

Phép tính vi phân hàm nhiều biến

Trương Phước Nhân, 06/05/2023

Khái niệm về đạo hàm của một hàm một biến không thực sự có một dạng tương tự đơn độc cho các hàm nhiều biến. Thật vậy, đối với một hàm hai (hoặc nhiều) biến, chúng ta có thể có rất nhiều dạng đạo hàm khác nhau tùy thuộc vào việc chúng ta chọn khảo sát một biến nào đó trong số các biến hoặc chọn di chuyển theo một hướng cụ thể hoặc muốn xem xét bức tranh một cách tổng thể. Hai quan điểm đầu tiên dẫn chúng ta đến khái niệm về đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng, trong khi quan điểm cuối cùng dẫn chúng ta đến một khái niệm hơi trừu tượng hơn về tính khả vi và, đến lượt mình, nó lại dẫn chúng ta đến khái niệm về đạo hàm toàn phần. Chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng trong mục **1. Khái niệm đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng**, chứng minh một số tính chất cơ bản bao gồm hai dạng tương tự riêng biệt của định lý giá trị trung bình và một phiên bản của Công thức Taylor bằng cách sử dụng đạo hàm có hướng bậc cao. Trong mục **2. Tính khả vi**, chúng ta sẽ nghiên cứu khái niệm về tính khả vi và chứng minh lại phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn. Chúng ta có thể nhận xét rằng bất cứ khi nào chúng ta muốn bỏ qua khái niệm trừu tượng về tính khả vi thì chúng ta luôn có thể thay thế nó, bất cứ khi nào chúng ta thực hiện việc vi phân, bởi một điều kiện mạnh hơn một chút nhưng thực dụng hơn về sự tồn tại và tính liên tục của đạo hàm riêng. (Kết quả 2.4) Như vậy, chúng ta có thể bỏ qua tất cả các kết quả trong mục **2. Tính khả vi**, có lẽ ngoại trừ phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn. Một số kết quả chính có liên quan đến các hàm khả vi hai biến như phiên bản cổ điển của Công thức Taylor và Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp sẽ được thảo luận trong mục **3. Định lý giá trị trung bình và Công thức Taylor**. Kế tiếp, trong mục **4. Tính đơn điệu, tính lồi, tính lõm**, chúng ta sẽ xem xét lại các khái niệm về tính đơn điệu, tính song đơn điệu, tính lồi, tính lõm đã được giới thiệu trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và liên hệ chúng với các đạo hàm riêng. Cuối cùng, trong mục **5. Phép tính vi phân hàm ba biến**, chúng ta sẽ phác thảo một cách ngắn gọn cách mà một số kết quả được thảo luận trong các phần trước có thể được mở rộng cho các hàm ba biến và thảo luận các khái niệm về mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến, điều này có thể được hiểu rõ hơn trong ngữ cảnh của các mặt cong được xác định ngầm bởi các hàm ba biến.

1. Khái niệm đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng

Đầu tiên, chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm về đạo hàm của một hàm một biến. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D , nghĩa là, $(c - r, c + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó.

Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là **khả vi tại c** nếu giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

tồn tại; trong trường hợp này, giá trị của giới hạn này sẽ được kí hiệu lại bởi $f'(c)$ và được gọi là **đạo hàm của f tại c** .

Bây giờ, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D , nghĩa là, $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Đối với một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, có vẻ sẽ rất tự nhiên khi chúng ta xem xét một giới hạn chẳng hạn như

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{(h, k)}.$$

Nhưng điều này là không hợp lý bởi vì một lý do đơn giản là phép chia một số thực cho một điểm trong $\mathbb{R}^2$ là không được xác định. Có rất nhiều cách khác nhau để chúng ta có thể giải quyết vấn đề này nhưng chúng lại không đặc biệt dễ dàng và chúng ta sẽ tạm hoãn việc thảo luận về khái niệm khả vi đối với các hàm hai (hoặc nhiều) biến ở phần sau của bài viết. Hiện tại, chúng ta có thể nhận thấy rằng việc lựa chọn khảo sát một biến nào đó trong số các biến sẽ khiến mọi việc trở nên dễ dàng hơn và dẫn đến một khái niệm thật sự hữu ích.

Đạo hàm riêng

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Cố định một điểm $(x_0, y_0) \in D$ và xét các tập $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ xác định bởi $D_1 = \{x \in \mathbb{R}: (x, y_0) \in D\}$ và $D_2 = \{y \in \mathbb{R}: (x_0, y) \in D\}$.

Nếu x_0 là một điểm trong của D_1 thì chúng ta sẽ định nghĩa **đạo hàm riêng của f theo x tại (x_0, y_0)** là giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

miễn là giới hạn này tồn tại. Nó thường được kí hiệu lại bởi $f_x(x_0, y_0)$.

Tương tự, nếu y_0 là một điểm trong của D_2 thì chúng ta sẽ định nghĩa **đạo hàm riêng của f theo y tại (x_0, y_0)** là giới hạn

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

miễn là giới hạn này tồn tại. Nó thường được kí hiệu lại bởi $f_y(x_0, y_0)$.

Các đạo hàm riêng này còn được gọi là **các đạo hàm riêng cấp một của f tại (x_0, y_0)** hoặc đơn giản là **các đạo hàm riêng cấp một**.

Chúng thường được kí hiệu bởi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

thay thế lần lượt cho $f_x(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0)$.

Nếu các đạo hàm riêng này tồn tại thì cặp $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ sẽ được gọi là **gradient của f tại (x_0, y_0)** và được kí hiệu bởi $\nabla f(x_0, y_0)$.

Như vậy,

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ đo tốc độ thay đổi của f tại (x_0, y_0) dọc theo trục x , trong khi $f_y(x_0, y_0)$ đo tốc độ thay đổi của f tại (x_0, y_0) dọc theo trục y . Trên thực tế, việc tìm đạo hàm riêng của f theo x sẽ tương đương với việc coi đạo hàm của $f(x, y)$ như là một hàm của x và coi y như một hằng số. Thật vậy, nếu

$\phi: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm một biến xác định bởi $\phi(x) = f(x, y_0)$ thì ϕ sẽ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi đạo hàm riêng của f theo x tại (x_0, y_0) tồn tại; trong trường hợp này, $f_x(x_0, y_0) = \phi'(x_0)$. Tương tự, nếu $\psi: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm xác định bởi $\psi(y) = f(x_0, y)$ với $y \in D_2$ thì ψ sẽ khả vi tại y_0 khi và chỉ khi đạo hàm riêng của f theo y tại (x_0, y_0) tồn tại; trong trường hợp này, $f_y(x_0, y_0) = \psi'(y_0)$. Như một hệ quả, chúng ta có thể nhận thấy rằng đạo hàm riêng của tổng, tích vô hướng, tích, nghịch đảo, căn cũng đều sở hữu các tính chất giống như đạo hàm của các hàm một biến. Hơn nữa, do tính khả vi sẽ bao hàm tính liên tục của các hàm một biến nên chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu tồn tại các đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0) thì ϕ sẽ liên tục tại x_0 và ψ sẽ liên tục tại y_0 . Tuy nhiên, sự tồn tại của cả hai đạo hàm riêng tại một điểm sẽ không bao hàm tính liên tục tại điểm đó.

Tương tự với đạo hàm bên trái và bên phải trong phép tính một biến, chúng ta cũng sẽ có các khái niệm về đạo hàm riêng bên trái và bên phải tại các điểm gần giống với các đầu mút của một khoảng trong $\mathbb{R}$. Như trước đây, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Cố định một điểm $(x_0, y_0) \in D$ và xét các tập $D_1 = \{x \in \mathbb{R}: (x, y_0) \in D\}$ và $D_2 = \{y \in \mathbb{R}: (x_0, y) \in D\}$.

Nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho $(x_0 - r, x_0] \subseteq D_1$ thì chúng ta sẽ định nghĩa **đạo hàm riêng bên trái của f theo x tại (x_0, y_0)** là giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

miễn là giới hạn này tồn tại. Nó thường được kí hiệu lại bởi $(f_x)_-(x_0, y_0)$.

Mặt khác, nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho $[x_0, x_0 + r) \subseteq D_1$ thì đạo hàm riêng bên phải của f theo x tại (x_0, y_0) được định nghĩa như giới hạn ở trên với $h \rightarrow 0^-$ được thay thế bởi $h \rightarrow 0^+$. Nó thường được kí hiệu lại bởi $(f_x)_+(x_0, y_0)$.

Tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa các đạo hàm riêng bên trái và bên phải của f theo y tại (x_0, y_0) . Chúng sẽ được kí hiệu lần lượt lại bởi $(f_y)_-(x_0, y_0)$ và $(f_y)_+(x_0, y_0)$.

Trong trường hợp D là hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$, với mỗi $(x_0, y_0) \in D$, chúng ta sẽ có $D_1 = [a, b]$ và $D_2 = [c, d]$. Nếu $a < x_0 < b$ thì x_0 sẽ là một điểm trong của D_1 và rõ ràng đạo hàm riêng của f theo x tại (x_0, y_0) sẽ tồn tại khi và chỉ khi cả hai đạo hàm riêng bên trái và bên phải của f theo x tại (x_0, y_0) đều tồn tại và bằng nhau. Tương tự như vậy đối với các đạo hàm riêng theo y khi $c < y_0 < d$. Nếu $x_0 = a$ hoặc $x_0 = b$ thì x_0 sẽ không thể là một điểm trong của D_1 , nhưng đạo hàm riêng bên phải của f theo x tại (x_0, y_0) vẫn có thể được xác định khi $x_0 = a$, trong khi đạo hàm bên trái của f theo x tại (x_0, y_0) cũng có thể được xác định khi $x_0 = b$. Tương tự như vậy nếu $y_0 = c$ hoặc $y_0 = d$. Với quan điểm này, chúng ta sẽ nói rằng **đạo hàm riêng f_x của f tồn tại trên $[a, b] \times [c, d]$** nếu f_x tồn tại tại mỗi điểm của $(a, b) \times [c, d]$, $(f_x)_+$ tồn tại tại mỗi điểm của $\{a\} \times [c, d]$ và $(f_x)_-$ tồn tại tại mỗi điểm của $\{b\} \times [c, d]$. Trong trường hợp này, chúng ta đơn giản sẽ viết $f_x(a, y_0)$ để biểu thị $(f_x)_+(a, y_0)$ và $f_x(b, y_0)$ để biểu thị $(f_x)_-(b, y_0)$ với mọi $y_0 \in [c, d]$. Theo cách này, chúng ta sẽ thu được một hàm $f_x: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Một quy ước tương tự cũng đúng cho f_y .

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$. Khi đó, cả hai đạo hàm riêng của f đều tồn tại tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$; trên thực tế, $f_x(x_0, y_0) = 2x_0$ và $f_y(x_0, y_0) = 2y_0$ với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Khi đó, cả hai đạo hàm riêng của f đều tồn tại tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$ ngoại trừ gốc tọa độ; trên thực tế, với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ với $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$,

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \text{ và } f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Để kiểm tra xem có đạo hàm riêng nào tồn tại tại $(0, 0)$ hay không, chúng ta sẽ phải dùng đến định nghĩa. Điều này sẽ dẫn đến một giới hạn của thương $h/|h|$ khi h tiến đến 0. Rõ ràng, một giới hạn như vậy sẽ không tồn tại. Điều này chỉ ra rằng $f_x(0, 0)$ và $f_y(0, 0)$ không tồn tại.

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0, 0) = 0$ và $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ với $(x, y) \neq (0, 0)$. Khi đó, với mọi $h, k \in \mathbb{R}$ với $h \neq 0$ và $k \neq 0$, chúng ta sẽ có

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \text{ và } \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Như vậy, $f_x(0, 0)$ và $f_y(0, 0)$ tồn tại và đều bằng 0. Tuy nhiên, f không thể liên tục tại $(0, 0)$.

(iv) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = |x| + |y|$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Rõ ràng, f liên tục tại $(0, 0)$. Nhưng, với mọi $h, k \in \mathbb{R}$ với $h \neq 0$ và $k \neq 0$, chúng ta lại có

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h} \text{ và } \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \frac{|k|}{k}.$$

Như vậy, $f_x(0, 0)$ và $f_y(0, 0)$ không tồn tại. Tuy nhiên, các đạo hàm riêng bên trái và bên phải của f tại $(0, 0)$ lại tồn tại. Thật vậy, $(f_x)_+(0, 0) = (f_y)_+(0, 0) = 1$, trong khi $(f_x)_-(0, 0) = (f_y)_-(0, 0) = -1$. Mặt khác, nếu chúng ta kí hiệu g và h lần lượt là các phép thu hẹp của f trên các hình chữ nhật $[-1, 1] \times [0, 1]$ và $[0, 1] \times [-1, 1]$ thì, theo quy ước của chúng ta, $g_y(0, 0)$ và $h_x(0, 0)$ tồn tại và cả hai đều bằng 1.

Chúng ta đã thấy trong ví dụ (iii) ở trên rằng sự tồn tại của cả hai đạo hàm riêng sẽ không bao hàm tính liên tục. Tuy nhiên, thật dễ dàng để chúng ta có thể chỉ ra rằng nó sẽ bao hàm tính liên tục của mỗi biến trong số hai biến và, đồng thời, tính liên tục hai biến trong trường hợp một hoặc cả hai đạo hàm riêng đều bị chặn. Đối với trường hợp thứ hai, chúng ta sẽ cần sử dụng đến một kết quả cơ bản trong phép tính một biến thường được gọi là Định lý giá trị trung bình. Trước tiên, chúng ta hãy nhắc lại kết quả này. Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo Kết quả 2.4) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến (1)**”.

