4.

Giả sử cho trước đồ thị phẳng G , $H \subseteq G$ là biên của hai mặt phân biệt f_1, f_2 nào đó của G .

Nhận thấy rằng do f_1 và f_2 đều là các mặt của H nên H sẽ chứa một chu trình C nào đó, điều này suy ra từ Kết quả 4.2.3).

Từ Bổ đề 4.2.1 ii), f_1 và f_2 sẽ được chứa trong những mặt khác nhau của chu trình C .

Nhưng f_1, f_2 đều nhận H làm biên nên $H = C$: do bất kì đỉnh hoặc cạnh nào của H cũng đều nằm trên biên của một mặt nào đó của C .

Như vậy, f_1 và f_2 là hai mặt phân biệt của C .

Do chu trình C chỉ có hai mặt phân biệt nên $f_1 \cup C \cup f_2 = \mathbb{R}^2$.

Điều này cũng chỉ ra rằng $G = C$. $\square$

Kết quả 4.2.5.

Mọi mặt chứa trong một đồ thị phẳng 2 – liên thông đều có biên là một chu trình.

Chứng minh kết quả 4.2.5.

Giả sử f là một mặt nào đó nằm trong đồ thị phẳng 2 – liên thông G .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$ rằng biên $G[f]$ là một chu trình.

Nếu bản thân G cũng là một chu trình thì tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên, điều này được suy ra từ Kết quả 4.1.1).

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử rằng đồ thị G không phải là một chu trình.

Từ Kết quả 3.1.2), tồn tại một đồ thị phẳng 2 – liên thông H và một H –đường đi phẳng P sao cho $G = H \cup P$. Phần trong P^0 của P sẽ nằm trên một mặt f' nào đó của H và biên của f' là một chu trình C nào đó, điều này suy ra từ việc áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán.

Nếu f cũng là một mặt của H thì tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên, suy ra từ việc áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán; nếu f không phải là một mặt của H thì biên của f sẽ giao

với $P \setminus H$, nên $f \subseteq f'$. Như vậy, f sẽ là một mặt nào đó của $C \cup P$. Từ Bổ đề 4.1.2 i), biên của f cũng sẽ là một chu trình nào đó của G . $\square$

Đồ thị phẳng G được gọi là **tối đại** nếu không thể bổ sung thêm một cạnh mới vào G mà kết quả thu được $G' \supsetneq G$ cũng là một đồ thị phẳng với $V(G') = V(G)$.

Đồ thị G được gọi là **triangular** nếu tất cả các mặt của G đều có biên là một tam giác.

Kết quả 4.2.6.

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị phẳng với bậc lớn hơn hoặc bằng 3 là tối đại là nó là một đồ thị triangular.

Chứng minh kết quả 4.2.6.

Giả sử G là một đồ thị phẳng với bậc lớn hơn hoặc bằng 3.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu tất cả các mặt của G đều có biên là một tam giác thì G là tối đại.

Thật vậy, nếu bổ sung thêm một cạnh e nào đó vào G thì phần trong của e sẽ nằm trong một mặt nào đó của G còn các đầu mút của e cũng nằm trên biên của mặt đó. Như vậy, các đầu mút này liên hợp với nhau trong G , nên $G \cup e$ không thể thỏa mãn điều kiện iii) nêu trong định nghĩa của một đồ thị phẳng.

Ngược lại, giả sử G là đồ thị phẳng tối đại và $f \in F(G)$ là một mặt nào đó; kí hiệu $H := G[f]$.

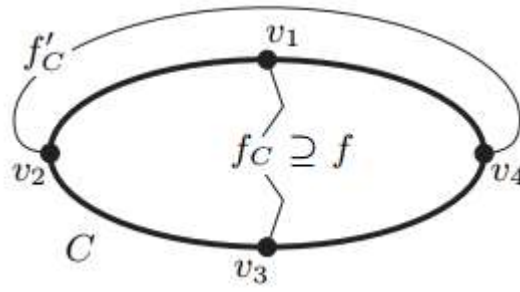
Nhận thấy rằng G là đồ thị phẳng tối đại, nên $G[H]$ phải là một đồ thị đầy đủ: nếu hai đỉnh nào đó trong H không liên hợp với nhau trong G thì có thể nối chúng lại với nhau bằng một đường gấp khúc chạy dọc qua mặt f ; điều này mở rộng G thành một đồ thị phẳng mới “lớn hơn” G , mâu thuẫn với tính tối đại của G .

Do đó, $G[H] = K_n$ với chỉ số n sẽ được xác định cụ thể sau.

Nhận thấy rằng H sẽ chứa một chu trình nào đó: nếu H là một rừng thì $f \cup H = \mathbb{R}^2$ (điều này suy ra từ Kết quả 4.2.3), nên $G = H$; điều này mâu thuẫn với việc $G \setminus H \neq \emptyset$ (nếu $n \geq 3$ thì $K_n \subseteq G$, còn nếu $n \in \{1, 2\}$ thì $|G| \geq 3$).

Nếu có thể chứng minh được rằng $n \leq 3$ thì $H = K_3$, điều này làm hoàn tất phép chứng minh của bài toán; giả sử $n \geq 4$, $C = v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ là một chu trình nào đó chứa trong $G[H](= K_n)$.

Nhận thấy rằng do $C \subseteq G$ nên mặt f được chứa trong một mặt f_C nào đó của chu trình C ; kí hiệu f'_C là mặt còn lại của C . Do v_1 và v_3 là các đỉnh nằm trên biên của mặt f nên chúng có thể được nối với nhau bởi một đường gấp khúc nằm trên mặt f_C và tránh qua G . Như vậy, cạnh $v_2 v_4$ của $G[H]$ sẽ chạy dọc trên mặt f'_C thay vì chạy dọc trên mặt f_C .



Lập luận tương tự, do v_2, v_4 nằm trên biên $G[f]$ nên cạnh v_1v_3 sẽ chạy dọc trên mặt f'_C .

Điều này mâu thuẫn với Bổ đề 4.1.2 ii), do các cạnh v_1v_3 và v_2v_4 phân biệt với nhau. $\square$

Sau đây, ta sẽ giới thiệu một kết quả kinh điển được trình bày trong hầu hết các tài liệu hoặc giáo trình hiện đại nói về lý thuyết đồ thị hoặc lý thuyết topo hình học. Kết quả này được phát biểu lần đầu tiên vào năm 1752 bởi nhà toán học Euler. Nó biểu diễn mối liên hệ giữa số đỉnh, số cạnh và số mặt chứa trong một đồ thị phẳng:

Kết quả 4.2.7. (Công thức Euler)

Cho trước đồ thị phẳng liên thông G với n đỉnh, m cạnh và l mặt.

Khi đó, $n - m + l = 2$.

Trong trường hợp nếu đồ thị có thể được nhúng vào một loại mặt khác với mặt phẳng thì ta vẫn có được công thức tương tự như công thức Euler như trên. Tuy nhiên, giá trị của tổng lúc này sẽ không còn là 2 nữa. Giá trị này không phụ thuộc vào cấu trúc của đồ thị mà ta khảo sát mà nó chỉ phụ thuộc vào cấu trúc của mặt được nhúng vào, giá trị này sẽ khác nhau cho từng loại mặt và nó được dùng như một chỉ số đặc trưng cho từng loại mặt – đặc trưng Euler.

Chứng minh kết quả 4.2.7.

Để chứng minh tính đúng đắn của công thức Euler, ta cố định chỉ số n và thực hiện quy nạp toán học theo chỉ số m .

Nhận thấy rằng nếu $m \leq n - 1$ thì G là một cây và $m = n - 1$ (G là một đồ thị liên thông), nên khẳng định của bài toán là hiển nhiên (điều này suy ra từ Kết quả 4.2.3).

Không giảm tính tổng quát của bài toán có thể giả sử rằng $m \geq n$.

Khi đó, G có chứa một cạnh e nằm trên một chu trình nào đó; kí hiệu $G' := G - e$.

Từ Bổ đề 4.2.1 ii), e nằm trên biên của chính xác hai mặt f_1, f_2 của G ; kí hiệu $f_{1,2} := f_1 \cup e \cup f_2$.

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_{1,2}\}. \quad (*)$$

Thật vậy, giả sử $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$. Từ Bổ đề 4.2.1 i), $G[f] \subseteq G \setminus e^0 = G'$, nên f cũng là một mặt của G' . Hiển nhiên f không thể bằng $f_{1,2}$, nên $f \in F(G') \setminus \{f_{1,2}\}$.

Ngược lại, giả sử $f' \neq f_{1,2}$ là một mặt nào đó của G' .