Kết quả 1. (Định lý giá trị trung bình)

Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$.

Khi đó, nếu hàm $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) thì sẽ tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho $\phi(b) - \phi(a) = \phi'(c)(b - a)$.

Kết quả 1.1.

Với mọi hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có:

- (i) Nếu f_x tồn tại trên $[a, b] \times [c, d]$ thì, với mỗi $y_0 \in [c, d]$ cố định, hàm từ $[a, b]$ vào $\mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ là liên tục.
- (ii) Nếu f_y tồn tại trên $[a, b] \times [c, d]$ thì, với mỗi $x_0 \in [a, b]$ cố định, hàm từ $[c, d]$ vào $\mathbb{R}$ xác định bởi $y \mapsto f(x_0, y)$ là liên tục.
- (iii) Nếu cả f_x và f_y đều tồn tại và một trong số chúng bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$ thì f sẽ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 1.1.

- (i) Cố định $y_0 \in [c, d]$. Sự tồn tại của $f_x(x_0, y_0)$ với mọi $x_0 \in [a, b]$ ngụ ý rằng hàm một biến xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ khả vi và, do đó, liên tục trên $[a, b]$.
- (ii) Phép chứng minh của (ii) được thực hiện tương tự như của (i) nêu ở trên.
- (iii) Giả sử cả f_x và f_y đều tồn tại và f_x bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$. Khi đó, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|f_x(u, v)| \leq \alpha$ với mọi $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$. Cố định $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ cho trước, theo Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1), chúng ta nhận thấy rằng sẽ tồn tại một số thực $u \in \mathbb{R}$ nằm giữa x và x_0 sao cho

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f_x(u, y)(x - x_0) \text{ và, do đó, } |f(x, y) - f(x_0, y)| \leq \alpha|x - x_0|.$$

Như vậy,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq \alpha|x - x_0| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|. \end{aligned}$$

Ngoài ra, các bất đẳng thức này rõ ràng sẽ đúng nếu $x = x_0$. Như vậy, theo quan điểm của (ii), $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0)$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Điều này chỉ ra rằng f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . $\square$

Đạo hàm có hướng

Khái niệm đạo hàm riêng có thể dễ dàng được khái quát hóa thành khái niệm **đạo hàm có hướng**, đo tốc độ thay đổi của một hàm tại một điểm dọc theo một hướng nhất định. Chúng ta sẽ chỉ định một hướng bằng cách chỉ định một vector đơn vị. Giả sử $u = (u_1, u_2)$ là một vector đơn vị trong $\mathbb{R}^2$, nên $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Ngoài ra, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ. Giả sử $(x_0, y_0) \in D$ sao cho D có chứa một đoạn thẳng đi qua (x_0, y_0) theo hướng của u , nghĩa là, 0 là một điểm trong của $D_0 = \{t \in \mathbb{R}: (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) \in D\}$. Chúng ta sẽ định nghĩa **đạo hàm có hướng của f tại (x_0, y_0) dọc theo u** là giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

miễn là giới hạn này tồn tại. Nó thường được kí hiệu lại bởi $D_u f(x_0, y_0)$.

Lưu ý rằng nếu $v = -u$ thì $D_v f(x_0, y_0) = -D_u f(x_0, y_0)$. Ngoài ra, lưu ý thêm rằng nếu $i = (1, 0)$ và $j = (0, 1)$ thì $D_i f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ và $D_j f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$. Với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, thương $[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)]/t$ sẽ bằng

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + tu_1)^2 + (y_0 + tu_2)^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{t} &= \frac{2tx_0u_1 + t^2u_1^2 + 2ty_0u_2 + t^2u_2^2}{t} \\ &= 2x_0u_1 + 2y_0u_2 + t. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại và bằng $2x_0u_1 + 2y_0u_2$. Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng $D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, thương $[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)]/t$ sẽ bằng

$$\frac{\sqrt{(x_0 + tu_1)^2 + (y_0 + tu_2)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{t} = \frac{2tx_0u_1 + 2ty_0u_2 + t^2}{t(\sqrt{(x_0 + tu_1)^2 + (y_0 + tu_2)^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}.$$

Điều này chỉ ra rằng nếu $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ thì $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại và

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{x_0u_1 + y_0u_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Như vậy, một lần nữa, chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng $D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ với $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Mặt khác, $D_u f(0, 0)$ không tồn tại, bởi vì không tồn tại giới hạn của thương $t/|t|$ khi t tiến đến 0.

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0, 0) = 0$ và $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ với $(x, y) \neq (0, 0)$. Với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, thương $[f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)]/t$ sẽ bằng $u_1^2u_2/(u_1^4t^2 + u_2^2)$.

Điều này chỉ ra rằng $D_u f(0, 0)$ tồn tại và

$$D_u f(0, 0) = \begin{cases} \frac{u_1^2}{u_2} & \text{nếu } u_2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } u_2 = 0. \end{cases}$$

Đặc biệt, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Như vậy, lúc này, chúng ta lại nhận thấy rằng $D_u f(0, 0) \neq f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2$, trừ khi $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$. Lưu ý rằng f sẽ không thể liên tục tại $(0, 0)$, mặc dù tồn tại tất cả các đạo hàm có hướng của f tại $(0, 0)$.

(iv) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = |x| + |y|$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Giả sử $u = (u_1, u_2)$ là một vector đơn vị bất kì. Khi đó, chúng ta sẽ có $|u_1| + |u_2| \neq 0$ và, với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$,

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{|t|}{t} (|u_1| + |u_2|).$$

Như vậy, $D_u f(0,0)$ sẽ không tồn tại. Lưu ý rằng rõ ràng f sẽ liên tục tại $(0,0)$, nhưng không tồn tại bất kì một đạo hàm có hướng nào của f tại $(0,0)$.

Bây giờ, chúng ta sẽ sử dụng khái niệm đạo hàm có hướng để tạo ra một dạng tương tự của Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1) trong trường hợp hai biến. Rõ ràng, nói một cách đại khái, một dạng tương tự như vậy sẽ chỉ ra rằng hiệu giữa các giá trị của một hàm tại hai điểm phân biệt luôn có thể biểu diễn lại dưới dạng tích của khoảng cách giữa hai điểm đó với giá trị của “đạo hàm” tại một điểm nào đó “nằm giữa” chúng. Để làm cho ý tưởng “nằm giữa” này trở nên chính xác, chúng ta chỉ cần giới hạn khảo sát trên đoạn thẳng nối giữa hai điểm phân biệt này và rõ ràng là khái niệm thích hợp về “đạo hàm” để xem xét ở đây là đạo hàm có hướng theo hướng của đoạn thẳng này. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ có khẳng định sau đây.

Kết quả 1.2. (Định lý giá trị trung bình hai biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và D° là phần trong của D . Giả sử $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ là các điểm phân biệt của D sao cho $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,1)\} \subseteq D^\circ$, trong đó $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ và $y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$. Giả sử $u = (u_1, u_2)$ là vector đơn vị xác định bởi $u = (u_1, u_2) = \frac{1}{r}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, trong đó $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho $D_u f$ tồn tại tại mỗi điểm của L .

Khi đó, tồn tại một điểm $(c, d) \in L$ sao cho $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = r D_u f(c, d)$.

Chứng minh kết quả 1.2.

Xét hàm $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$ với $t \in [0,1]$. Từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.1.3) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”, F liên tục trên $[0,1]$. Ngoài ra, với mọi $t_0 \in (0,1)$ cho trước và $t \in [0,1]$ với $t \neq t_0$, chúng ta sẽ có

$$x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) = x_0 + t_0(x_1 - x_0) + (t - t_0)(x_1 - x_0) = x(t_0) + (t - t_0)ru_1,$$

và, tương tự, $y(t) = y(t_0) + (t - t_0)ru_2$ nên, do đó,

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(x(t_0) + (t - t_0)ru_1, y(t_0) + (t - t_0)ru_2) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}.$$

Bằng cách nhân tử số và mẫu số của biểu thức bên phải với r , chúng ta nhận thấy rằng F sẽ khả vi tại t_0 và

$$F'(t_0) = r D_u f(x(t_0), y(t_0)).$$

Do đó, bằng cách áp dụng Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1) cho F , tồn tại một số thực $\theta \in (0,1)$ sao cho $F(1) - F(0) = (1 - 0)F'(\theta)$. Như vậy, $(c, d) = (x(\theta), y(\theta))$ sẽ là một điểm nằm trên L và

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = rD_u f(c, d).$$

□

Chúng ta đã thấy rằng, trong nhiều trường hợp (nhưng không phải tất cả), đạo hàm có hướng $D_u f$ sẽ bằng $\nabla f \cdot u$. Trong trường hợp này, một phiên bản thay thế của Định lý giá trị trung bình hai biến có thể được đưa ra như trong kết quả dưới đây.

Kết quả 1.3.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và D° là phần trong của D . Giả sử $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ là các điểm phân biệt của D sao cho $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, 1)\} \subseteq D^\circ$, trong đó $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ và $y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho $D_u f$ tồn tại tại mọi điểm của L với mọi vector đơn vị $u \in \mathbb{R}^2$ và, hơn nữa, $D_u f(x(t), y(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot u$ với mọi vector đơn vị $u \in \mathbb{R}^2$ và $t \in (0, 1)$.

Khi đó, tồn tại một điểm $(c, d) \in L$ sao cho $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = (x_1 - x_0)f_x(c, d) + (y_1 - y_0)f_y(c, d)$. Đặc biệt, nếu tồn tại các số thực $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho $m \leq f_x(u, v) \leq M$ và, đồng thời, $m \leq f_y(u, v) \leq M$ với mọi $(u, v) \in L$ thì **Bất đẳng thức giá trị trung bình hai biến** sau đây sẽ thỏa mãn:

$$m(x_1 - x_0 + y_1 - y_0) \leq f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \leq M(x_1 - x_0 + y_1 - y_0)$$

Chứng minh kết quả 1.3.

Kí hiệu $h = x_1 - x_0, k = y_1 - y_0, r = \sqrt{h^2 + k^2}, u = (u_1, u_2) = \frac{1}{r}(h, k) = \frac{1}{r}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

Khi đó, u là một vector đơn vị trong $\mathbb{R}^2$ với $ru = (h, k)$.

Từ các quan điểm của các giả thiết trên $D_u f$, chúng ta nhận thấy rằng, với mọi $(c, d) \in L$,

$$rD_u f(c, d) = r\nabla f(c, d) \cdot u = hf_x(c, d) + kf_y(c, d).$$

Như vậy, kết quả cần chứng minh được suy ra ngay lập tức từ Kết quả 1.2). □

Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và cố định một điểm $(x_0, y_0) \in D$. Rõ ràng x_0 là một điểm trong của $D_1 = \{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in D\}$ và y_0 là một điểm trong của $D_2 = \{y \in \mathbb{R} : (x_0, y) \in D\}$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ.

Nếu $f_x(x_0, y_0)$ tồn tại tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì chúng ta sẽ thu được một hàm từ D đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \mapsto f_x(x, y)$. Nó thường được kí hiệu lại bởi f_x và được gọi là **đạo hàm riêng của f theo x trên D** . **Đạo hàm riêng của f theo y trên D** cũng được định nghĩa theo cách tương tự. Đôi khi các đạo hàm riêng trên D này còn được kí hiệu lần lượt lại bởi $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ thay vì f_x, f_y . Trong trường hợp cả f_x và f_y đều xác định trên D , chúng ta sẽ định nghĩa **gradient của f trên D** là phép biến hình $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Trong trường hợp f_x xác định trên D , chúng ta có thể xem xét các đạo hàm riêng của nó tại bất kì một điểm nào của D . Giả sử $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng của $f_x: D \rightarrow \mathbb{R}$ theo x tại (x_0, y_0) , nếu tồn tại, sẽ

được kí hiệu lại bởi $f_{xx}(x_0, y_0)$. Ngoài ra, đạo hàm riêng của f_x theo y tại (x_0, y_0) , nếu tồn tại, sẽ được kí hiệu lại bởi $f_{xy}(x_0, y_0)$. Trong trường hợp f_y xác định trên D , chúng ta có thể định nghĩa tương tự cho $f_{yx}(x_0, y_0)$ và $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Các đạo hàm riêng này đôi khi còn được biểu thị lại lần lượt bởi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

thay vì $f_{xx}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_0), f_{yx}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0)$.

Nói chung, chúng thường được gọi là **các đạo hàm riêng cấp hai của f tại (x_0, y_0)** hoặc đơn giản là các đạo hàm riêng cấp hai. Trong các đạo hàm riêng cấp hai này, hai cái ở giữa, cụ thể là $f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ và $f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, thường được gọi là **các đạo hàm riêng hỗn hợp của f** . Thứ tự xuất hiện của x và y trong các đạo hàm riêng hỗn hợp đôi khi có thể gây ra nhầm lẫn.

Thứ tự lấy đạo hàm có thể dễ nhớ hơn nếu chúng ta lưu ý rằng

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ và } f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Cuối cùng, chúng ta nhận xét rằng, theo các quy ước của chúng ta đối với các đạo hàm riêng bên trái và bên phải, các đạo hàm riêng cấp cao của bất kì một hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ nào cũng có thể được định nghĩa theo cách tương tự.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chúng ta sẽ có $f_x(x_0, y_0) = 2x_0y_0 + y_0^2$ và $f_y(x_0, y_0) = x_0^2 + 2x_0y_0$ và, do đó, $f_{xx}(x_0, y_0) = 2y_0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) = 2x_0$, trong khi

$$f_{xy}(x_0, y_0) = 2x_0 + 2y_0 = f_{yx}(x_0, y_0).$$

(ii) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sin(xy)$. Với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chúng ta sẽ có $f_x(x_0, y_0) = y_0 \cos(x_0y_0)$ và $f_y(x_0, y_0) = x_0 \cos(x_0y_0)$ và, do đó, $f_{xx}(x_0, y_0) = -y_0^2 \sin(x_0y_0)$ và $f_{yy}(x_0, y_0) = -x_0^2 \sin(x_0y_0)$, trong khi

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \cos(x_0y_0) - x_0y_0 \sin(x_0y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Trong các ví dụ nêu ở trên, các đạo hàm riêng hỗn hợp hóa ra lại bằng nhau. Bây giờ, chúng ta sẽ chỉ ra rằng, bất cứ khi nào tồn tại các đạo hàm riêng cấp một và một trong các đạo hàm riêng hỗn hợp là liên tục, các đạo hàm riêng hỗn hợp này sẽ bằng nhau. Để đạt được điều này, chúng ta sẽ sử dụng một phiên bản khác của Định lí giá trị trung bình (Kết quả 1) cho các hàm hai biến xác định trên một hình chữ nhật và, do đó, nó sẽ được suy ra từ một phiên bản khác của Định lí Rolle. Để bắt đầu, chúng ta sẽ nhắc lại phát biểu của Định lí Rolle trong các phép tính một biến. Chúng ta có thể lưu ý rằng đây là một hệ quả trực tiếp của Định lí giá trị trung bình (Kết quả 1). Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo Kết quả 2.3) của bài viết **“Phép tính vi phân hàm một biến (1)”**.

Kết quả 2. (Định lí Rolle)

Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$.

Khi đó, nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì sẽ tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Trong dạng tương tự hai bên dưới, một khoảng sẽ được thay thế bởi một hình chữ nhật, nghĩa là, tích của các khoảng, và đẳng thức của các giá trị của hàm trên biên của một khoảng sẽ được thay thế bởi đẳng thức của tổng của các giá trị của hàm trên các đỉnh đối diện của một hình chữ nhật. Tổng xen kẽ của các giá trị của hàm tại các đỉnh được yêu cầu phải bằng không. Ngoài ra, các giả thuyết liên quan đến tính liên tục và tính khả vi cũng tương tự.

Kết quả 1.4. (Định lí Rolle cho các hình chữ nhật)

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và $c < d$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Với mỗi $y_0 \in [c, d]$ cố định, hàm xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) .
- Với mỗi $x_0 \in (a, b)$ cố định, hàm xác định bởi $y \mapsto f_x(x_0, y)$ là liên tục trên $[c, d]$ và khả vi trên (c, d) .
- $f(a, c) + f(b, d) = f(b, c) + f(a, d)$.

Khi đó, tồn tại một điểm $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ sao cho $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$.

Chứng minh kết quả 1.4.

Xét hàm $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(x) = f(x, d) - f(x, c)$. Khi đó, ϕ sẽ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $\phi(a) = f(a, d) - f(a, c) = f(b, d) - f(b, c) = \phi(b)$. Do đó, từ Định lí Rolle (Kết quả 2), tồn tại một số thực x_0 trong (a, b) sao cho $\phi'(x_0) = 0$, nghĩa là, $f_x(x_0, c) = f_x(x_0, d)$. Kế tiếp, xét hàm $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(y) = f_x(x_0, y)$. Khi đó, ψ sẽ liên tục trên $[c, d]$, khả vi trên (c, d) và $\psi(c) = f_x(x_0, c) = f_x(x_0, d) = \psi(d)$. Như vậy, từ Định lí Rolle (Kết quả 2), tồn tại một số thực $y_0 \in (c, d)$ sao cho $\psi'(y_0) = 0$, nghĩa là, $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$. □

Kết quả 1.5. (Định lí giá trị trung bình cho các hình chữ nhật)

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và $c < d$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Với mỗi $y_0 \in [c, d]$ cố định, hàm xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) .
- Với mỗi $x_0 \in (a, b)$ cố định, hàm xác định bởi $y \mapsto f_x(x_0, y)$ là liên tục trên $[c, d]$ và khả vi trên (c, d) .

Khi đó, tồn tại một điểm $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ sao cho

$$f(b, d) + f(a, c) - f(b, c) - f(a, d) = (b - a)(d - c)f_{xy}(x_0, y_0).$$

Chứng minh kết quả 1.5.

Xét một số thực $s \in \mathbb{R}$ và hàm $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x, y) = f(x, y) + f(a, c) - f(x, c) - f(a, y) - s(x - a)(y - c).$$

Quan sát thấy rằng $F(a, c) = F(a, d) = F(b, c) = 0$. Do đó, nếu chúng ta chọn số thực s sao cho $F(b, d) = 0$, nghĩa là, nếu chúng ta chọn

$$s = \frac{f(b, d) + f(a, c) - f(b, c) - f(a, d)}{(b - a)(d - c)},$$

thì chúng ta sẽ có $F(a, c) + F(b, d) = F(b, c) + F(a, d)$. Như vậy, từ Định lý Rolle cho các hình chữ nhật, tồn tại một điểm $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ sao cho $F_{xy}(x_0, y_0) = 0$, nghĩa là, $f_{xy}(x_0, y_0) = s$. Điều này chỉ ra tính đúng đắn của kết quả mong muốn. $\square$

Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật có thể được sử dụng để ước tính giá trị của hàm tại một trong số các đỉnh của hình chữ nhật, miễn là đã biết giá trị của nó tại các đỉnh còn lại và chúng ta có các chặn cho một trong số các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai của nó tại các điểm trong của hình chữ nhật.

Kết quả 1.6. (Bất đẳng thức giá trị trung bình cho các hình chữ nhật)

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a \leq b$ và $c \leq d$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Với mỗi $y_0 \in [c, d]$ cố định, hàm xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) .
- Với mỗi $x_0 \in (a, b)$ cố định, hàm xác định bởi $y \mapsto f_x(x_0, y)$ là liên tục trên $[c, d]$ và khả vi trên (c, d) .
- Tồn tại các số thực $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho $m \leq f_{xy}(x_0, y_0) \leq M$ với mọi $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$.

Khi đó, $m(b - a)(d - c) \leq f(b, d) + f(a, c) - f(b, c) - f(a, d) \leq M(b - a)(d - c)$.

Chứng minh kết quả 1.6.

Nhận thấy rằng nếu $a < b$ và $c < d$ thì các bất đẳng thức mong muốn sẽ là một hệ quả trực tiếp của Kết quả 1.5), ngược lại nếu $a = b$ hoặc $c = d$ thì mỗi một trong ba biểu thức trong số các bất đẳng thức trên đều sẽ bằng không. $\square$

Nhận thấy rằng, trong mỗi kết quả trong số ba kết quả cuối cùng, cụ thể là Định lý Rolle cho các hình chữ nhật, Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật và Bất đẳng thức giá trị trung bình cho các hình chữ nhật, chúng ta luôn có thể giả thiết rằng, với mỗi $y_0 \in [c, d]$, hàm xác định bởi $x \mapsto f(x, y_0)$ liên tục trên $[a, b]$ có thể được làm yếu đi. Thật vậy, như các phép chứng minh cho thấy, chúng ta chỉ cần giả sử rằng hàm $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(x) = f(x, d) - f(x, c)$ là liên tục. Ngoài ra, mỗi kết quả trong số ba kết quả này đều thừa nhận một dạng tương tự đơn giản với f_x và f_{xy} được thay thế bởi f_x và f_{yx} .

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh sự bằng nhau của các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai với điều kiện một trong số chúng là liên tục.

Kết quả 1.7. (Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và (x_0, y_0) là một điểm bất kì nằm trong D . Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả f_x và f_y đều tồn tại trên D .

Khi đó, nếu f_{xy} hoặc f_{yx} tồn tại trên D và liên tục tại (x_0, y_0) thì cả $f_{xy}(x_0, y_0)$ và $f_{yx}(x_0, y_0)$ đều tồn tại và $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 1.7.

Giả sử f_{xy} tồn tại trên D và liên tục tại (x_0, y_0) . Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Do D là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và f_{xy} liên tục tại (x_0, y_0) nên, từ Kết quả 3.1.6) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến (1)**”, sẽ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và

$$(u, v) \in S_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Cố định một điểm $(h, k) \in S_\delta(0, 0)$ với $h \neq 0$ và $k \neq 0$. Từ Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.5), tồn tại một điểm $(c, d) \in S_\delta(x_0, y_0)$ sao cho

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) = hk f_{xy}(c, d).$$

Nhận thấy rằng vế trái của phương trình trên có thể được viết lại dưới dạng $G(y_0 + k) - G(y_0)$, trong đó hàm $G: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $G(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$.

Như vậy,

$$\left| \frac{G(y_0 + k) - G(y_0)}{hk} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| = |f_{xy}(c, d) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Do f_y tồn tại trên D nên hàm G sẽ khả vi tại y_0 và $G'(y_0) = f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)$. Như vậy, bằng cách chuyển qua giới hạn khi $k \rightarrow 0$ (với h cố định), chúng ta nhận thấy rằng, với $0 < |h| < \delta$,

$$\left| \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| = \left| \frac{G'(y_0)}{h} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên chúng ta có thể kết luận rằng $f_{yx}(x_0, y_0)$ tồn tại và bằng với $f_{xy}(x_0, y_0)$. Trường hợp f_{yx} tồn tại trên D và liên tục tại (x_0, y_0) được chứng minh tương tự theo quan điểm của tuyên bố nêu trong nhận xét ở trên. □

Theo các quy ước của chúng ta đối với các đạo hàm riêng bên trái cũng như bên phải, chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng một kết quả có dạng tương tự với Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp (Kết quả 1.7) vẫn đúng khi $D = [a, b] \times [c, d]$ và (x_0, y_0) là một điểm bất kì nằm trong D .

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Rõ ràng là f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} tồn tại trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ngoài ra, chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng $f_x(0, y_0) = -y_0$ với mọi $y_0 \in \mathbb{R}$ và $f_y(x_0, 0) = x_0$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó, $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0, 0)$.

Như vậy, từ Kết quả 1.7), chúng ta có thể dễ dàng suy ra rằng cả f_{xy} và f_{yx} đều không thể liên tục tại $(0, 0)$.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì xác định trên D . Trong trường hợp một đạo hàm riêng cấp hai của hai của f xác định tại mọi điểm nằm trong D , chúng ta có thể xét các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp hai theo x hoặc theo y . Điều này dẫn chúng ta đến các đạo hàm riêng cấp ba $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}$. Bằng cách áp dụng Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp cho f_x và f_y , chúng ta nhận thấy rằng $f_{xxy} = f_{xyx}$ và $f_{yyx} = f_{yxy}$ tại mỗi điểm của D mà tại đó các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp ba này liên tục. Hơn nữa, nếu $f_{xy} = f_{yx}$ trên D thì, bằng cách lấy đạo hàm riêng theo x và theo y , chúng ta sẽ thu được $f_{xyx} = f_{yxx}$ và $f_{yxy} = f_{xyy}$. Như vậy, nếu các đạo hàm riêng cấp hai tồn tại và liên tục trên D , và các đạo hàm riêng cấp ba tồn tại trên D thì chúng ta sẽ có $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ và $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ tại mỗi điểm (x_0, y_0) của D mà tại đó các đạo hàm riêng cấp ba này liên tục.

Tại một điểm như vậy, thay vì tám đạo hàm riêng cấp ba khả dĩ, chúng ta chỉ cần xét bốn đạo hàm riêng là đủ và chúng có thể được kí hiệu lại lần lượt bởi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0), \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0), \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0),$$

thay vì $f_{xxx}(x_0, y_0), f_{yxx}(x_0, y_0), f_{yyx}(x_0, y_0), f_{yyy}(x_0, y_0)$.

Bằng cách tiếp tục thực hiện theo cách này, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta có thể xét các đạo hàm riêng cấp n của f tại một điểm (x_0, y_0) bất kì thuộc D . Như vậy, chúng ta sẽ có 2^n khả năng, nhưng nếu đạo hàm riêng cấp $< n$ tồn tại và liên tục trên D và đạo hàm riêng cấp n tồn tại trên D và liên tục tại (x_0, y_0) thì chúng ta chỉ cần xét $n + 1$ trong số đó là đủ, cụ thể là,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0), \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}(x_0, y_0), \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}(x_0, y_0), \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0, y_0) \text{ với } m = 0, 1, \dots, n,$$

hoặc đơn giản chỉ là

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-m} \partial y^m}(x_0, y_0) \text{ với } m = 0, 1, \dots, n.$$

Chẳng hạn,

(i) Giả sử I và J là các khoảng mở khác rỗng trong $\mathbb{R}$, $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm một biến khả vi vô hạn.