Nhận thấy rằng e nằm trên biên của cả hai mặt f_1 và f_2 nên có thể nối hai điểm bất kì nằm trên mặt $f_{1,2}$ bằng một đường gấp khúc nằm trong $\mathbb{R}^2 \setminus G'$, nghĩa là $f_{1,2}$ nằm trong một mặt $f'_{1,2}$ nào đó của G' . Từ giả thiết $f' \neq f_{1,2}$, $f' \not\subseteq f_{1,2}$: nếu $f' \subseteq f_{1,2} \subseteq f'_{1,2}$ thì $f' = f_{1,2} = f'_{1,2}$; kí hiệu x là một điểm nào đó

nằm trong $f' \setminus f_{1,2}$. Do đó, x nằm trong một mặt $f \neq f_1, f_2$ của G . Nhắc lại rằng f cũng là một mặt của G' . Như vậy $x \in f \cap f'$ nên $f = f'$, nghĩa là $f' \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$. Điều này hoàn tất phép chứng minh khẳng định (*).

Nhận thấy rằng e^0 phải nằm trên một mặt nào đó của G' nhưng nó sẽ không thể nằm trên bất kì mặt nào của G , nên mặt này chỉ có thể là $f_{1,2}$. Hơn nữa, G có nhiều hơn G' đúng một mặt (điều này suy ra từ khẳng định (*)).

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của khẳng định bài toán cho đồ thị G (suy ra từ việc áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán cho đồ thị G' và G có nhiều hơn G' đúng một số cạnh). $\square$

Hệ quả 4.2.8.

Mọi đồ thị phẳng với $n \geq 3$ đỉnh chứa tối đa $3n - 6$ cạnh. Hơn nữa, mọi đồ thị triangular phẳng với $n \geq 3$ đỉnh đều chứa chính xác $3n - 6$ cạnh.

Chứng minh hệ quả 4.2.8.

Để chứng minh tính đúng đắn của hệ quả trên chỉ cần kiểm tra lại tính đúng đắn của khẳng định thứ hai là đủ (suy ra từ Kết quả 4.2.6):

“Giả sử G một đồ thị triangular phẳng. Do mọi mặt biên của nó đều chứa chính xác ba cạnh còn mọi cạnh đều nằm trên biên của chính xác hai mặt khác nhau (suy ra từ Bổ đề 4.2.1), nên đồ thị lưỡng phân xây dựng trên tập đỉnh $E(G) \cup F(G)$ với tập cạnh $\{ef | e \subseteq G[f]\}$ tương ứng sẽ chứa chính xác $2|E(G)| = 3|F(G)|$ cạnh. Nếu trong công thức Euler thay l bởi $\frac{2m}{3}$ thì $m = 3n - 6$.” $\square$

Công thức Euler cũng giúp ta nhận ra khi nào thì một đồ thị không có tính phẳng.

Để có một ví dụ minh họa trực quan cho cách áp dụng công thức Euler, ta sẽ chứng minh tính không phẳng của K_5 :

“Nếu K_5 là đồ thị phẳng thì nó chỉ chứa tối đa $3 \cdot 5 - 6 = 9$ cạnh (suy ra từ Hệ quả 4.2.8). Nhưng nó chứa tới $10 > 9$ cạnh, nên nó không thể là một đồ thị phẳng.”

Nếu hiệu chỉnh lại một cách hợp lí các lập luận trong chứng minh nêu trên thì ta cũng có thể dễ dàng chỉ ra được tính không phẳng của $K_{3,3}$ như sau:

“Từ Kết quả 4.2.5), mọi mặt biên của $K_{3,3}$ đều được bao bởi một chu trình có độ dài ≥ 4 (suy ra từ việc $K_{3,3}$ là đồ thị 2 – liên thông nhưng không chứa tam giác). Áp dụng phương pháp lập luận nêu chứng minh của Hệ quả 4.2.8), $2m \geq 4l$, nên nếu vào công thức Euler thì $m \leq 2n - 4$. Nếu $K_{3,3}$ là đồ thị phẳng thì nó chỉ có thể chứa tối đa $2 \cdot 6 - 4 = 8$ cạnh. Nhưng trên thực tế nó chứa tới $9 > 8$ cạnh, nên nó không thể là một đồ thị phẳng.”

Nhận thấy rằng mọi ước con của K_5 (hoặc $K_{3,3}$) cũng không thể là một đồ thị phẳng nên:

Hệ quả 4.2.9.

Mọi đồ thị phẳng đều không thể chứa phần bù topo có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$).

Đáng ngạc nhiên hơn nữa là chiều đảo của khẳng định này cũng đúng. Trong mục 4.4) ta sẽ chứng minh rằng một đồ thị bất kì cho trước có thể biểu diễn trên mặt phẳng khi và chỉ khi nó không chứa bất kì phần bù topo nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$).

Nhắc lại rằng mọi mặt biên trong một đồ thị 2 – liên thông đều là một chu trình, nên mọi mặt biên trong một đồ thị 3 – liên thông cũng đều có dạng chu trình. Các chu trình này có những tính chất tổ hợp rất đáng quan tâm như sau:

Kết quả 4.2.10.

Mọi mặt biên chứa trong một đồ thị phẳng 3 – liên thông đều được bao bởi một chu trình khung không tách được. Ngược lại, mọi chu trình khung không tách được chứa trong một đồ thị phẳng

Chứng minh kết quả 4.2.10.

Giả sử G là một đồ thị phẳng 3 – liên thông và C là một chu trình nào đó chứa trong G .

Nếu C là một đồ thị khung không tách được hai mặt của chu trình thì hai mặt biên của nó không thể đồng thời chứa các điểm của $G \setminus C$ (suy ra từ định lý Jordan), nên nó phải là đường biên của một mặt nào đó chứa trong G .

Ngược lại, giả sử C là đường biên của một mặt f nào đó.

Khi đó, C là một chu trình (suy ra từ Kết quả 4.2.5).

Nếu C chứa một dây cung $e = xy$ thì các thành phần liên thông của $C - \{x, y\}$ được nối với nhau bởi một $C -$ đường đi nào đó chứa trong G (do G là đồ thị 3 – liên thông). Đường đi này và cạnh e cùng chạy dọc qua một mặt biên của C (mặt biên này khác f) nhưng chúng lại không hề giao nhau, mâu thuẫn với khẳng định ii) trong Bổ đề 4.1.2).

Phần việc còn lại là chỉ ra rằng C không tách bất kì hai đỉnh x, y nào chứa trong $G - C$.

Nhận thấy rằng hai đỉnh x, y được nối với nhau bởi chính xác ba đường đi độc lập chứa trong G (suy ra từ định lý Menger). Rõ ràng là f sẽ phải nằm trong một mặt nào đó tạo bởi ba đường đi độc lập này và mặt này lại bao bởi đúng hai trong số ba đường đi. Như vậy, đường đi thứ ba sẽ phải tránh qua f nên nó cũng sẽ tránh qua đường biên C , đpcm. $\square$

4.3. Biểu diễn

Phép nhúng vào mặt phẳng (hoặc **phép nhúng phẳng**) của đồ thị G là một phép đẳng cấu giữa G và một đồ thị phẳng $\tilde{G}$ nào đó. G được gọi là một **đồ thị khả phẳng**. $\tilde{G}$ được gọi là một **biểu diễn** của G .

Nhận thấy rằng do tính đẳng cấu của phép nhúng nên có thể đồng nhất cách kí hiệu giữa các đỉnh và các cạnh của G và $\tilde{G}$.

Đầu tiên ta sẽ khảo sát những đặc trưng cơ bản dùng để phân biệt hai phép nhúng của cùng một đồ thị khả phẳng. Để giải quyết được vấn đề này, đầu tiên ta phải có nêu ra được một cách quy ước nhất định về việc khi nào thì hai phép nhúng có thể được coi là tương đương nhau: chẳng hạn, nếu hợp một phép nhúng phẳng cho trước với phép lật mặt phẳng một góc 180° thì phép nhúng phẳng thu được sẽ rất khó để có thể được tính như một phép nhúng phẳng mới so với phép nhúng phẳng ban đầu.

Để xây dựng một cơ sở lập luận chặt chẽ, ta sẽ đưa ra 3 cách khác nhau để định nghĩa tính tương đương giữa hai đồ thị phẳng (đây thật ra là sự hiệu chỉnh lại định nghĩa về tính tương đương của lớp các đồ thị tổng quát cho lớp các đồ thị phẳng) và xem xét mối quan hệ giữa các cách định nghĩa này.

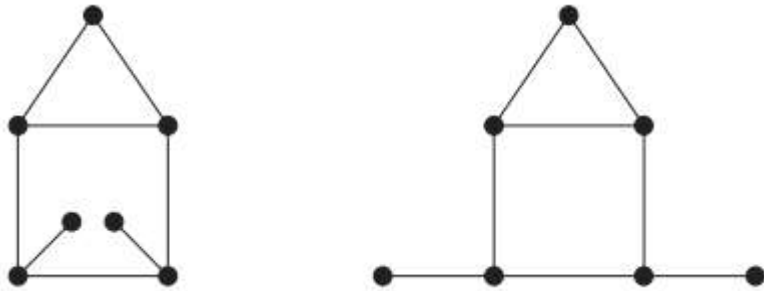
Cho trước $G = (V, E), G' = (V', E')$ là hai đồ thị phẳng với $F := F(G), F' := F(G')$ lần lượt là tập tất cả các mặt tương ứng của chúng.