Xét các hàm $f, g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \phi(x) + \psi(y) \text{ và } g(x, y) = \phi(x)\psi(y).$$

Bằng cách sử dụng một lập luận quy nạp đơn giản trên chỉ số $l + m$, trong đó l, m là các số nguyên không âm, chúng ta có thể nhận thấy rằng tất cả các đạo hàm riêng cấp cao của f và g đều tồn tại trên $I \times J$ và, tại bất kì một điểm (x_0, y_0) cho trước nào thuộc $I \times J$, được xác định bởi

$$\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) = \begin{cases} \phi(x_0) + \psi(y_0) & \text{nếu } l = m = 0, \\ \phi^{(l)}(x_0) & \text{nếu } l \geq 1 \text{ và } m = 0, \\ \psi^{(m)}(y_0) & \text{nếu } l = 0 \text{ và } m \geq 1, \\ 0 & \text{nếu } l \geq 1 \text{ và } m \geq 1. \end{cases}$$

Tương tự, các đạo hàm riêng cấp cao của g cũng sẽ được xác định bởi

$$\frac{\partial^{l+m} g}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) = \phi^{(l)}(x_0)\psi^{(m)}(y_0) \text{ với } l \geq 0, m \geq 0 \text{ và } (x_0, y_0) \in I \times J.$$

(ii) Với các số nguyên không âm i, j bất kì cho trước, kí hiệu $g_{i,j}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $g_{i,j}(x, y) = x^i y^j$. Bằng cách sử dụng (i) nêu ở trên, chúng ta nhận thấy rằng, với mọi số nguyên không âm l, m và với một điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bất kì,

$$\frac{\partial^{l+m} f_{i,j}}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) = \begin{cases} \frac{i! j!}{(i-l)!(j-m)!} x_0^{i-l} y_0^{j-m} & \text{nếu } l \leq i \text{ và } m \leq j, \\ 0 & \text{nếu } l > i \text{ hoặc } m > j. \end{cases}$$

Kế tiếp, giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đa thức, nghĩa là,

$$f(x, y) = \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ i+j \leq n}} c_{i,j} x^i y^j, \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó n là một số nguyên không âm và $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ với $i, j \geq 0$ với $i + j \leq n$.

Kí hiệu $c_{i,j} = 0$ nếu $i, j \geq 0$ với $i + j > n$. Ngoài ra, như thường lệ, chúng ta luôn quy ước rằng $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}$ và mọi tổng rỗng đều có giá trị bằng 0. Khi đó, theo quan điểm của công thức nêu ở trên cho các đạo hàm riêng của $g_{i,j}$, chúng ta nhận thấy rằng, với mọi số nguyên không âm l, m và với một điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bất kì,

$$\frac{\partial^{l+m} f_{i,j}}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) = \sum_{i \geq l} \sum_{\substack{j \geq m \\ i+j \leq n}} c_{i,j} \frac{i! j!}{(i-l)!(j-m)!} x_0^{i-l} y_0^{j-m}, \text{ với mọi } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Như vậy, các đạo hàm riêng của f với cấp bất kì tồn tại tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và được cho bởi công thức trên.

(iii) Như đã nhận xét từ trước đó, việc lấy đạo hàm riêng sẽ tương đương với việc lấy đạo hàm của một hàm một biến và, do đó, các quy tắc tính đạo hàm thông thường vẫn có thể sử dụng được. Đặc biệt, chúng ta hãy xem xét ảnh hưởng của quy tắc tính đạo hàm hàm hợp đối với một hàm hợp có dạng $f(x, y) = g(u(x, y))$, trong đó $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ và $u: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sao cho $u(D) \subseteq E$, trong đó E là một tập con mở của $\mathbb{R}$ và D là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$. Giả sử tất cả các đạo hàm riêng của u đều tồn tại trên D và g khả vi vô hạn trên E . Khi đó, tất cả các đạo hàm riêng cấp cao của f đều tồn tại trên D . Tuy nhiên, việc tìm một công thức tường minh cho chúng dưới dạng đạo hàm riêng của u và đạo hàm của f dường như không dễ dàng. Trong trường hợp u là một hàm tuyến tính, nghĩa là, $u(x, y) = ax + by$ với mọi $(x, y) \in D$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, tại bất kì một điểm $(x_0, y_0) \in D$ nào cho trước, bằng cách đặt $u_0 = u(x_0, y_0) = ax_0 + by_0$, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) = g^{(l+m)}(u_0) a^l b^m \text{ với } l \geq 0, m \geq 0.$$

Các tuyên bố chính thức của quy tắc tính đạo hàm hàm hợp sẽ được thảo luận thêm trong mục **3. Định lý giá trị trung bình và Công thức Taylor**.

Với mọi $h, k \in \mathbb{R}$ cho trước, chúng ta định nghĩa **toán tử đạo hàm riêng** $\mathcal{D}_{h,k}$ như sau:

$$\mathcal{D}_{h,k} = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}.$$

Nhận thấy rằng $\mathcal{D}_{h,k}$ sẽ biến đổi một hàm thực hai biến thành một hàm thực hai biến khác. Như vậy, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả hai đạo hàm riêng của f đều tồn tại tại mọi điểm của D thì $\mathcal{D}_{h,k}f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm xác định bởi

$$(\mathcal{D}_{h,k}f)(x_0, y_0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0),$$

trong đó (x_0, y_0) thay đổi trên D .

Kí hiệu toán tử $\mathcal{D}_{h,k}f$ có một ưu điểm là chúng ta có thể xem xét các lũy thừa hình thức (hoặc hợp liên tiếp) của $\mathcal{D}_{h,k}$ và những điều này sẽ cho phép chúng ta xem xét một tổ hợp của các đạo hàm riêng cấp n tại cùng một thời điểm.

Như vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ định nghĩa

$$\mathcal{D}_{h,k}^n = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h^{n-m} k^m \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m} \partial y^m}.$$

Nói cách khác, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng với cấp $\leq n$ liên tục tại mọi điểm của D thì $\mathcal{D}_{h,k}^n f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ là một hàm xác định bởi

$$(\mathcal{D}_{h,k}^n f)(x_0, y_0) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h^{n-m} k^m \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-m} \partial y^m}(x_0, y_0),$$

trong đó (x_0, y_0) thay đổi trên D .

Chẳng hạn,

$$(\mathcal{D}_{h,k}^2 f)(x_0, y_0) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Chẳng hạn, xét một đa thức $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ i+j \leq n}} c_{i,j} x^i y^j, \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bằng cách đặt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ trong công thức đạo hàm riêng cấp cao của f nêu trong ví dụ (ii) ở trên, chúng ta nhận thấy rằng

$$\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(0, 0) = l! m! c_{l,m} \text{ với mọi số nguyên không âm } l, m.$$

Như vậy, với mọi số nguyên không âm p cho trước, chúng ta sẽ có

$$(\mathcal{D}_{h,k}^p f)(0, 0) = p! \sum_{m=0}^p c_{p-m,m} h^{p-m} k^m \text{ với mọi } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Bằng cách chia cả hai vế cho $p!$ và lấy tổng khi p thay đổi từ 0 đến n , chúng ta nhận thấy rằng

$$f(n, k) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} (\mathcal{D}_{h,k}^p f)(0, 0) \text{ với mọi } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Như vậy, chúng ta đã thu được một biểu thức thay thế cho $f(x, y)$ theo các đạo hàm riêng cấp cao của nó tại $(0, 0)$.

Đạo hàm có hướng cấp cao

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và $u = (u_1, u_2)$ là một vector đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Khi đó, với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, số thực 0 rõ ràng là một điểm trong của $D_0 = \{t \in \mathbb{R}: (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) \in D\}$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Nếu $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì chúng ta sẽ thu được một hàm từ D đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \mapsto D_u f(x, y)$. Nó thường được kí hiệu lại bởi $D_u f$ và được gọi là **đạo hàm có hướng của f trên D dọc theo u** . Do $D_u f$ là một hàm thực hai biến nên chúng ta có thể xem xét thêm các đạo hàm có hướng của nó dọc theo u tại các điểm của D . Nếu chúng tồn tại tại mọi điểm D thì chúng ta sẽ thu được một hàm từ D đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \mapsto D_u(D_u f)(x, y)$. Nó thường được kí hiệu lại bởi $D_u^2 f$ và được gọi là đạo hàm có hướng cấp hai của f trên D dọc theo u . Nói chung, chúng ta có thể đưa ra một định nghĩa đệ quy

như sau. Giả sử $f_0 = D_u^0 f = f$ và $f_i = D_u^i f$ đã được xác định với $i = 0, 1, \dots, n-1$, trong đó $n \in \mathbb{N}$. Nếu đạo hàm có hướng của f_{n-1} trên D dọc theo u tồn tại thì chúng ta thường kí hiệu nó lại bởi $D_u^n f$ và gọi nó là **đạo hàm có hướng cấp n của f trên D dọc theo u** . Lưu ý rằng $D_u^1 f = D_u f$.

Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và u như trên, và đạo hàm có hướng $D_u f$ của f trên D dọc theo u tồn tại. Nếu v là một vector đơn vị bất kì trong $\mathbb{R}^2$ và đạo hàm có hướng của $D_u f$ trên D dọc theo v tồn tại thì chúng ta sẽ thu được một hàm từ D đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \mapsto D_v(D_u f)(x, y)$. Nó thường được kí hiệu lại bởi $D_{uv}^2 f$. Bằng cách tiến hành theo cách này, chúng ta sẽ có thể xây dựng một khái niệm về các đạo hàm có hướng cấp n dọc theo một n – bộ sắp thứ tự của các vector đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không có bất kì một cơ hội nào để sử dụng những khái niệm như vậy một cách đầy đủ tổng quát và, do đó, chúng ta sẽ không thảo luận thêm về nó.

Chúng ta đã thấy từ trước đó rằng một dạng tương tự hai biến của Định lí giá trị trung bình có thể được tạo thành bằng cách sử dụng các đạo hàm có hướng. Theo cách tương tự, chúng ta có thể xây dựng và chứng minh một dạng tương tự hai biến của Công thức Taylor bằng cách sử dụng các đạo hàm có hướng cấp cao hơn. Đầu tiên, chúng ta hãy nhắc lại phát biểu của Công thức Taylor từ phép tính một biến. Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo Kết quả 2.4) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến (1)**”.

Kết quả 3. (Công thức Taylor)

Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và n là một số nguyên không âm.

Khi đó, nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho $f', f'', \dots, f^{(n)}$ tồn tại trên $[a, b]$, hơn nữa, $f^{(n)}$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) thì sẽ tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Sau đây là một kết quả tương tự cho các hàm hai biến.

Kết quả 1.8. (Công thức Taylor hai biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở, (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là các điểm phân biệt trong D sao cho đoạn thẳng nối giữa chúng nằm trong D , nghĩa là, $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1]\} \subseteq D$, trong đó $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ và $y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$. Giả sử $u = (u_1, u_2)$ là vector đơn vị xác định bởi $u = (u_1, u_2) = \frac{1}{r}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, trong đó $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Giả sử n là một số nguyên không âm và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho $D_u^i f$ tồn tại và liên tục trên D với $i = 0, \dots, n$, và, hơn nữa, $D_u^{n+1} f$ tồn tại tại $(x(t), y(t))$ với mỗi $t \in (0, 1)$.

Khi đó, tồn tại một điểm $(c, d) \in L \setminus \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ sao cho

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{r^i}{i!} (D_u^i f)(x_0, y_0) + \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} (D_u^{n+1} f)(c, d).$$

Chứng minh kết quả 1.8.

Với $i = 0, \dots, n$, kí hiệu $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f_i = D_u^i f$ và $F_i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $F_i(t) = f_i(x(t), y(t))$ với $t \in [0,1]$. Kí hiệu $f_{n+1}: L \setminus \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f_{n+1} = D_u^{n+1} f$ và $F_{n+1}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $F_{n+1}(t) = f_{n+1}(x(t), y(t))$ với $t \in (0,1)$.

Bằng cách sử dụng định nghĩa của đạo hàm có hướng, chúng ta nhận thấy rằng, như trong phép chứng minh của Định lý giá trị trung bình hai biến (Kết quả 1.2), nếu $n \geq 1$ thì $F = F_0$ sẽ khả vi trên $[0,1]$ và

$$F'(t) = r(D_u f)(x(t), y(t)) = r f_1(x(t), y(t)) = r F_1(t) \text{ với mọi } t \in [0,1].$$

Tương tự, nếu $n \geq 2$ thì F_1 sẽ khả vi trên $[0,1]$ và $F_1'(t) = r F_2(t)$ với mọi $t \in [0,1]$.