Nhắc lại rằng nếu hai đồ thị phẳng G, G' đẳng cấu với nhau và $\sigma: V \rightarrow V'$ là một phép đẳng cấu nào đó giữa chúng thì ta có thể mở rộng σ thành một song ánh $V \cup E \mapsto V' \cup E'$ biến V thành V' và E thành E' (mở rộng này thu được bằng cách bổ sung thêm tương ứng $xy \mapsto \sigma(x)\sigma(y)$ vào). Phép biến đổi này bảo toàn tính liên thuộc (và tính không liên thuộc) giữa các đỉnh và các cạnh của G và G' . Như vậy, định nghĩa thứ nhất về tính tương đương giữa hai đồ thị phẳng sẽ có dạng như sau:

Đẳng cấu σ gây ra bởi một ánh xạ đồng phôi từ mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ thì σ được gọi là **đẳng cấu topo**.

Nhằm tránh những khó khăn gây ra khi xét mặt ngoài của G và G' , ta sẽ sử dụng ánh xạ đồng phôi $\pi: S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nêu trong mục 4.1) để tạm thời “chuyển” bài toán về xét trên mặt cầu S^2 , nên định nghĩa trên sẽ được điều chỉnh lại dưới dạng:

Đẳng cấu σ giữa hai đồ thị phẳng G và G' được gọi là **đẳng cấu topo** nếu tồn tại một phép đồng phôi $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ sao cho ánh xạ thu hẹp của $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ trên $V \cup E$ trùng với đẳng cấu σ .



Hình vẽ minh họa hai đồ thị phẳng tương đương nhau theo nghĩa thông thường nhưng không tương đương nhau theo nghĩa topo.

Nhận thấy rằng nếu hai đồ thị phẳng G và G' tương đương nhau qua một phép đẳng cấu topo σ nào đó thì việc phân biệt mặt trong và mặt ngoài giữa chúng thực sự không còn cần thiết nữa: nếu chọn phép đồng phôi φ một cách phù hợp sao cho ánh xạ ngược π^{-1} biến một điểm nằm trong một mặt trong nào đó của G thành điểm cực bắc $(0,0,1)$ của mặt cầu S^2 thì ánh xạ ψ sẽ biến phần còn lại của mặt này thành mặt ngoài của G' .

Nhận thấy thêm rằng nếu σ là một đẳng cấu topo thì ánh xạ ψ tương ứng với nó cũng sẽ biến các mặt nằm trong G thành các mặt nào đó nằm trong G' (ngoại trừ cặp điểm không xác định của hai ánh xạ ψ và ψ^{-1}). Như vậy, σ có thể được mở rộng thành song ánh $\sigma: V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$ và song ánh này bảo toàn tính liên thuộc giữa các đỉnh, các cạnh và các mặt.

Tính chất đặc biệt này cung cấp gợi ý hữu ích cho ta trong việc xây dựng định nghĩa thứ hai về tính tương đương giữa các đồ thị phẳng:

Đẳng cấu σ giữa hai đồ thị phẳng G và G' được gọi là **đẳng cấu tổ hợp** nếu nó có thể mở rộng được thành song ánh $\sigma: V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$ và song ánh này bảo toàn tính liên thuộc giữa các đỉnh, các cạnh và các mặt.



Hình vẽ minh họa hai đồ thị phẳng tương đương nhau theo nghĩa tổ hợp nhưng không tương đương nhau theo nghĩa topo.

Nhận thấy rằng nếu σ là một đẳng cấu tổ hợp giữa hai đồ thị phẳng G và G' thì nó sẽ biến các mặt biên trong G thành các mặt biên trong G' .

Khẳng định này gợi ý cho ta cách xây dựng định nghĩa thứ ba về tính tương đương giữa các đồ thị phẳng:

Đẳng cấu σ giữa hai đồ thị phẳng G và G' được gọi là **đẳng cấu đồ thị** nếu $\{\sigma(G[f]): f \in F\} = \{G'[f']: f' \in F'\}$.

Theo cách xây dựng định nghĩa về tính tương đương nêu trên, khi cần kiểm tra tính tương đương giữa hai đồ thị phẳng cho trước ta không cần phải quan tâm quá nhiều đến việc mặt nào đang bị giới hạn bởi đồ thị con đang xét nữa. Điều cần quan tâm đến ở đây đó là: “Liệu đồ thị con này có giới hạn mặt nào hay không, và đồ thị này biến thành đồ thị con nào qua đẳng cấu σ ?”.

Đầu tiên, định nghĩa thứ ba này có vẻ xuất hiện một cách thiếu tự nhiên hơn so với hai cách định nghĩa đã nêu trước đó. Nhưng do trong hầu hết các trường hợp cách định nghĩa này là hoàn toàn tương đương với hai cách định nghĩa đã giới thiệu trước đó và dạng hình thức của nó cũng yếu hơn so với hai cách định nghĩa trước nên ta có thể kiểm tra tính tương đương dễ dàng hơn. Điều này mang đến lợi ích thiết thực hơn cho ta.

Nhắc lại rằng mọi đẳng cấu topo đều là đẳng cấu tổ hợp, và mọi đẳng cấu tổ hợp đều là đẳng cấu đồ thị. Khẳng định sau đây sẽ chỉ ra rằng trong hầu hết các trường hợp thì chiều ngược lại của những khẳng định nêu trên cũng đúng:

Kết quả 4.3.1.

i) Mọi đẳng cấu đồ thị giữa hai đồ thị phẳng đều là đẳng cấu topo.

Hơn nữa, phép mở rộng đẳng cấu này thành một song ánh giữa tập các mặt của hai đồ thị phẳng là duy nhất khi và chỉ khi hai đồ thị này không có chứa chu trình.

ii) Mọi đẳng cấu tổ hợp giữa hai đồ thị phẳng 2 – liên thông đều là đẳng cấu topo.

Chứng minh kết quả 4.3.1.

Giả sử $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ là hai đồ thị phẳng cho trước.

Đặt $F := F(G)$, $F' := F(G')$, $\sigma: V \cup E \rightarrow V' \cup E'$ là một phép đẳng cấu nào đó giữa hai đồ thị này.

i) Nhận thấy rằng nếu G là một chu trình thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên (suy ra từ định lý Jordan).

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử G không phải là một chu trình.

Kí hiệu $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ lần lượt là tập tất cả các đường biên bao quanh các mặt chứa trong G và G' .

Khi đó, nếu σ là một đẳng cấu đồ thị thì ánh xạ $H \mapsto \sigma(H)$ là một song ánh giữa $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$.

Nhận thấy rằng ánh xạ $f \mapsto G[f]$ là một song ánh giữa F và $\mathcal{H}$ (suy ra từ Bổ đề 4.2.4). Điều tương tự cũng đúng cho F' và $\mathcal{H}'$. Nếu kết hợp ba song ánh lại với nhau thì sẽ thu được một song ánh mới giữa F và F' .

Theo cách xây dựng trên, song ánh này đóng vai trò là một phép mở rộng của σ lên $V \cup E \cap F$ bảo toàn tính liên thuộc giữa các đỉnh, các cạnh và các mặt; nên σ cũng là một đẳng cấu tổ hợp giữa G và G' .

ii) Giả sử G, G' là các đồ thị phẳng 2 – liên thông còn σ là một đẳng cấu tổ hợp giữa hai đồ thị G, G' .

Nhận thấy rằng nếu tồn tại một ánh xạ đồng phôi $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ biến mọi $\pi^{-1}(x)$ thành $\pi^{-1}(\sigma(x))$, trong đó x là một đỉnh (hoặc cạnh) bất kì nào đó chứa trong G thì tính đúng đắn của khẳng định ii) là hiển nhiên. Ngược lại nếu khẳng định ii) là đúng thì cũng sẽ tồn tại một ánh xạ đồng phôi $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ như trên, nên chỉ cần xây dựng được một ánh xạ φ thỏa mãn các tính chất như trên là hoàn tất được phép chứng minh. $\square$

Ý tưởng tự nhiên để xây dựng một ánh xạ φ như trên là mở rộng dần từ một ánh xạ đồng phôi cho trước nào đó trên tập các đỉnh lên tập các cạnh và sau cùng là mở rộng nó trên toàn mặt cầu S^2 :

Nhắc lại rằng σ là một đẳng cấu tổ hợp giữa G, G' , nên $\tilde{\sigma} := \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$ sẽ là một song ánh bảo toàn tính liên thuộc giữa các đỉnh, các cạnh và các mặt giữa hai đồ thị $\tilde{G} := \pi^{-1}(G)$, $\tilde{G}' = \pi^{-1}(G')$.

$$\begin{array}{ccc} S^2 \supseteq \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{G}' \subseteq S^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 \supseteq G & \xrightarrow{\sigma} & G' \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Hình vẽ minh họa việc xây dựng song ánh

Bằng cách đặt $\varphi(x) := \tilde{\sigma}(x)$ với mọi $x \in V(\tilde{G})$, φ sẽ là một ánh xạ đồng phôi giữa $V(\tilde{G})$ và $V(\tilde{G}')$.

Qua phép đẳng cấu σ , mỗi cạnh xy trong $\tilde{G}$ sẽ biến thành cạnh $\tilde{\sigma}(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ tương ứng chứa trong $\tilde{G}'$. Như vậy, nếu hợp tất cả các phép tương ứng này lại thành một ánh xạ duy nhất thì kết quả thu được sẽ là một phép mở rộng của ánh xạ φ lên $\tilde{G} := (V(\tilde{G}), E(\tilde{G}))$. Thật vậy, tất cả những gì ta cần làm chỉ là kiểm tra lại tính liên tục của phép mở rộng này tại các đỉnh của đồ thị (nơi mà những phép tương ứng thành phần bị trùng lên nhau nên có thể xảy ra sự gián đoạn).

Việc kiểm tra lại tính đúng đắn của sự kiện này được thực hiện một cách dễ dàng bằng cách sử dụng giả thiết về sự tương ứng giữa hai đồ thị G và G' . Mỗi cạnh riêng lẻ của hai đồ thị này đều có cấu trúc của một không gian topo con trong $\mathbb{R}^3$.

Sau cùng, ta sẽ mở rộng ánh xạ đồng phôi $\varphi: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ này lên toàn mặt cầu S^2 . Những sự kiện đã xảy ra trong bước mở rộng trước cũng sẽ diễn ra khi xem xét mối quan hệ giữa các mặt của G và G' nên để thu được phép mở rộng cần tìm ta sẽ làm như sau:

Giả sử f là một mặt nào đó trong $\tilde{G}$ với C là đường biên thì $\tilde{\sigma}(C) = \cup\{\tilde{\sigma}(e)|e \in E(C)\}$ và $\tilde{\sigma}(C)$ sẽ là đường biên tương ứng của mặt $\tilde{\sigma}(f)$ trong $\tilde{G}'$ (suy ra từ việc đường biên của tất cả các mặt chứa trong $\tilde{G}$ và $\tilde{G}'$ đều là các chu trình).

Như vậy, bằng cách áp dụng Kết quả 4.1.4), ánh xạ đồng phôi $\varphi: C \rightarrow \tilde{\sigma}(C)$ sẽ được mở rộng thành một ánh xạ đồng phôi mới từ $C \cup f$ vào $\tilde{\sigma}(C) \cup \tilde{\sigma}(f)$. Nếu hợp tất cả các phép tương ứng này lại thành một ánh xạ duy nhất thì kết quả thu được chính là ánh xạ đồng phôi $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ cần tìm.

Việc kiểm tra tính liên tục của ánh xạ đồng phôi này là tương đối đơn giản nên sẽ được giản lược. □

Như vậy, ta đã xem xét mối liên hệ giữa các cách định nghĩa khác nhau cho tính tương đương cho lớp các đồ thị phẳng. Kế tiếp, ta xem xét đến tính tương đương giữa các phép nhúng phẳng của cùng một đồ thị cho trước:

Phép nhúng phẳng σ_1 và σ_2 của đồ thị G được gọi là **tương đương topo** (hoặc **tương đương tổ hợp**) nếu $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ là một phép đẳng cấu topo (hoặc phép đẳng cấu tổ hợp) giữa $\sigma_1(G)$ và $\sigma_2(G)$.

Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị 2 – liên thông thì hai cách định nghĩa nêu trên là đồng nhất với nhau (suy ra từ Kết quả 4.3.1), nên chỉ cần gọi các phép nhúng này là **tương đương** là đủ.

Định nghĩa về tính tương đương giữa các phép nhúng phẳng như trên xác định một quan hệ tương đương trên lớp các phép nhúng phẳng của cùng một đồ thị cho trước.

Nhận thấy thêm rằng các phép nhúng của cùng một đồ thị có thể không tương đương nhau nhưng biểu diễn phẳng của chúng lại có thể đẳng cấu topo (hoặc đẳng cấu tổ hợp) với nhau: tính tương đương của các phép nhúng không thể khẳng định được sự tồn tại của đẳng cấu topo (hoặc đẳng cấu tổ hợp) giữa ảnh của chúng mà chỉ biết được rằng $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ là đẳng cấu topo (hoặc đẳng cấu tổ hợp).

Kết quả 4.3.2. (Whitney)

Mọi phép nhúng của cùng một đồ thị khả phẳng 3 – liên thông đều tương đương nhau.

Chứng minh kết quả 4.3.2.

Giả sử G là một đồ thị khả phẳng với $\sigma_1: G \rightarrow G_1, \sigma_2: G \rightarrow G_2$ là các phép nhúng nào đó của nó.

Để chứng minh hai phép nhúng σ_1, σ_2 tương đương nhau, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ là một đẳng cấu đồ thị (suy ra từ Kết quả 4.3.1).

Điều này tương đương với việc ta chỉ ra được tính đúng đắn của khẳng định:

“Điều kiện cần và đủ để $\sigma_1(C)$ là đường biên của một mặt nào đó chứa trong G_1 là $\sigma_2(C)$ cũng là đường biên của một mặt nào đó chứa trong G_2 , trong đó C là một đồ thị con bất kì của đồ thị G .”

Tuy nhiên, tính đúng đắn của khẳng định này có thể được suy ra dễ dàng từ Kết quả 4.2.10. □

4.4. Định lí Kuratowski – Wagner về tính khả phẳng của đồ thị

Trong phần mục này của bài viết ta sẽ trình bày các lập luận và phân tích để đi đến lời giải cho câu hỏi quan trọng sau:

“Một đồ thị phải thỏa mãn những điều kiện gì để nó là một đồ thị khả phẳng?”

Một số khái niệm cơ bản cần nắm:

- Đồ thị được gọi là **khả phẳng** nếu nó đẳng cấu với một đồ thị phẳng nào đó, tức là nó có thể nhúng được vào trong mặt phẳng;
- Đồ thị được gọi là **khả phẳng tối đại** nếu nó là một đồ thị khả phẳng và không thể bổ sung thêm cạnh mới mà thu được một đồ thị mới vẫn khả phẳng.

Nhắc lại, nếu một đồ thị là khả phẳng thì nó sẽ không thể chứa bất kì phần bù topo nào có dạng K_5 hoặc $K_{3,3}$ (suy ra từ Hệ quả 4.2.9). Ngược lại, nếu một đồ thị không chứa phần bù topo nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$) thì nó sẽ là một đồ thị khả phẳng.

Đây chính là nội dung của định lí Kuratowski – Wagner – một kết quả nổi tiếng trong lý thuyết đồ thị hiện đại nói về điều kiện khả phẳng của một đồ thị:

Kết quả 4.4.1. (Kuratowski – Wagner)

Tính đúng đắn của các khẳng định sau tương đương với nhau cho mọi đồ thị G :

- G là một đồ thị khả phẳng;
- G không chứa phần bù nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$);
- G không chứa phần bù topo nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$).

Đầu tiên, ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của định lí Kuratowski – Wagner cho các phần bù topo sẽ tương đương với tính đúng đắn định lí Kuratowski – Wagner cho các phần bù (đây chính là định lí Kuratowski cổ điển):

Kết quả 4.4.2.

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị không chứa phần bù nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$) chính là nó cũng sẽ không chứa phần bù topo nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$).

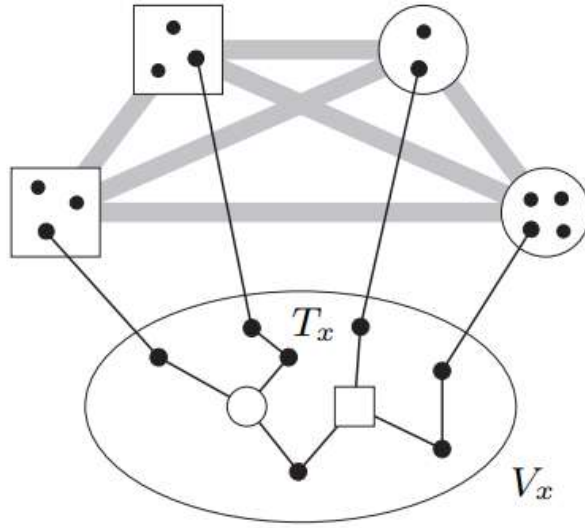
Chứng minh kết quả 4.4.2.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu một đồ thị G có chứa một phần bù có dạng K_5 thì hoặc nó cũng sẽ chứa một phần bù topo có dạng K_5 hoặc nó sẽ chứa một phần bù có dạng $K_{3,3}$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.7.2).