Như vậy, $F = F_0$ khả vi hai lần trên $[0,1]$ và

$$F''(t) = r F_1'(t) = r^2 F_2(t) \text{ với mọi } t \in [0,1].$$

Bằng cách tiếp tục theo cách này, chúng ta có thể nhận thấy rằng, với $i = 0, \dots, n$, đạo hàm cấp i của F tồn tại trên $[0,1]$ và $F^{(i)}(t) = r^i F_i(t)$ với mọi $t \in [0,1]$. Hơn nữa, đạo hàm cấp $(n+1)$ của F tồn tại trên $(0,1)$ và $F^{(n+1)}(t) = r^{n+1} F_{n+1}(t)$ với mọi $t \in (0,1)$. Như vậy, bằng cách áp dụng Công thức Taylor từ các phép tính một biến (Kết quả 3) cho hàm F , tồn tại một số thực $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$F(1) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(i)}(0)}{i!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Như vậy, bằng cách đặt $(c, d) = (x(\theta), y(\theta)) \in L \setminus \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$, chúng ta nhận thấy rằng

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{r^i}{i!} (D_u^i f)(x_0, y_0) + \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} (D_u^{n+1} f)(c, d),$$

như đã tuyên bố. □

Trong trường hợp đẳng thức $D_u f = \nabla f \cdot u$ được thỏa mãn bởi f cũng như các đạo hàm có hướng cấp cao hơn của nó, chúng ta sẽ thu được phiên bản thay thế sau đây của Công thức Taylor hai biến tương tự với Kết quả 1.3).

Kết quả 1.9.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và n là một số nguyên không âm. Giả sử (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là các điểm phân biệt thuộc D và L là đoạn thẳng nối giữa chúng. Giả sử $L \subseteq D$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f có các đạo hàm riêng cấp $\leq n+1$ liên tục tại mọi điểm của D và, hơn nữa, các đạo hàm có hướng cấp cao hơn $D_u^i f$ tồn tại tại mọi điểm của D với mọi vector đơn vị u trong $\mathbb{R}^2$ và $i = 0, 1, \dots, n+1$. Giả sử thêm rằng, với bất kì một vector đơn vị u nào trong $\mathbb{R}^2$, các hàm $f_i = D_u^i f$ đều thỏa mãn hệ thức

$$(D_u f_i)(x, y) = \nabla f_i(x, y) \cdot u \text{ với mọi } (x, y) \in D \text{ và } i = 0, \dots, n,$$

trong đó $f_0 = f$.

Khi đó, tồn tại một điểm $(c, d) \in L \setminus \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ sao cho

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (\mathcal{D}_{h,k}^i f)(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} (\mathcal{D}_{h,k}^{n+1} f)(c, d),$$

trong đó $h = x_1 - x_0$ và $k = y_1 - y_0$.

Chứng minh kết quả 1.9.

Với h và k như trên, kí hiệu $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ và $u = (h/r, k/r)$. Khi đó, u sẽ là một vector đơn vị trong $\mathbb{R}^2$ với $ru = (h, k)$. Như trong phép chứng minh của Kết quả 1.3), với mọi $(x, y) \in D$ và $i = 0, 1, \dots, n$, chúng ta sẽ có

$$r f_{i+1}(x, y) = r D_u f_i(x, y) = \left(h \frac{\partial f_i}{\partial x} + k \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) (x, y) = (\mathcal{D}_{h,k} f_i)(x, y).$$

Bằng cách lần lượt sử dụng đẳng thức trên, chúng ta nhận thấy rằng $r^i (D_u^i f) = r^i f_i = (\mathcal{D}_{h,k} f_i)^i$ với $i = 0, \dots, n+1$. Như vậy, kết quả mong muốn được suy ra ngay lập tức từ Kết quả 1.8). $\square$

2. Tính khả vi

Những khó khăn liên quan đến việc tổng quát hóa khái niệm khả vi từ các hàm một biến thành các hàm hai (hoặc nhiều) biến đã được thảo luận trong phần đầu của mục **1. Khái niệm đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng**. Chúng ta sẽ trình bày trong mục này cách khắc phục những khó khăn này. Ý tưởng chính ở đây gồm hai phần: (i) nhận thức rằng đạo hàm của một hàm thực hai biến có thể không phải là một số mà có thể là một cặp số thực, (ii) nhận xét rằng vấn đề chia cho một điểm (h, k) trong $\mathbb{R}^2$ có thể được giải quyết bằng cách thay thế (h, k) bởi chuẩn $|(h, k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$ của nó. Để hiểu điều này rõ ràng hơn, trước tiên, chúng ta hãy lưu ý rằng nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D thì hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại c khi và chỉ khi tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c) - \alpha h}{|h|} = 0.$$

Trong trường hợp này, α sẽ được gọi là đạo hàm của f tại c .

Bây giờ, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu tồn tại $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \alpha_1 h - \alpha_2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ gọi cặp (α_1, α_2) là **đạo hàm toàn phần của f tại (x_0, y_0)** . (Trong các phương pháp xử lý hiện đại của phép tính nhiều biến, thay vì cặp (α_1, α_2) , ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $(h, k) \mapsto \alpha_1 h + \alpha_2 k$ được gọi là đạo hàm (toàn phần) của f tại (x_0, y_0) . Tuy nhiên, cặp (α_1, α_2) và ánh xạ tuyến tính tương ứng xác định duy nhất lẫn nhau. Với lí do này và để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ gọi cặp (α_1, α_2) là đạo hàm (toàn phần) của f tại (x_0, y_0) .)

Chúng ta cần lưu ý rằng nếu f khả vi tại (x_0, y_0) , (α_1, α_2) là đạo hàm toàn phần của f tại (x_0, y_0) thì khi (h, k) tiến đến $(0,0)$ dọc theo trục x hoặc trục y , chúng ta có thể nhận thấy rằng

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - \alpha_1 h}{|h|} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \alpha_2 k}{|k|} = 0.$$

Như vậy, cả $f_x(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0)$ đều tồn tại và tương ứng bằng với α_1 và α_2 .

Nói cách khác, nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì gradient của f tại (x_0, y_0) tồn tại và

$$\text{đạo hàm toàn phần của } f \text{ tại } (x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).$$

Như vậy, khi kiểm tra tính khả vi của f tại (x_0, y_0) , rõ ràng giá trị nào của α_1 và α_2 cũng có thể hoạt động và nhiệm vụ của chúng ta giảm xuống còn kiểm tra xem giới hạn hai biến tương ứng có tồn tại và bằng không hay không. Ngoài ra, nếu một trong hai đạo hàm riêng không tồn tại tại một điểm nào đó thì chúng ta có thể chắc chắn rằng f sẽ khả vi tại điểm đó. Điều này sẽ được minh họa trong các ví dụ nêu dưới đây. Mặt khác, sự tồn tại của cả hai đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) là không đủ để f khả vi tại (x_0, y_0) và điều này cũng sẽ được chỉ ra trong các ví dụ nêu dưới đây.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm hằng xác định bởi $f(x, y) = 1$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Rõ ràng f khả vi tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và đạo hàm toàn phần của f tại (x_0, y_0) là $(0,0)$.

(ii) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chúng ta sẽ có $f_x(x_0, y_0) = 2x_0$ và $f_y(x_0, y_0) = 2y_0$ và, hơn nữa,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - 2x_0 h - 2y_0 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng f khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0)$.

(iii) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm chuẩn xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Chúng ta có thể nhận thấy rằng cả $f_x(0,0)$ và $f_y(0,0)$ đều không tồn tại. Như vậy, f sẽ không thể khả vi tại $(0,0)$.

(iv) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x, y) = |xy|$. Dễ dàng nhận thấy rằng $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Hơn nữa, với mọi $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, chúng ta sẽ có $|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$ và, do đó, nếu $(h, k) \neq (0,0)$ thì

$$\frac{f(h, k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |k| \rightarrow 0 \text{ khi } (h, k) \rightarrow (0,0).$$

Như vậy, f sẽ khả vi tại $(0,0)$ và $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Đối với các hàm một biến, chúng ta có một đặc trưng khả vi khá hữu ích được đưa ra bởi Bổ đề Carathéodory. Đầu tiên, chúng ta hãy nhắc lại phát biểu của nó. Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo Kết quả 1.1) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến (1)**”.

Kết quả 4. (Bổ đề Carathéodory)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D .

Khi đó, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại c khi và chỉ khi tồn tại một hàm $f_1: D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - f(c) = (x - c)f_1(x)$ với mọi $x \in D$ và f_1 liên tục tại c . Ngoài ra, nếu các điều kiện này được thỏa mãn thì $f'(c) = f_1(c)$.

Nếu các điều kiện của Kết quả 4) được thỏa mãn thì hàm f_1 sẽ được xác định duy nhất bởi f và c , và f_1 được gọi là **hàm liên kết với f và c** . Đối với các hàm hai biến, chúng ta cũng có một đặc trưng tương tự về tính khả vi và nó sẽ đóng một vai trò quan trọng trong phần kế tiếp.

Kết quả 2.1. (Bổ đề Carathéodory hai biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D .

Khi đó, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi tồn tại các hàm $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f_1 và f_2 liên tục tại (x_0, y_0) và $f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$. Ngoài ra, nếu các điều kiện này được thỏa mãn thì $\nabla f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$.

Chứng minh kết quả 2.1.

Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại (x_0, y_0) .

Khi đó, tồn tại một $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0,$$

trong đó

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \alpha_1(x - x_0) - \alpha_2(y - y_0) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Kí hiệu $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $f_i(x_0, y_0) = \alpha_i$, với $i = 1, 2$, và, với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$$f_1(x, y) = \alpha_1 + \frac{(x - x_0)F(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, f_2(x, y) = \alpha_2 + \frac{(y - y_0)F(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Khi đó, với mọi $(x, y) \in D$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} & (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \\ &= \alpha_1(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2 F(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \alpha_2(y - y_0) + \frac{(y - y_0)^2 F(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) + F(x, y). \end{aligned}$$

Như vậy, bằng cách sử dụng định nghĩa của $F(x, y)$ và kiểm tra trực tiếp khi $(x, y) = (x_0, y_0)$, chúng ta nhận thấy rằng

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Ngoài ra, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cho trước với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, rõ ràng chúng ta sẽ có

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1 \text{ và } \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1,$$

và, do đó, với $(x, y) \in D$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ và với $i = 1, 2$, chúng ta sẽ có

$$|f_i(x_0, y_0) - \alpha_i| \leq \left| \frac{F(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \rightarrow 0 \text{ khi } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Như vậy, từ Kết quả 3.3.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm hai biến**”, chúng ta nhận thấy rằng f_1 và f_2 sẽ liên tục tại (x_0, y_0) .

Ngược lại, giả sử tồn tại các hàm $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại (x_0, y_0) sao cho

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Kí hiệu $\alpha_1 = f_1(x_0, y_0)$, $\alpha_2 = f_2(x_0, y_0)$ và $F(x, y)$ như trước.

Khi đó,

$$F(x, y) = (x - x_0)(f_1(x, y) - \alpha_1) + (y - y_0)(f_2(x, y) - \alpha_2) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Như vậy, với mọi $(x, y) \in D$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có

$$\left| \frac{F(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq |f_1(x, y) - \alpha_1| + |f_2(x, y) - \alpha_2|.$$

Do cả f_1 và f_2 đều liên tục tại (x_0, y_0) nên chúng ta sẽ có $|f_1(x, y) - \alpha_1| \rightarrow 0$ và $|f_2(x, y) - \alpha_2| \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Như vậy,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{F(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Điều này chỉ ra rằng f khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$. □

Một cặp hàm (f_1, f_2) thỏa mãn các điều kiện nêu trong Bổ đề Carathéodory hai biến sẽ được gọi là một cặp hàm liên kết với hàm f và điểm (x_0, y_0) . Như vậy, Bổ đề Carathéodory hai biến có thể được diễn giải lại bằng cách nói rằng tính khả vi của f tại (x_0, y_0) sẽ tương đương với sự tồn tại của một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) .

Nhận xét,

(i) Như trong trường hợp hàm một biến, tính khả vi của một hàm hai biến là một điều kiện cục bộ. Nói cách khác, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D thì $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ sao cho phép thu hẹp $f|_{S_\delta(x_0, y_0)}$ của f trên $S_\delta(x_0, y_0)$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) . Đặc biệt, để kiểm tra tính khả vi của f tại (x_0, y_0) , Bổ đề Carathéodory hai biến có thể được áp dụng cho một phép thu hẹp như vậy của f chỉ cần tìm được một cặp hàm liên kết trên $S_\delta(x_0, y_0)$ với một số $\delta > 0$ nào đó.

(ii) Ngược lại với trường hợp hàm một biến, một cặp hàm liên kết với một hàm hai biến $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và một điểm trong (x_0, y_0) của D có thể không duy nhất. Thật vậy, giả sử (f_1, f_2) là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) , và $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì nào đó liên tục tại (x_0, y_0) .

Kí hiệu $g_1, g_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi

$$g_1(x, y) = f_1(x, y) + (y - y_0)h(x, y) \text{ và } g_2(x, y) = f_2(x, y) - (x - x_0)h(x, y).$$

Khi đó, (g_1, g_2) cũng sẽ là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) . Như vậy, nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì sẽ có vô số các cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) .

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x$ và (x_0, y_0) là một điểm bất kì của $\mathbb{R}^2$.

Kí hiệu $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $f_1(x, y) = 1$ và $f_2(x, y) = 0$.

Khi đó, rõ ràng (f_1, f_2) là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) . Như vậy, f sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla f(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Tương tự, hàm $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x, y) = y$ sẽ khả vi tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Một hệ quả tức thì của Bổ đề Carathéodory hai biến là:

Kết quả 2.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D .

Khi đó, nếu hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại (x_0, y_0) thì f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) .

Chứng minh kết quả 2.2.