Giả sử $G \supseteq K_5$ và K là đồ thị con tối tiểu của G sao cho $K = MK_5$.

Nhận thấy rằng mọi tập nhánh của K đều cảm sinh một cây con nào đó trong K còn hai tập nhánh bất kì của K luôn được nối với nhau bởi một cạnh duy nhất. Như vậy, nếu chọn một cây con cảm sinh bởi một tập nhánh V_x nào đó và bổ sung thêm bốn cạnh nối nó với các tập nhánh khác như có nói đến ở trên thì ta sẽ thu được một cây con T_x mới.

Từ tính chất tối tiểu của đồ thị K , T_x chứa chính xác 4 lá (chính là 4 đỉnh lán giềng của V_x nằm trong các tập nhánh khác).



Mọi MK_5 đều sẽ chứa TK_5 hoặc $MK_{3,3}$.

Nếu tất cả năm cây T_x đều là $TK_{1,4}$ thì K chính là TK_5 , tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên.

Nếu có một trong năm cây T_x không phải là $TK_{1,4}$ thì nó sẽ chứa chính xác hai đỉnh nào đó có bậc bằng 3. Nếu thực hiện phép co tập nhánh V_x về hai đỉnh nêu trên và mọi tập nhánh khác về thành một đỉnh duy nhất thì ta sẽ thu được một đồ thị với chính xác 6 đỉnh có chứa $K_{3,3}$, nghĩa là $G \geq K_{3,3}$. $\square$

Tiếp theo, ta chứng minh tính đúng đắn của định lý Kuratowski cho lớp các đồ thị 3 – liên thông. Điều này đóng vai trò như “trái tim” của toàn bộ chứng minh: tính đúng đắn của định lý Kuratowski trong trường hợp tổng quát sẽ được suy ra dễ dàng hơn từ khẳng định này.

Bổ đề 4.4.3.

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị 3 – liên thông G khả phẳng là G không chứa phân bù nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$).

Chứng minh bổ đề 4.4.3.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên ta chỉ cần sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo $|G|$:

Nhận thấy rằng nếu $|G| = 4$ thì $G = K_4$, nên tính đúng đắn của khẳng định trong trường hợp này là hiển nhiên.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử $|G| > 4$ và tính đúng đắn của khẳng định đã được kiểm chứng với mọi đồ thị có bậc nhỏ hơn $|G|$. Nhận thấy rằng G sẽ chứa một cạnh xy sao cho G/xy cũng là một đồ thị 3 – liên thông. G/xy cũng không chứa phân bù nào có dạng K_5 (hoặc $K_{3,3}$). (suy ra từ tính chất bắc cầu của việc lấy phân bù)

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán ta dễ dàng suy ra rằng G/xy cũng là một đồ thị khả phẳng, nghĩa là G/xy có một biểu diễn $\tilde{G}$ trên mặt phẳng.

Đặt:

f là mặt nằm trong $\tilde{G} - v_{xy}$ có chứa đỉnh v_{xy} , C là đường biên của mặt f ;

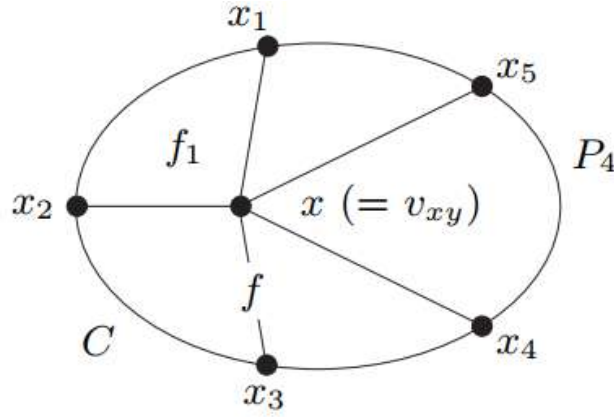
$X := N_G(x) \setminus \{y\}, Y := N_G(y) \setminus \{x\}$.

Khi đó, $XUY \subseteq V(C)$ (suy ra từ giả thiết $v_{xy} \in f$) và $\tilde{G}' := \tilde{G} - \{v_{xy}v | v \in Y \setminus X\}$ là một biểu diễn của $G - y$ trên mặt phẳng trong đó điểm v_{xy} là biểu diễn của đỉnh x .

Nhận thấy rằng $\tilde{G} - v_{xy}$ là một đồ thị 2 – liên thông (suy ra từ giả thiết $\tilde{G}$ là một đồ thị 3 – liên thông), nên C là một chu trình (suy ra từ Kết quả 4.2.5).

Giả sử $x_1, \dots, x_k$ là tất cả các đỉnh của C nằm trong X , $P_i := x_i \dots x_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k$) là X – đường đi nối đỉnh x_i với đỉnh x_{i+1} trong C (quy ước: $x_{k+1} := x_1$).

Nhận thấy rằng, với mỗi chỉ số i , tập $C \setminus P_i$ được chứa trong một mặt nào đó gây ra bởi chu trình $C_i := xx_iP_ix_{i+1}x$; kí hiệu f_i là mặt còn lại của chu trình C_i .



Hình ảnh minh họa.

Khi đó, $f_i \subseteq f$ (điều này suy ra từ việc mặt f_i chứa những điểm thuộc mặt f nhưng không chứa bất kì điểm nào thuộc chu trình C).

Mặt khác, với mọi chỉ số $j \notin \{i, i + 1\}$, cạnh xx_j chỉ giao với chu trình C_i tại điểm x và cạnh xx_j này cũng không nằm trong mặt f_i (suy ra từ việc đầu mút x_j của cạnh xx_j nằm trên $C \setminus P_i$) nên f_i sẽ không giao với bất kì cạnh xx_j nào trong số các cạnh này. Như vậy, $f_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{G}'$. Điều này có nghĩa là mỗi mặt f_i đều được chứa trong một mặt nào đó của $\tilde{G}'$.

Nhận thấy rằng nếu tồn tại một chỉ số i sao cho $Y \subseteq V(P_i)$ thì ta sẽ nhận được một biểu diễn phẳng của G (biểu diễn phẳng này thu được từ $\tilde{G}'$ bằng cách nhúng đỉnh y vào trong mặt f_i và nối đỉnh y với các đỉnh láng giềng của nó bởi các đường gấp khúc nằm trong mặt f_i).

Không mất tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử rằng không tồn tại chỉ số i nào như trên.

Giả sử $Y \not\subseteq X$. Nếu y có một đỉnh láng giềng nằm trong một tập P_i^0 nào đó thì nó cũng sẽ có một đỉnh láng giềng khác nằm trong tập $C - P_i$. Như vậy, G sẽ chứa $TK_{3,3}$ (tạo thành từ các đỉnh nhánh x, y, x_i, x_{i+1} và hai đỉnh láng giềng nêu trên của y), mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Như vậy, $Y \subseteq X$. Nhận thấy rằng nếu $|Y| = |Y \cap X| \geq 3$ thì G sẽ chứa TK_5 , mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. Do đó, $|Y| \leq 2$. Hơn nữa, $d(y) \geq \kappa(G) \geq 3$, nên $|Y| = 2$. Mặt khác, do hai đỉnh của Y không thể cùng nằm chung trong P_i nên G sẽ chứa $TK_{3,3}$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. $\square$

Điều làm cho chứng minh trên nổi bật lên so với các cách chứng minh khác của định lí Kuratowski là nó có thể được điều chỉnh lại một cách dễ dàng để tạo ra biểu diễn phẳng từ một đồ thị cho trước sao cho mọi mặt trong của biểu diễn này đều là các tập lồi và mọi cạnh của đồ thị đều được biểu diễn bởi các đường gấp khúc.

Nhận thấy rằng tính chất 3 – liên thông được đề cập đến ở đây là điều cần thiết: biểu diễn của một đồ thị khả phẳng 2 – liên thông không nhất thiết phải có tất cả các mặt trong đều là các tập lồi.

Về mặt nguyên tắc, phép chứng minh của định lý Kuratowski sẽ được hoàn tất nếu ta có thể kiểm chứng được tính đúng đắn của định lý trong trường hợp $\kappa(G) \in \{0,1,2\}$ (do tính đúng đắn của định lý cho trường hợp 3 – liên thông đã được kiểm chứng trong Kết quả 4.4.3).

Giả sử rằng $G = G_1 \cup G_2$ với $V(G_1 \cap G_2) = \{x, y\}$.

Nhận thấy rằng:

- 1) Nếu G không chứa TK_5 (hoặc $TK_{3,3}$) thì $G_1 + xy$ và $G_2 + xy$ không thể chứa TK_5 (hoặc $TK_{3,3}$).
- 2) Biểu diễn của $G + xy$ sẽ thu được từ việc tổ hợp lại các biểu diễn của $G_1 + xy$ và $G_2 + xy$.