Nhận thấy rằng nếu (f_1, f_2) là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) thì

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Như vậy, tính liên tục của f tại (x_0, y_0) sẽ kéo theo tính liên tục của f_1 và f_2 tại (x_0, y_0) . □

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(0, 0) = 0$ và $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ với $(x, y) \neq (0, 0)$. Chúng ta nhận thấy rằng f sẽ không thể liên tục tại $(0, 0)$. Như vậy, f không thể khả vi tại $(0, 0)$.

Mặt khác, tất cả các đạo hàm có hướng của f tại $(0,0)$.

(ii) Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm chuẩn xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ với mọi $(x, y) \in D$. Chúng ta nhận thấy rằng f liên tục tại $(0,0)$, nhưng chúng ta cũng nhận thấy rằng f không khả vi tại $(0,0)$. Như vậy, chiều ngược lại của Kết quả 2.2) là không đúng.

Một ứng dụng đơn giản của Bổ đề Carathéodory hai biến cho thấy rằng đạo hàm (toàn phần) của tổng, tích vô hướng, tích, nghịch đảo, căn của các hàm thực hai biến sẽ hành xử giống như trong trường hợp một biến.

Kết quả 2.3.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Giả sử $r \in \mathbb{R}$ và $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi tại (x_0, y_0) .

Khi đó, $f + g, rf, fg$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) ; hơn nữa,

$$\nabla(f + g)(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) + \nabla g(x_0, y_0), \nabla(rf)(x_0, y_0) = r\nabla f(x_0, y_0),$$

và

$$\nabla(fg)(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)\nabla f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)\nabla g(x_0, y_0).$$

Trong trường hợp $f(x_0, y_0) \neq 0$, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$; hơn nữa, hàm $1/f: D \cap S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(x_0, y_0) = -\frac{1}{f^2(x_0, y_0)}\nabla f(x_0, y_0).$$

Trong trường hợp tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$, với mọi $k \in \mathbb{N}$, hàm $f^{1/k}: S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và

$$\nabla(f^{1/k})(x_0, y_0) = \frac{1}{k}f^{(1/k)-1}(x_0, y_0)\nabla f(x_0, y_0).$$

Chứng minh kết quả 2.3.

Giả sử (f_1, f_2) và (g_1, g_2) lần lượt là các cặp hàm liên kết với f và g và (x_0, y_0) . Bằng cách sử dụng Kết quả 3.1.2) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và Kết quả 2.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $(f_1 + g_1, f_2 + g_2), (rf_1, rf_2), (f_1g + f(x_0, y_0)g_1, f_2g + f(x_0, y_0)g_2)$ lần lượt là các cặp hàm liên kết với $f + g, rf, fg$ và (x_0, y_0) . Trong trường hợp $f(x_0, y_0) \neq 0$, theo quan điểm của Kết quả 3.1.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và, với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có $f(x, y) \neq 0$ và

$$\frac{1}{f(x, y)} - \frac{1}{f(x_0, y_0)} = (x - x_0) \left[\frac{-f_1(x, y)}{f(x, y)f(x_0, y_0)} \right] + (y - y_0) \left[\frac{-f_2(x, y)}{f(x, y)f(x_0, y_0)} \right].$$

Như vậy, theo quan điểm của Kết quả 3.1.2) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và Kết quả 2.2), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $(-f_1/f(x_0, y_0)f, -f_2/f(x_0, y_0)f)$ là một cặp hàm liên kết với $1/f$

và (x_0, y_0) .

Cuối cùng, nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì, từ Kết quả 2.2) và Kết quả 3.1.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$. Bây giờ, cố định một điểm $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$ bất kì. Để đơn giản, chúng ta sẽ viết $F(x, y) = f^{1/k}(x, y)$.

Khi đó,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = F^k(x, y) - F^k(x_0, y_0) = [F(x, y) - F(x_0, y_0)]G(x, y),$$

trong đó $G(x, y) = F^{k-1}(x, y) + F(x_0, y_0)F^{k-2}(x, y) + \dots + F^{k-1}(x_0, y_0)$.

Như vậy,

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{f_1(x, y)}{G(x, y)} + (y - y_0) \frac{f_2(x, y)}{G(x, y)}.$$

Từ Kết quả 3.1.2) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và Kết quả 2.2), F sẽ liên tục tại (x_0, y_0) và, do đó, G như vậy. Điều này chỉ ra rằng $(f_1/G, f_2/G)$ là một cặp hàm liên kết của $f^{1/k}$. $\square$

Nhận xét rằng, với các kí hiệu và các giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách sử dụng các kết quả cho tổng và tích vô hướng, chúng ta có thể suy ra rằng hiệu $f - g$ khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla(f - g)(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) - \nabla g(x_0, y_0)$. Ngoài ra, bằng cách sử dụng các kết quả cho tích và nghịch đảo, chúng ta nhận thấy rằng nếu $g(x_0, y_0) \neq 0$ thì thương f/g sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \nabla f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \nabla g(x_0, y_0)}{g^2(x_0, y_0)}.$$

Ngoài ra, bằng cách sử dụng các kết quả cho tích, nghịch đảo và căn, chúng ta có thể suy ra rằng nếu $r \in \mathbb{Q}$ thì lũy thừa hữu tỉ f^r sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và

$$\nabla(f^r)(x_0, y_0) = r f^{r-1}(x_0, y_0) \nabla f(x_0, y_0),$$

miễn là $f(x_0, y_0) \neq 0$ nếu r là một số nguyên âm và $f(x_0, y_0) > 0$ nếu r không phải là một số nguyên.

Chẳng hạn, chúng ta có thể nhận thấy rằng mọi hàm đa thức hai biến đều khả vi trên $\mathbb{R}^2$. Ngoài ra, từ Nhận xét nêu ở trên, chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng mọi hàm hữu tỉ hai biến đều khả vi tại mỗi điểm của $\mathbb{R}^2$ mà tại đó nó được xác định. Hơn nữa, nếu $f(x, y)$ là một hàm hữu tỉ hai biến và r là một số hữu tỉ nào đó thì hàm đại số f^r sẽ khả vi tại $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, miễn là f được xác định tại (x_0, y_0) và $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Mặc dù Bổ đề Carathéodory hai biến chỉ ra cho chúng ta một cách khác để kiểm tra tính khả vi của một hàm hai biến, nhưng trên thực tế, cả định nghĩa và Bổ đề Carathéodory hai biến đều không đặc biệt hiệu quả trong việc xác định tính khả vi. Tuy nhiên, lưu ý rằng Kết quả 2.2) lại đưa ra một điều kiện cần cho tính khả vi, cụ thể là tính liên tục. Điều này đôi khi có thể được sử dụng để chỉ ra một hàm không khả vi tại một điểm. Tương tự, nếu một trong hai đạo hàm riêng không tồn tại tại một điểm thì hàm cũng sẽ không thể khả vi tại điểm đó. Chúng ta cũng đã thấy rằng cả tính liên tục lẫn sự tồn tại của các đạo hàm riêng đều không đủ để có thể khẳng định tính khả vi. Nhưng hóa ra sự tồn tại và tính liên tục của đạo hàm riêng lại bao hàm tính

khả vi. Kết quả này, được chứng minh ở dưới đây, đưa ra một tập rất hữu ích các điều kiện đủ cho tính khả vi.

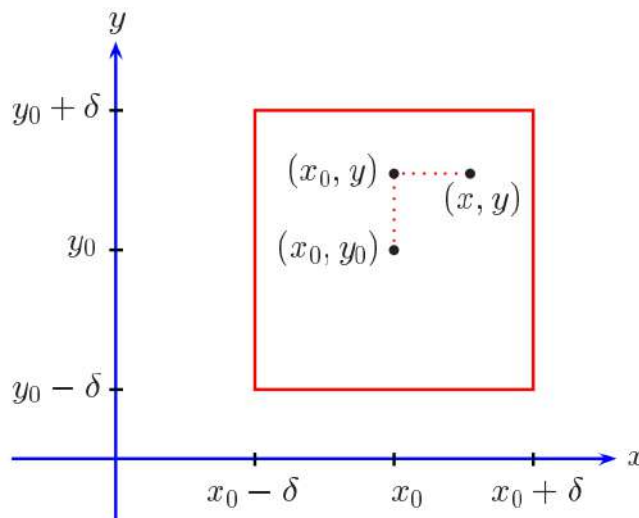
Kết quả 2.4.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả f_x và f_y đều tồn tại trên $D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ với một số $\delta > 0$ nào đó.

Khi đó, nếu một trong số chúng liên tục tại (x_0, y_0) thì f sẽ khả vi tại (x_0, y_0) .

Chứng minh kết quả 2.4.

Giả sử f_x liên tục tại (x_0, y_0) . Do (x_0, y_0) là một điểm trong của D nên chúng ta có thể giả sử không mất tính tổng quát rằng $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$. Theo quan điểm của nhận xét nêu ở trên, chúng ta chỉ cần tìm được một cặp hàm liên kết với $f|_{S_\delta(x_0, y_0)}$ và (x_0, y_0) . Để kết thúc điều này, trước tiên chúng ta có thể quan sát thấy rằng, với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$, $(x_0, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$ và, hơn nữa, chúng ta có thể phân tách $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dọc theo “móc” liên kết (x, y) và (x_0, y_0) , nghĩa là, chúng ta có thể viết $f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x, y) + B(x, y)$, trong đó $A(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y)$ và $B(y) = f(x_0, y) - f(x_0, y_0)$.



Hình vẽ minh họa “móc” liên kết (x, y) và (x_0, y_0) .

Chúng ta sẽ định nghĩa các hàm $f_1, f_2: S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ bởi

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{A(x, y)}{x - x_0} & \text{nếu } x \neq x_0, \\ f_x(x_0, y) & \text{nếu } x = x_0. \end{cases} \quad \text{và} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{B(y)}{y - y_0} & \text{nếu } y \neq y_0, \\ f_y(x_0, y_0) & \text{nếu } y = y_0. \end{cases}$$

Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in S_\delta(x_0, y_0).$$

Ngoài ra, do f_x tồn tại trên $S_\delta(x_0, y_0)$ nên chúng ta nhận thấy rằng nếu $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, với $x \neq x_0$, và $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ thì, từ Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1), sẽ tồn tại một số thực $c \in \mathbb{R}$ nằm giữa x_0 và x sao cho $A(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) = (x - x_0)f_x(c, y)$ và, do đó, $f_1(x, y) = f_x(c, y)$. Bây giờ, do

f_x liên tục tại (x_0, y_0) nên chúng ta có thể nhận thấy rằng f_1 liên tục tại (x_0, y_0) . Hơn nữa, do $f_y(x_0, y_0)$ tồn tại nên chúng ta nhận thấy rằng f_2 liên tục tại (x_0, y_0) . Như vậy, từ Bổ đề Carathéodory hai biến, chúng ta có thể suy ra rằng f khả vi tại (x_0, y_0) . Trường hợp f_y liên tục tại (x_0, y_0) được chứng minh tương tự. $\square$

Ví dụ đầu tiên dưới đây minh họa cách sử dụng Kết quả 2.4) để xác định tính khả vi, trong khi ví dụ thứ hai cho thấy rằng chiều ngược lại của Kết quả 2.4) là không đúng.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 0$ và $f(x, y) = x^2 y^2 / (x^4 + y^2)$ với mọi $(x, y) \neq (0,0)$.

Đễ dàng nhận thấy rằng $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Ngoài ra, với $(x_0, y_0) \neq (0,0)$,

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0 y_0^2 (y_0^2 - x_0^4)}{(x_0^4 + y_0^2)^2} \text{ và } f_y(x_0, y_0) = \frac{2x_0^6 y_0}{(x_0^4 + y_0^2)^2}.$$

Hơn nữa, do $(x_0^4 + y_0^2)^2 \geq y_0^4$ và $(x_0^4 + y_0^2)^2 \geq 2x_0^4 y_0^2$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $|f_x(x_0, y_0)| \leq 2|x_0| + |x_0| = 3|x_0|$, với $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, và, do đó, f_x liên tục tại $(0,0)$. Như vậy, từ Kết quả 2.4), f sẽ khả vi tại $(0,0)$. Tuy nhiên, lưu ý rằng $f_y(x_0, x_0^2) = \frac{1}{2}$, với $x_0 \neq 0$, và, do đó, f_y không liên tục tại $(0,0)$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = |xy|$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Chúng ta đã thấy rằng f khả vi tại $(0,0)$.

Giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Với mọi $h \in \mathbb{R}$ với $h \neq 0$,

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{|y_0|(|x_0 + h| - |x_0|)}{h}.$$

Như vậy, $f_x(x_0, 0) = 0$, trong khi $f_x(0, y_0)$ không tồn tại nếu $y_0 \neq 0$.

Tương tự, chúng ta có thể nhận thấy rằng $f_y(0, y_0) = 0$, trong khi $f_y(x_0, 0)$ không tồn tại nếu $x_0 \neq 0$.

Như vậy, cả f_x và f_y đều không tồn tại trên $S_\delta(0,0)$ với mọi $\delta > 0$.

Tính khả vi và đạo hàm có hướng

Bây giờ, chúng ta sẽ chỉ ra rằng nếu một hàm hai biến f là khả vi thì tất cả các đạo hàm có hướng của nó đều tồn tại và chúng đều có thể được tính bởi công thức đơn giản $D_u f = \nabla f \cdot u$. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ có khẳng định sau đây

Kết quả 2.5.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D .