Điều này gợi ý rằng phép chứng minh trong trường hợp $\kappa(G) \in \{0,1,2\}$ sẽ được thực hiện bằng cách tái tổ hợp lại các biểu diễn phẳng từ các đồ thị thành phần.

Mặc dù đã có được sự định hướng rõ ràng như vậy nhưng nếu áp dụng trực tiếp lối lập luận chỉ dựa hoàn toàn vào những tính chất hình học cơ bản như trên thì ta sẽ phải đối mặt với những khó khăn không thể tránh khỏi về mặt kỹ thuật và chứng minh sẽ rất dài dủ là đối với những trường hợp đơn giản nhất.

Để giải quyết vấn đề này ta chỉ cần sử dụng những kết quả tương đương với nhận xét trên nhưng mang nhiều yếu tố tổ hợp hơn để thay thế nhằm làm giảm tính phức tạp của vấn đề:

Bổ đề 4.4.4.

Giả sử G là một đồ thị cho trước sao cho $\kappa(G) \in \{0,1,2\}$; G_1, G_2 là các đồ thị con khung của G sao cho $G = G_1 \cup G_2$ và $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$; kí hiệu $\mathcal{X}$ là một tập hợp gồm các đồ thị 3 – liên thông nào đó.

Khi đó, nếu G là một đồ thị tối đại – cạnh không chứa phần bù topo nào nằm trong $\mathcal{X}$ thì G_1, G_2 cũng là các đồ thị tối đại – cạnh không chứa phần bù topo nào nằm trong $\mathcal{X}$ và $G_1 \cap G_2 = K_2$.

Chứng minh kết quả 4.4.4.

Nhận thấy rằng mỗi thành phần liên thông của $G_i - S$ ($i = 1,2$) đều chứa ít nhất một đỉnh lán giềng của $v \in S := V(G_1 \cap G_2)$: ngược lại tập $S \setminus \{v\}$ sẽ tách đồ thị G , mâu thuẫn với $|S| = \kappa(G)$.

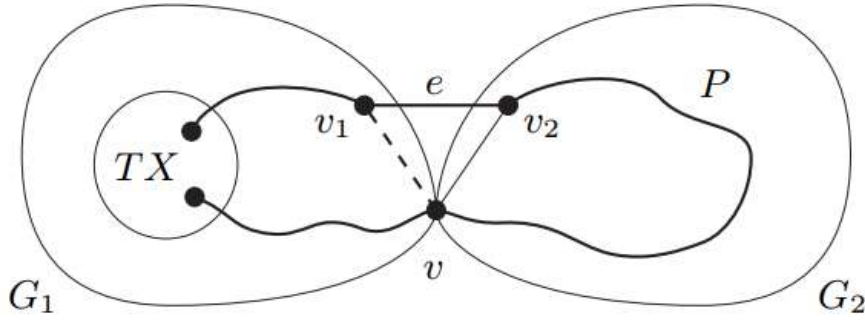
Từ tính tối đại – cạnh của đồ thị G , mọi cạnh e được thêm vào G đều nằm trong một $TX \subseteq G + e$ nào đó với $X \in \mathcal{X}$. Hơn nữa, với mọi cách bổ sung cạnh e , tính chất 3 – liên thông của X luôn kéo theo việc các đỉnh nhánh của TX cùng nằm trong một đồ thị G_i nào đó.

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng các đỉnh nhánh của TX đều cùng nằm trong đồ thị G_1 (điều này suy ra từ tính chất đối xứng của vị trí đặt của cạnh e so với G_1 và G_2).

Khi đó, giao (nếu có) của TX với G_2 sẽ có dạng là một đường đi P nào đó.

Nếu $S = \emptyset$ thì, bằng cách bổ sung thêm cạnh e với một đầu mút nằm trong G_1 và đầu mút còn lại nằm trong G_2 , $G + e$ sẽ là một đồ thị không chứa phần bù topo nào nằm trong $\mathcal{X}$, mâu thuẫn với tính tối đại – cạnh của G .

Nếu $S = \{v\}$ thì, bằng cách bổ sung thêm cạnh $e = v_1 v_2$ với đầu mút v_1 là đỉnh lán giềng của v trong $G_1 - S$ và đầu mút v_2 là đỉnh lán giềng của v trong $G_2 - S$, đường đi $P \subseteq G + e$ sẽ chứa cả đỉnh v và cạnh $v_1 v_2$; nên nếu thay thế đường đi $v P v_1$ bởi cạnh $v v_1$ thì ta sẽ thu được một TX mới nằm hoàn toàn trong $G_1 \subseteq G$, mâu thuẫn với tính tối đại – cạnh của G . Do đó, $|S| = 2$, $S = \{x, y\}$.



Hình vẽ minh họa.

Giả sử $xy \notin S$. Nhận thấy rằng nếu bổ sung thêm cạnh $e := xy$ vào G và thay thế cạnh e bởi một $x - y$ đường đi nào đó chứa trong G_2 , thì ta sẽ thu được một TX mới nằm hoàn toàn trong G , mâu thuẫn với tính tối đại – cạnh của G . Do đó, $xy \in G$, $G[S] = K_2$.

Phần việc còn lại là chứng minh G_1 và G_2 là các đồ thị tối đại – cạnh không chứa phân bù topo nào nằm trong $\mathcal{X}$:

Nếu bổ sung thêm cạnh e' vào G_1 thì, nếu cần thiết cách thay thế đường đi xPy bởi cạnh xy , ta sẽ thu được một TX hoặc nằm trong $G_1 + e'$ hoặc nằm trong G_2 . Tuy nhiên, nếu TX nằm trong $G_2 \subseteq G$, mâu thuẫn với tính tối đại – cạnh của G . Điều này chỉ ra tính tối đại – cạnh của G_1 .

Lập luận tương tự ta cũng chứng minh được tính tối đại – cạnh của G_2 . □

Bổ đề 4.4.5.

Giả sử G là một đồ thị tối đại – cạnh không chứa $TK_5, TK_{3,3}$ và $|G| \geq 4$.

Khi đó, G là một đồ thị 3 – liên thông.

Chứng minh bổ đề 4.4.5.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định nêu trên, ta chỉ cần sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo $|G|$.

Nếu $|G| = 4$ thì $G = K_4$, nên khẳng định nêu trên là hiển nhiên.

Giả sử $|G| > 4$, G là một đồ thị tối đại – cạnh không chứa TK_5 và $TK_{3,3}$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử thêm rằng $\kappa(G) \in \{0, 1, 2\}$ và G_1, G_2 là các đồ thị con như trong giả thiết của Bổ đề 4.4.4).

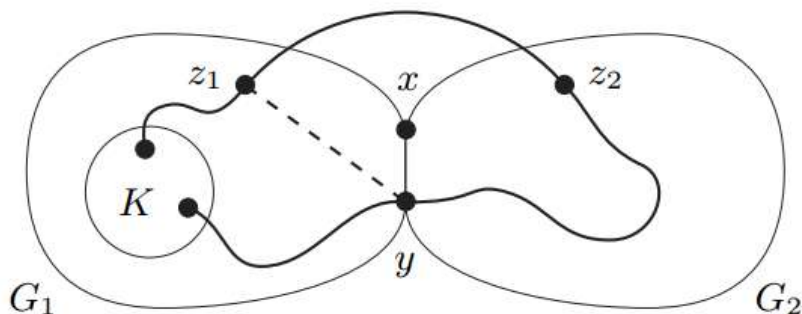
Bằng cách áp dụng Bổ đề 4.4.4) cho $G = G_1 \cup G_2$ và $\mathcal{X} := \{K_5, K_{3,3}\}$, G_1, G_2 sẽ là các đồ thị khả phẳng và $G_1 \cap G_2 = K_2$; kí hiệu x, y là hai đỉnh của K_2 .

Kí hiệu:

f_i là mặt chứa trong biểu diễn phẳng của G_i có cạnh xy nằm trên đường biên của nó;

$z_i \neq x, y$ là một đỉnh bất kì nằm trên đường biên của f_i ;

K là đồ thị con TK_5 (hoặc $T_{3,3}$) chứa trong $G + z_1z_2$.



Hình vẽ minh họa.

Nhận xét rằng nếu tập các đỉnh nhánh của K đều nằm trong G_i thì hoặc $G_i + xz_i$ hoặc $G_i + yz_i$ hoặc G_i sẽ chứa TK_5 (hoặc $T_{3,3}$) (điều này phụ thuộc vào việc đỉnh z_i liên hợp với x hay y hay với cả hai đỉnh này), mâu thuẫn với Hệ quả 4.2.9) (do $G_i, G_i + xz_i, G_i + yz_i$ đều là các đồ thị phẳng).