Khi đó, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại (x_0, y_0) thì, với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ trong $\mathbb{R}^2$, đạo hàm có hướng $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại và, hơn nữa,

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

Chứng minh kết quả 2.5.

Giả sử (f_1, f_2) là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) .

Khi đó, với mọi $t \in \mathbb{R}$ sao cho $(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) \in D$,

$$f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0) = tu_1 f_1(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) + tu_2 f_2(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2).$$

Như vậy, bằng cách sử dụng Kết quả 3.1.2) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và tính liên tục của f_1 và f_2 tại (x_0, y_0) , chúng ta nhận thấy rằng $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại và, hơn nữa,

$$D_u f(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0)u_1 + f_2(x_0, y_0)u_2 = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2,$$

như đã tuyên bố. □

Kết quả trên cho thấy cách giải thích hình học sau đây của gradient. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$,

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta,$$

trong đó $\theta \in [0, \pi]$ là góc giữa $\nabla f(x_0, y_0)$ và u .

Như vậy, nếu chúng ta ghi nhớ một thực tế là $D_u f(x_0, y_0)$ đo tốc độ thay đổi của f theo hướng của u thì chúng ta có thể thực hiện các nhận xét sau.

1. $D_u f(x_0, y_0)$ đạt cực đại khi $\cos \theta = 1$, nghĩa là, khi $\theta = 0$. Như vậy, trong lân cận xung quanh (x_0, y_0) , $u = \nabla f(x_0, y_0)/|\nabla f(x_0, y_0)|$ là hướng mà f tăng nhanh nhất.
2. $D_u f(x_0, y_0)$ đạt cực tiểu khi $\cos \theta = -1$, nghĩa là, khi $\theta = \pi$. Như vậy, trong lân cận xung quanh (x_0, y_0) , $u = -\nabla f(x_0, y_0)/|\nabla f(x_0, y_0)|$ là hướng mà f giảm nhanh nhất.
3. $D_u f(x_0, y_0) = 0$ khi $\cos \theta = 0$, nghĩa là, khi $\theta = \pi/2$. Như vậy, trong lân cận xung quanh (x_0, y_0) , $u = \pm (f_y(x_0, y_0), -f_x(x_0, y_0))/|\nabla f(x_0, y_0)|$ là các hướng mà không có sự thay đổi của f .

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Chúng ta sẽ có $f_x = -2x$ và $f_y = -2y$. Do đó, tại $(x_0, y_0) = (1, 1)$, gradient được xác định bởi $\nabla f(1, 1) = (-2, -2)$. Như vậy, trong lân cận xung quanh $(1, 1)$, đường đi lên dốc nhất trên bề mặt $z = f(x, y)$ đi theo hướng $\nabla f(1, 1)/|\nabla f(1, 1)| = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, trong khi đường đi xuống dốc nhất lại đi theo hướng ngược lại, cụ thể là $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Các hướng không có sự thay đổi là $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Kết quả 2.5) cũng rất hữu ích trong việc chỉ ra rằng một số hàm nhất định sẽ không khả vi mặc dù có thể tồn tại gradient. Thật vậy, chúng ta chỉ cần tìm một vector đơn vị u sao cho đẳng thức $D_u f = \nabla f \cdot u$ không thỏa mãn. Mặt khác, ngay cả khi đẳng thức này đúng với mọi vector đơn vị u , hàm f cũng có thể không khả vi. Những nhận xét này được minh họa lại trong ví dụ sau đây.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dễ dàng nhận thấy rằng f liên tục tại $(0,0)$ và $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Mặt khác, với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, chúng ta sẽ có

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{|t|\sqrt{|u_1 u_2|}}{t}.$$

Điều này chỉ ra rằng đạo hàm có hướng $D_u f(0,0)$ không tồn tại bất cứ khi nào u_1 và u_2 khác không, chẳng hạn, nếu $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Như vậy, từ Kết quả 2.5), chúng ta có thể kết luận rằng f không khả vi tại $(0,0)$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 0$ và $f(x, y) = x^2 y / (x^2 + y^2)$ với mọi $(x, y) \neq (0,0)$. Chúng ta nhận thấy rằng f sẽ liên tục tại $(0,0)$. Ngoài ra, với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, chúng ta sẽ có

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t(t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2)} = u_1^2 u_2.$$

Điều này chỉ ra rằng đạo hàm có hướng $D_u f(0,0)$ tồn tại và bằng $u_1^2 u_2$. Đặc biệt, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Do đó, $D_u f(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot u$ bất cứ khi nào u_1 và u_2 khác không. Như vậy, từ Kết quả 2.5), chúng ta có thể kết luận rằng f không khả vi tại $(0,0)$.

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 0$ và $f(x, y) = x^3 y / (x^4 + y^2)$ với mọi $(x, y) \neq (0,0)$. Chúng ta nhận thấy rằng f sẽ liên tục tại $(0,0)$. Ngoài ra, với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$ và với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $t \neq 0$, chúng ta sẽ có

$$\frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^4 u_1^3 u_2}{t(t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2)} = \frac{t u_1^3 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2},$$

và, do đó, bằng cách xét riêng các trường hợp $u_2 = 0$ và $u_2 \neq 0$, chúng ta có thể nhận thấy rằng $D_u f(0,0)$ tồn tại và bằng 0. Đặc biệt, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Như vậy, $D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u$ với mọi vector đơn vị u .

Mặt khác, nếu chúng ta xét

$$Q(h, k) = \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 k}{(h^4 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}},$$

thì $Q(h, k) \nrightarrow 0$ khi $(h, k) \rightarrow (0,0)$.

Để nhận thấy điều này, chúng ta hãy xét một dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tiến đến $(0,0)$ dọc theo parabol $k = h^2$. Chẳng hạn, nếu $(a_n, b_n) = (1/n, 1/n^2)$ với $n \in \mathbb{N}$ thì $Q(a_n, b_n) \rightarrow 1/2$. Chúng ta có thể dễ dàng suy ra rằng f sẽ không khả vi tại $(0,0)$. Điều này cho thấy rằng chiều ngược lại của Kết quả 2.5) là không đúng. Trên thực tế, điều này cũng chỉ ra rằng một hàm có thể thỏa mãn tất cả các điều kiện cần để khả vi được đưa ra trong Kết quả 2.2) và Kết quả 2.5), nhưng nó vẫn có thể không khả vi.

Có thể đáng để chúng ta ghi lại hệ quả sau đây của một điều kiện cần và đủ cho tính khả vi được nêu ra trong mục này của bài viết.

Kết quả 2.6.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D .

Khi đó, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả f_x và f_y đều tồn tại trên $D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ với một số $\delta > 0$ nào đó và một trong số chúng liên tục tại (x_0, y_0) thì

(i) f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) ,

(ii) Với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2)$, đạo hàm có hướng $D_u f(x_0, y_0)$ tồn tại và, hơn nữa,

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

Chứng minh kết quả 2.6.

Từ Kết quả 2.4), f sẽ khả vi tại (x_0, y_0) . Như vậy, khẳng định (i) được suy ra từ Kết quả 2.2), trong khi khẳng định (ii) được suy ra từ Kết quả 2.5). □

Đạo hàm hàm ẩn

Trong giải tích các hàm một biến, chúng ta thường bắt gặp quá trình vi phân ngầm. Thông thường, điều này thường được áp dụng cho các phương trình có dạng $f(x, y) = 0$, được “vi phân ngầm”, coi y như là một hàm của x , để có được một phương trình như

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Bằng cách sử dụng điều này, đạo hàm của y theo x sẽ được tính tại các điểm mà $Q(x, y)$ không triệt tiêu. Để có được một quan điểm đúng đắn về quá trình này và đặt nó trên một nền tảng vững chắc, chúng ta sẽ cần phải viện đến các hàm hai biến và một kết quả quan trọng được gọi là Định lý hàm ẩn. Để bắt đầu, lưu ý rằng, trên thực tế, $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các đạo hàm riêng $f_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$, và quá trình vi phân tại một điểm có thể được chứng minh nếu quy tắc tính đạo hàm hợp có thể được áp dụng nếu phương trình $f(x, y) = 0$ thực sự xác định y như là một hàm của x , ít nhất là trong một lân cận xung quanh điểm mà tại đó đạo hàm được lấy. Định lý hàm ẩn, ở dạng được đưa ra dưới đây, cho phép chúng ta chứng minh điều sau. Có thể nhắc lại rằng chúng ta đã chứng minh một phiên bản của Định lý hàm ẩn trong ngữ cảnh của các hàm liên tục. Sau đây là phiên bản cổ điển và thường được sử dụng nhất trong thực hành.

Kết quả 2.7. (Dạng cổ điển của Định lí hàm ẩn)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0) = 0$. Giả sử tồn tại một số thực $r > 0$ với $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$ và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(a) f_x và f_y tồn tại tại mọi điểm của $S_r(x_0, y_0)$,

(b) f_y liên tục tại (x_0, y_0) và $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\eta: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\eta(x_0) = y_0$ sao cho $(x, \eta(x)) \in S_r(x_0, y_0)$ và $f(x, \eta(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; hơn nữa, η sẽ khả vi tại x_0 và

$$\eta'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Ngoài ra, nếu điều kiện (b) được thay thế bởi điều kiện (b^*) mạnh hơn:

(b^*) f_y liên tục trên $S_r(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0) \neq 0$,

thì η sẽ khả vi tại mọi điểm của $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và, hơn nữa,

$$f_y(x, \eta(x)) \neq 0 \text{ và } \eta'(x) = -\frac{f_x(x, \eta(x))}{f_y(x, \eta(x))} \text{ với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Chứng minh kết quả 2.7.

Giả sử $f_y(x_0, y_0) > 0$. Do f_y liên tục trên $S_r(x_0, y_0)$ nên, từ Kết quả 3.1.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, chúng ta nhận thấy rằng sẽ tồn tại một số thực $t > 0$ với $t \leq r$ sao cho $f_y(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in S_t(x_0, y_0)$. Do đó, từ các phép thử đạo hàm bậc nhất của phép tính một biến (chẳng hạn, khẳng định (iii) của Kết quả 3.1) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến**”, chúng ta nhận thấy rằng, với mỗi $x \in (x_0 - t, x_0 + t)$, hàm xác định bởi $y \mapsto f(x, y)$ tăng nghiêm ngặt, nghĩa là, điều kiện (b) của Định lí hàm ẩn (Kết quả 3.2.9) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” được thỏa mãn. Ngoài ra, từ điều kiện (a) nêu ở trên, chúng ta nhận thấy rằng điều kiện (a) của Kết quả 3.2.9) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” được thỏa mãn. Như vậy, tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq t \leq r$ và một hàm liên tục duy nhất $\eta: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - t, y_0 + t)$ sao cho $\eta(x_0) = y_0$ và $f(x, \eta(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Hơn nữa, từ (a), (b) và Kết quả 2.4), chúng ta nhận thấy rằng f sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và, do đó, từ Bổ đề Carathéodory hai biến (Kết quả 2.1), tồn tại các hàm $f_1, f_2: S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại (x_0, y_0) và thỏa mãn

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in S_\delta(x_0, y_0).$$

Do f_2 liên tục tại (x_0, y_0) và $f_2(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên chúng ta có thể tìm được một số thực $\delta' > 0$ sao cho $\delta' \leq \delta$ và $f_2(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in S_{\delta'}(x_0, y_0)$. Hơn nữa, do η liên tục tại x_0 nên chúng ta có thể tìm được một số thực $\delta'' > 0$ với $\delta'' \leq \delta'$ sao cho $|\eta(x) - y_0| < \delta'$ bất cứ khi nào $x \in (x_0 - \delta'', x_0 + \delta'')$.

Bằng cách đặt $y = \eta(x)$, chúng ta sẽ thu được

$$\eta(x) - \eta(x_0) = \eta(x) - y_0 = -\frac{f_1(x, \eta(x))}{f_2(x, \eta(x))}(x - x_0) \text{ với } x \in (x_0 - \delta'', x_0 + \delta'').$$

Ngoài ra, do f_1, f_2 liên tục tại (x_0, y_0) với $f_1(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ và $f_2(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên, từ Kết quả 3.1.2) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” cũng với khẳng định (ii) của Kết quả 3.1.3) và Bổ đề Carathéodory (Kết quả 4), chúng ta nhận thấy rằng η khả vi tại x_0 và $\eta'(x_0)$ thỏa mãn công thức nêu ở trên.

Cuối cùng, giả sử điều kiện (b) được thay thế bởi điều kiện (b*). Kí hiệu t, δ, η như trên. Do $\delta \leq t$ nên chúng ta sẽ có $f_y(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in S_t(x_0, y_0)$ và, do đó, $f_y(x, \eta(x)) \neq 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Cô định một số thực $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bất kì và kí hiệu $y_1 = \eta(x_1)$. Giả sử $r_1 > 0$ sao cho $S_{r_1}(x_1, y_1) \subseteq S_r(x_0, y_0)$. Bằng cách áp dụng những gì chúng ta đã chứng minh cho đến nay cho (x_1, y_1) thay vì (x_0, y_0) , chúng ta nhận thấy rằng sẽ có một số thực $\delta_1 > 0$ với $\delta_1 \leq r_1$ và một hàm liên tục duy nhất $\eta_1: (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\eta_1(x_1) = y_1$ sao cho $(x, \eta_1(x)) \in S_{r_1}(x_1, y_1)$ và $f(x, \eta_1(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$. Ngoài ra, η_1 khả vi tại x_1 và $\eta'_1(x_1) = -f_x(x_1, y_1)/f_y(x_1, y_1)$. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $\delta_1 > 0$ nhỏ đến mức $I_1 = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Bây giờ, từ tính duy nhất của η_1 , chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\eta|_{I_1} = \eta_1$. Đặc biệt, η khả vi tại x_1 và $\eta'(x_1)$ thỏa mãn công thức nêu ở trên. Do x_1 là một phần tử tùy ý của $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nên khẳng định cuối cùng trong định lí trên đã được chứng minh.