Hơn nữa đồ thị $G + z_1z_2$ không thể chứa một hệ gồm 4 đường đi độc lập giữa $(G_1 - G_2)$ và $(G_2 - G_1)$. (điều này suy ra từ việc cả hai đồ thị con $(G_1 - G_2)$ và $(G_2 - G_1)$ đều không chứa đỉnh nhánh nào của TK_5 cũng như không chứa hai đỉnh nhánh nào của $TK_{3,3}$)

Khi đó, K chính là đồ thị $TK_{3,3}$ và chỉ có duy nhất một đỉnh nhánh của nó là nằm trong $G_2 - G_1$; kí hiệu v là đỉnh nhánh của K nằm trong $G_2 - G_1$. Như vậy, $G_1 + v + \{vx, vy, vz_1\}$ là một đồ thị phẳng nhưng có chứa $TK_{3,3}$, mâu thuẫn với Hệ quả 4.2.9). $\square$

Chứng minh kết quả 4.4.1.

Tính đúng đắn của khẳng định được suy ra từ sự kết hợp Hệ quả 4.2.9) và Kết quả 4.4.2) với Bổ đề 4.4.3) và 4.4.5). $\square$

Hệ quả 4.4.6.

Mọi đồ thị khả phẳng tối đại G với $|E(G)| \geq 4$ đều là 3 – liên thông.

Chứng minh hệ quả 4.4.6.

Tính đúng đắn của khẳng định được suy ra từ sự kết hợp giữa Bổ đề 4.4.5) và Kết quả 4.4.1). $\square$

4.5. Điều kiện đại số cho tính khả phẳng của một đồ thị

Trong mục này của bài viết ta sẽ chứng minh rằng tính khả phẳng của một đồ thị có thể được đặc trưng hoàn toàn bởi cấu trúc đại số của không gian chu trình của nó. Những kết quả có sự kết nối xa như vậy thường là rất hiếm. Chúng mang một ý nghĩa quan trọng không thể bàn cãi được dù rằng chúng ta chưa thể tìm ra được những ứng dụng cụ thể của chúng. Cụ thể, chúng cung cấp cho ta nhiều hướng tiếp cận giải quyết vấn đề khác nhau trong lý thuyết đồ thị. Những hướng tiếp cận này có thể được chuyển đổi linh hoạt lẫn nhau trong những trường hợp cần thiết. Điều này hứa hẹn sẽ mang lại cho ta những thông tin quan trọng về các cấu trúc cơ bản của một đồ thị.

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$. Tập con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}(G)$ với mỗi phần tử là một tập hợp các cạnh nào đó của G được gọi là **tập đơn** nếu mọi cạnh của đồ thị G chỉ thuộc tối đa hai phần tử của $\mathcal{F}$.

Kết quả 4.5.1. (MacLane)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là khả phẳng là không gian chu trình của nó phải chứa một cơ sở đơn.

Chứng minh kết quả 4.5.1.

Nhận thấy rằng nếu G có bậc ≤ 2 thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên nên chỉ cần xét các G có bậc ≥ 3 là đủ.

Nhận thấy rằng nếu $\kappa(G) \leq 1$ thì G sẽ là hợp của hai đồ thị con khung G_1, G_2 với $|G_1 \cap G_2| \leq 1$; không gian chu trình $\mathcal{C}(G)$ sẽ là tổng trực tiếp của hai không gian chu trình $\mathcal{C}(G_1)$ và $\mathcal{C}(G_2)$; $\mathcal{C}(G)$ có một cơ sở đơn khi và chỉ khi $\mathcal{C}(G_1)$ và $\mathcal{C}(G_2)$ đều có một cơ sở đơn; G là khả phẳng khi và chỉ khi G_1, G_2 cũng là khả phẳng (điều này có thể được suy ra từ định lý Kuratowski hoặc nó cũng có thể được suy ra từ một lập luận hình học đơn giản). Điều này cũng chỉ ra rằng nếu có thể kiểm tra được tính đúng đắn của khẳng định cho G_1 và G_2 thì tính đúng đắn của khẳng định cho G sẽ là hiển nhiên.

Không mất tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử rằng G là một đồ thị 2 – liên thông.

Giả sử G là một đồ thị khả phẳng và xét một biểu diễn phẳng nào đó của G . Từ Bổ đề 4.2.5), mọi đường biên của G đều là các chu trình, nên chúng là các phần tử của $\mathcal{C}(G)$.

Nhận thấy rằng nếu có thể chỉ ra được rằng các đường biên này sinh ra tất cả các chu trình trong G thì $\mathcal{C}(G)$ sẽ chứa một cơ sở đơn theo Bổ đề 4.2.1).

Giả sử $C \subseteq G$ là một chu trình bất kì và f là mặt trong của nó. Từ Bổ đề 4.2.1), mọi cạnh e với $e^0 \subseteq f$ nằm trên chính xác hai đường biên $G[f']$ với $f' \subseteq f$ và mọi cạnh của C nằm trên chính xác một đường biên $G[f']$. Do đó, tổng của tất cả các đường biên $G[f']$ này chính là chu trình C .

Ngược lại, giả sử $\{C_1, \dots, C_k\}$ là một cơ sở đơn của không gian $\mathcal{C}(G)$.

Khi đó, với mọi cạnh $e \in E(G)$, $\mathcal{C}(G - e)$ cũng có một cơ sở đơn.

Thật vậy, nếu cạnh e chỉ thuộc duy nhất một tập C_i , giả sử là tập C_1 , thì $\{C_2, \dots, C_k\}$ chính là cơ sở đơn cần tìm của $\mathcal{C}(G - e)$; nếu cạnh e thuộc về chính xác hai tập C_i , giả sử là hai tập C_1 và C_2 , thì $\{C_1 + C_2, C_3, \dots, C_k\}$ chính là cơ sở đơn cần tìm của $\mathcal{C}(G - e)$.

Như vậy, không gian chu trình của mọi đồ thị con của G đều có chứa một cơ sở đơn.

Nhận thấy rằng nếu có thể chỉ ra không gian chu trình của K_5 và $K_{3,3}$ không chứa bất kì cơ sở đơn nào (nên không gian chu trình của các ước con của K_5 và $K_{3,3}$ cũng không thể chứa bất kì cơ sở đơn nào) thì G không thể chứa TK_5 hoặc $TK_{3,3}$, nên G là sẽ một đồ thị khả phẳng (điều này suy ra từ định lý Kuratowski).

Giả sử $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_6\}$ là một cơ sở đơn nào đó của $\mathcal{C}(K_5)$ (từ Kết quả 1.9.6, $\dim \mathcal{C}(K_5) = 6$);

kí hiệu $C_0 := C_1 + \dots + C_6$.

Nhận thấy rằng $C_0, \dots, C_6$ là các tập khác rỗng (điều này suy ra từ việc $\mathcal{B}$ là một hệ độc lập tuyến tính), nên mỗi tập C_i chứa tối thiểu 3 cạnh (điều này suy ra từ Kết quả 1.9.2).

Do đó,

$$\begin{aligned} 18 = 6 \cdot 3 &\leq |C_1| + \dots + |C_6| \\ &\leq 2\|K_5\| - |C_0| \\ &\leq 2 \cdot 10 - 3 = 17. \end{aligned}$$

(đánh giá thứ hai suy ra từ việc mọi cạnh của C_0 thuộc chính xác một tập nào đó của hệ $C_1, \dots, C_6$)

Giả sử $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_4\}$ là một cơ sở đơn nào đó của $\mathcal{C}(K_{3,3})$ (từ Kết quả 1.9.6, $\dim \mathcal{C}(K_{3,3}) = 6$);
kí hiệu $C_0 := C_1 + \dots + C_4$.

Nhận thấy rằng mỗi tập C_i đều chứa tối thiểu 4 cạnh (điều này suy ra từ việc $g(K_{3,3}) = 4$).

Do đó,

$$\begin{aligned} 16 = 4 \cdot 4 &\leq |C_1| + \dots + |C_4| \\ &\leq 2\|K_{3,3}\| - |C_0| \\ &\leq 2 \cdot 9 - 4 = 14. \end{aligned}$$

Điều mâu thuẫn trong hai lập luận trên đã chỉ ra tính đúng đắn của định lí MacLane. □

Kết quả 4.5.2. (Tutte)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là khả phẳng là mọi cạnh của đồ thị này thuộc tối đa không quá hai chu trình khung không tách.

Chứng minh kết quả 4.5.2.

Chiều thuận của khẳng định trên được suy ra từ Kết quả 4.2.10) và Bổ đề 4.2.1). Chiều đảo của khẳng định được suy ra từ Kết quả 3.2.3) và Kết quả 4.5.1). □

4.6. Tính đối ngẫu phẳng

Trong phần còn lại của bài viết sẽ sử dụng Định lí MacLane để chứng minh một số kết quả cơ bản của khái niệm **đối ngẫu phẳng** – một sự kết nối khác giữa tính phẳng của đồ thị và cấu trúc đại số.

Đa đồ thị phẳng là một cặp $G = (V, E)$ (các phần tử của tập V được gọi là các đỉnh, các phần tử của tập E được gọi là các cạnh) thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;
- ii) Mọi cạnh của đa đồ thị phẳng đều là một đường gấp khúc nối giữa hai đỉnh;
- iii) Phần trong của một cạnh bất kì không chứa bất kì đỉnh nào và cũng không chứa bất kì điểm nào nằm trong các cạnh khác.

Cho trước đa đồ thị phẳng $G = (V, E)$; kí hiệu $F := F(G)$. **Đối ngẫu phẳng G^* của G** là một đa đồ thị (V^*, E^*) với mỗi đỉnh của G^* là một điểm bất kì nằm trong mỗi mặt của G và hai đỉnh của G^* được nối với nhau theo quy tắc:

- i) Nếu cạnh $e \in E$ liên thuộc với hai mặt $f_1, f_2 \in F$ thì nối hai đỉnh $v^*(f_1), v^*(f_2) \in V^*$ tương ứng với hai mặt $f_1, f_2 \in F$ với nhau bởi một cạnh $e^* \in E^*$ nằm bắt chéo cạnh e ;
- ii) Nếu cạnh $e \in E$ liên thuộc với mặt $f \in F$ thì thêm cạnh khuyên $e^* \in E^*$ vào đỉnh $v^*(f) \in V^*$ tương ứng với mặt $f \in F$ sao cho nó bắt chéo cạnh e .

Nhận thấy rằng đối ngẫu phẳng của một đa đồ thị phẳng cũng là một đa đồ thị phẳng, nên định nghĩa trên có thể được diễn đạt lại dưới dạng sau:

Cho trước hai đa đồ thị phẳng $G = (V, E)$ và $G^* = (V^*, E^*)$; kí hiệu $F := F(G)$ và $F^* := F(G^*)$.

Đa đồ thị G^* được gọi là **đối ngẫu phẳng** của G nếu tồn tại các song ánh

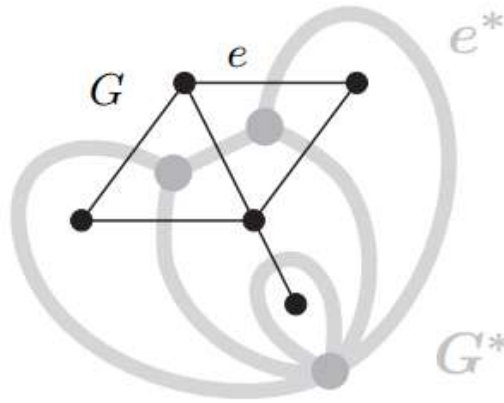
$$\begin{array}{lll} F \longrightarrow V^* & E \longrightarrow E^* & V \longrightarrow F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) Với mọi $f \in F$, $v^*(f) \in f$;
- ii) Với mọi $e \in E$, $|e^* \cap G| = |e^* \cap e^\circ| = |e \cap G^*| = 1$;
- iii) Với mọi $v \in V$, $v \in f^*(v)$.

Một số nhận xét cơ bản về khái niệm đối ngẫu phẳng:

- Nếu tồn tại các song ánh như trên thì cả G và G^* đều là các đa đồ thị liên thông. Hơn nữa, mọi đa đồ thị phẳng liên thông G đều có ít nhất một đối ngẫu phẳng G^* . (chọn ngẫu nhiên một điểm $v^*(f)$ trong mỗi mặt $f \in F$ làm đỉnh của G^* và nối các đỉnh của G^* bởi các đường gấp khúc thỏa mãn điều kiện ii) nêu trong định nghĩa)
- Đối ngẫu phẳng G^* của G là duy nhất, nghĩa là nếu G_1^* và G_2^* là hai đối ngẫu phẳng của G thì $G_1^* \simeq G_2^*$. (ánh xạ $v_1^*(f) \mapsto v_2^*(f)$ chính là đẳng cấu topo cần tìm giữa G_1^* và G_2^*)
- Đa đồ thị G chính là đối ngẫu phẳng của G^* . (các ánh xạ ngược của các song ánh trong định nghĩa đối ngẫu phẳng của G chính là các song ánh cần tìm trong định nghĩa đối ngẫu phẳng của G^* : $f^*(v^*(f)) := f, e^*(e^*(e)) := e, v^*(f^*(v)) := v$)



Hình ảnh minh họa.

Khái niệm đối ngẫu phẳng đóng vai trò như một cầu nối tự nhiên giữa hai khái niệm chu trình và lát cắt trong một đa đồ thị phẳng:

Kết quả 4.6.1.

Cho trước đa đồ thị phẳng G .

Khi đó, $E \subseteq E(G)$ là tập cạnh của một chu trình trong G khi và chỉ khi tập $E^* := \{e^* | e \in E\} \subseteq E(G^*)$ là một lát cắt cực tiểu trong G^* .

Chứng minh kết quả 4.6.1.

Nhận thấy rằng $v^*(f_1)$ và $v^*(f_2)$ nằm trong cùng một thành phần liên thông của $G^* - E^*$ khi và chỉ khi f_1 và f_2 nằm trong cùng một miền của $\mathbb{R}^2 \setminus \cup E$. (mọi $v^*(f_1) - v^*(f_2)$ đường đi trong $G^* - E^*$ đều là một đường gấp khúc nối giữa f_1 và f_2 trong $\mathbb{R}^2 \setminus \cup E$; mọi đường gấp khúc P ($P \cap V(G) = \emptyset$) đều xác định một đường đi trong $G^* - E^*$ giữa $v^*(f_1)$ và $v^*(f_2)$)

Giả sử $C \subseteq G$ là một chu trình và $E = E(G)$.

Khi đó, $G^* - E^*$ chứa chính xác hai thành phần liên thông (điều này suy ra từ Định lý Jordan và nhận xét thu được ở trên), nên E^* là một lát cắt cực tiểu trong G^* .

Ngược lại, nếu E^* là một lát cắt trong G^* thì E sẽ chứa một chu trình $C \subseteq G$ (điều này suy ra từ Kết quả 4.2.3 và nhận xét thu được ở trên). Hơn nữa, nếu E^* là một lát cắt cực tiểu trong G^* thì E không thể chứa thêm bất kì cạnh nào nữa, nên $E = E(C)$. $\square$

Nhận thấy rằng khẳng định trên có thể được tổng quát lên cho lớp các đồ thị tổng quát bằng cách mở rộng khái niệm đối ngẫu phẳng như sau:

“Đồ thị G^* được gọi là **đối ngẫu** của đồ thị G nếu $E(G^*) = E(G)$ ”.

Khi đó, mọi lát cắt cực tiểu trong G^* cũng sẽ là tập cạnh của một chu trình nào đó trong G .

Kết quả 4.6.2.

Cho trước đồ thị G .

Khi đó, không gian lát cắt của G^* trùng với không gian chu trình của G , nghĩa là $\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G)$.

Chứng minh kết quả 4.6.2.

Nhận thấy rằng $\mathcal{C}^*(G^*)$ là một không gian con của $\mathcal{E}(G^*) = \mathcal{E}(G)$ sinh bởi các lát cắt cực tiểu trong G^* (điều này suy ra từ Bổ đề 1.9.4). Theo Kết quả 4.6.1), chúng chính là tập cạnh của các chu trình trong G , và chúng đóng vai trò như tập sinh của không gian chu trình $\mathcal{C}(G)$ trong $\mathcal{E}(G)$. $\square$

Sau cùng, ta sẽ trình bày thêm một kết quả quan trọng khác của nhà toán học Whitney giải thích mối liên hệ giữa tính khả phẳng và khái niệm đối ngẫu của cùng một đồ thị:

Kết quả 4.6.3. (Whitney)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là khả phẳng là nó có ít nhất một đối ngẫu.

Chứng minh kết quả 4.6.3.

Giả sử cho trước đồ thị khả phẳng G . Nếu G là một đồ thị phẳng thì mỗi thành phần liên thông C của G đều có một đối ngẫu phẳng C^* ; kí hiệu G^* là hợp của tất cả các đối ngẫu phẳng C^* .

Khi đó, hợp của tất cả các tập lát cắt cực tiểu của các C^* chính là tập lát cắt cực tiểu của G^* . Từ Kết quả 4.6.1), các lát cắt cực tiểu này cũng chính là tập cạnh của các chu trình trong G , nên G^* là một đối ngẫu của G .

Ngược lại, nếu G có một đối ngẫu G^* thì $\mathcal{C}^*(G^*)$ cũng sẽ có một cơ sở đơn (điều này suy ra từ các Kết quả 4.5.1) và 4.6.2)). Do đó, G sẽ là một đồ thị khả phẳng (điều này suy ra từ Định lý MacLane). $\square$