Trường hợp $f_y(x_0, y_0) < 0$ được chứng minh tương tự. □

Nhận xét rằng, như trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, chúng ta cũng có một dạng tương tự đơn giản của Dạng cổ điển của Định lí hàm ẩn, tương ứng với việc giải phương trình $f(x, y) = 0$ cho x theo y . Trong tình huống này, điều kiện (a) trong Kết quả 2.7) được giữ nguyên, trong khi ở các điều kiện (b) và (b*), chúng ta phải thay f_y bởi f_x . Kết luận ở đây sẽ là tồn tại một số thực $\delta > 0$ và một hàm $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ như trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”. Ngoài ra, ξ sẽ khả vi và $\xi' = -f_y/f_x$. Bằng cách kết hợp một trong hai tình huống nêu ở trên, chúng ta có thể đưa ra một phát biểu thống nhất cho Dạng cổ điển của Định lí hàm ẩn như sau:

“Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Giả sử hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên $S_r(x_0, y_0)$ với một số $r > 0$ nào đó với $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$. Giả sử $f(x_0, y_0) = 0$ và $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$, một số thực $t_0 \in \mathbb{R}$ và các hàm khả vi $x, y: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ và, với mọi $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, chúng ta sẽ có $(x(t), y(t)) \in S_r(x_0, y_0)$ và $f(x(t), y(t)) = 0$. Ngoài ra, $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ và $f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = 0$ với mọi $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Nói cách khác, nếu $f(x_0, y_0) = 0$ và $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ thì sẽ tồn tại một đường cong chính quy đi qua (x_0, y_0) và nằm trên mặt $z = f(x, y)$.”

Như trong Kết quả 3.2.10) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, chúng ta có thể rút ra một phiên bản cổ điển của cái gọi là **Định lí hàm ngược** cho các hàm thực một biến như một hệ quả của Dạng cổ điển của Định lí hàm ẩn.

Kết quả 2.8. (Dạng cổ điển của Định lý hàm ngược)

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong nào đó của I . Giả sử hàm $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên $(x_0 - r, x_0 + r)$ với một số $r > 0$ nào đó với $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ và $f'(x_0) \neq 0$. Kí hiệu $y_0 = f(x_0)$ và $J = f(I)$.

Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq J$ và một hàm khả vi duy nhất $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\xi(y_0) = x_0$ và $f(\xi(y)) = y$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Ngoài ra, tồn tại một số thực $t > 0$ với $t < r$ sao cho f đơn ánh trên $(x_0 - t, x_0 + t)$ và f^{-1} khả vi tại y_0 với $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Chứng minh kết quả 2.8.

Xét hàm $h: S_r(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x, y) = f(x) - y$. Khi đó, $h(x_0, y_0) = 0$, cả h_x và h_y đều tồn tại và liên tục trên $S_r(x_0, y_0)$, và $h_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$. Do đó, từ Dạng cổ điển của Định lý hàm ẩn (Kết quả 2.7), tồn tại một số thực $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\xi(y_0) = x_0$ sao cho $(\xi(y), y) \in S_r(x_0, y_0)$ và $h(\xi(y), y) = 0$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Ngoài ra, ξ khả vi tại y_0 và $\xi'(y_0) = -h_y(x_0, y_0)/h_x(x_0, y_0) = 1/f'(x_0)$. Như vậy, $f(\xi(y)) = y$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ và, đặc biệt, $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq J$. Hơn nữa, do $f'(x_0) \neq 0$ và f' liên tục trên $(x_0 - r, x_0 + r)$ nên sẽ tồn tại tại một số thực $t > 0$ với $t < r$ sao cho $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_0 - t, x_0 + t)$. Do đó, từ tính chất giá trị trung gian của f' và các phép thử đạo hàm bậc nhất của phép tính một biến (hoặc, cụ thể hơn, từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.2) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến**”), chúng ta nhận thấy rằng f là đơn điệu nghiêm ngặt, và đặc biệt, đơn ánh, trên $(x_0 - t, x_0 + t)$. Điều này chỉ ra rằng $f^{-1} = \xi$ trên $f((x_0 - t, x_0 + t))$. Ngoài ra, từ tính liên tục và tính đơn điệu nghiêm ngặt của f trên $(x_0 - t, x_0 + t)$, chúng ta nhận thấy rằng y_0 là một điểm trong của $f((x_0 - t, x_0 + t))$. Như vậy, f^{-1} khả vi tại y_0 và $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$. $\square$

Như là một hệ quả trực tiếp của Kết quả 2.8), chúng ta sẽ thu được một phiên bản khác của Định lý nghịch đảo khả vi của các phép tính một biến (Kết quả 1.5) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến**”).

Kết quả 2.9. (Định lý nghịch đảo khả vi)

Giả sử I là một khoảng mở nào đó trong $\mathbb{R}$ và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục sao cho $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in I$.

Khi đó, hàm ngược $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ với mọi $x \in I$.

Chứng minh kết quả 2.9.

Bằng cách áp dụng Kết quả 2.8) cho mỗi điểm của I , chúng ta sẽ thu được tính khả vi của f^{-1} và công thức $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ với mọi $x \in I$. Công thức này cũng hàm ý tính liên tục của đạo hàm của hàm f^{-1} , bởi vì f' liên tục và $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in I$. $\square$

3. Định lý giá trị trung bình và Công thức Taylor

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ thảo luận về hai kết quả quan trọng trong các phép tính nhiều biến được gọi là Công thức Taylor và Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp. Chúng ta đã thảo luận về Công thức Taylor bằng cách sử dụng khái niệm đạo hàm có hướng cấp cao. Ở đây, chúng ta sẽ cung cấp một phiên bản

cổ điển khác được sử dụng rộng rãi hơn trong thực tế. Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho các hàm hai (hoặc nhiều) biến chẳng qua là một dạng tương tự của Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho các hàm một biến (Kết quả 1.4) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến**”).

Công thức Taylor hai biến

Chúng ta đã thảo luận trong mục **1. Khái niệm đạo hàm riêng và đạo hàm có hướng** về sự tương tự của Định lý giá trị trung bình và Công thức Taylor cho các hàm hai biến bằng cách sử dụng khái niệm đạo hàm có hướng. Chúng ta cũng đã nêu ra các phiên bản thay thế của các kết quả này trong trường hợp các đạo hàm có hướng thỏa mãn một đồng nhất thức có dạng $D_u f = \nabla f \cdot u$. Kế tiếp, trong mục **2. Tính khả vi**, chúng ta đã thấy rằng một đẳng thức như vậy là hệ quả trực tiếp của tính khả vi của hàm, và đặc biệt, là hệ quả trực tiếp của tính liên tục của các đạo hàm riêng. Bây giờ, chúng ta có thể kết hợp tất cả những dữ kiện này lại với nhau và rút ra phiên bản cổ điển của Định lý giá trị trung bình hai biến và Công thức Taylor hai biến.

Kết quả 3.1. (Dạng cổ điển của Định lý giá trị trung bình hai biến)

Giả sử D là một tập con lồi và mở của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi bất kì.

Khi đó, với các điểm phân biệt (x_0, y_0) và (x_1, y_1) cho trước trong D , tồn tại một điểm $(c, d) \in D$ nằm trên đoạn thẳng nối giữa (x_0, y_0) và (x_1, y_1) , với $(c, d) \neq (x_i, y_i)$ với $i = 0, 1$, sao cho

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = (x_1 - x_0)f_x(c, d) + (y_1 - y_0)f_y(c, d) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \nabla f(c, d).$$

Chứng minh kết quả 3.1.

Do D là lồi nên đoạn thẳng nối giữa (x_0, y_0) và (x_1, y_1) sẽ được chứa trong D , nghĩa là, $L = \{(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) : t \in [0, 1]\} \subseteq D$. Ngoài ra, do f khả vi trên D nên, từ Kết quả 2.5), chúng ta sẽ có $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$ với mọi $(x, y) \in D$ và với mọi vector đơn vị u trong $\mathbb{R}^2$. Như vậy, kết quả mong muốn có thể được suy ra trực tiếp từ Kết quả 1.3). $\square$

Nhận thấy rằng, với kí hiệu và giả thiết như trong Kết quả 3.1), nếu chúng ta viết $h = x_1 - x_0$ và $k = y_1 - y_0$ thì kết luận của Định lý giá trị trung bình hai biến có thể được diễn giải lại dưới dạng

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

với một $\theta \in (0, 1)$ nào đó.

Kết quả 3.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con không rỗng, lồi và mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, f là một hàm hằng trên D khi và chỉ khi f khả vi và cả f_x và f_y đều triệt tiêu trên D .

Chứng minh kết quả 3.2.

Nhận thấy rằng nếu f là một hàm hằng thì rõ ràng f khả vi và $f_x = f_y = 0$ trên D . Ngược lại, giả sử f khả vi và cả f_x và f_y đều triệt tiêu trên D . Giả sử (x_0, y_0) là một điểm bất kì nằm trong D . Do $f_x = f_y = 0$

trên D nên, từ Kết quả 3.1), với mọi $(x_1, y_1) \in D$ với $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = 0$, nghĩa là, $f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0)$. Như vậy, f là một hàm hằng trên D . $\square$

Nhận thấy rằng nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ không lồi thì sẽ tồn tại các hàm khả vi trên D với gradient không triệt tiêu giống hệt nhau trên D . Chẳng hạn, nếu $D = S_1(0,0) \cup S_1(2,2)$ là hợp phân biệt của hai hình vuông mở và hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = 1$ nếu $x \in S_1(0,0)$ và $f(x, y) = 2$ nếu $x \in S_1(2,2)$ thì rõ ràng D là khác rỗng và mở, và $f_x = f_y = 0$ trên D , nhưng f không phải là một hàm hằng trên D . Điều này chứng tỏ rằng giả thiết D là lồi trong Kết quả 3.2) là không hề bị loại bỏ. Mặt khác, chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng một giả thiết yếu hơn trên D , cụ thể là D là liên thông đường, cũng đủ.

Kết quả 3.3. (Dạng cổ điển của Công thức Taylor hai biến)

Giả sử D là một tập con lồi và mở của $\mathbb{R}^2$ và n là một số nguyên không âm.

Khi đó, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho tất cả các đạo hàm riêng của f với cấp $\leq n+1$ tồn tại và liên tục trên D thì, với các điểm phân biệt (x_0, y_0) và (x_1, y_1) nằm trong D , sẽ tồn tại một điểm $(c, d) \in D$ nằm trên đoạn thẳng nối giữa (x_0, y_0) và (x_1, y_1) , với $(c, d) \neq (x_i, y_i)$ với $i = 0, 1$, sao cho

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(c, d),$$

trong đó $h = x_1 - x_0$ và $k = y_1 - y_0$.

Ngoài ra,

$$f(x_1, y_1) = P_n(x_1, y_1) + \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m=n+1}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^m}(c, d) \frac{(x_1 - x_0)^l}{l!} \frac{(y_1 - y_0)^m}{m!},$$

trong đó

$$P_n(x, y) = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m \leq n}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^l}{l!} \frac{(y - y_0)^m}{m!} \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Chứng minh kết quả 3.3.

Do D lồi nên đoạn thẳng nối giữa (x_0, y_0) và (x_1, y_1) được chứa trong D , nghĩa là, $L = \{(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)): t \in [0, 1]\} \subseteq D$.

Kí hiệu $u = (u_1, u_2)$ là vector đơn vị xác định bởi

$$u = (u_1, u_2) = \frac{1}{r}(x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$

trong đó $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Bây giờ, từ Kết quả 2.4) và Kết quả 2.5), hàm $f_0 = f$ khả vi trên D và đạo hàm có hướng $D_u f$ tồn tại tại mọi điểm của D . Tổng quát hơn, bằng cách sử dụng Kết quả 2.4) và Kết quả 2.5) cùng với một phép quy nạp trên i , chúng ta nhận thấy rằng, với $i = 1, \dots, n$, đạo hàm có hướng cấp i $D_u^i f$ tồn tại tại mọi điểm của D và, hơn nữa, nếu $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f_i = D_u^i f$ thì f_i sẽ khả vi trên D . Như vậy, từ Kết quả 2.2) và Kết quả 2.5), với mỗi $i = 0, \dots, n$, hàm f_i liên tục trên D và thỏa mãn hệ thức $D_u f_i(x, y) = \nabla f_i(x, y) \cdot u$ với mọi $(x, y) \in D$.

Như vậy, từ Kết quả 1.9), tồn tại một điểm $(c, d) \in L \setminus \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ sao cho

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(c, d),$$

trong đó $h = x_1 - x_0$ và $k = y_1 - y_0$.

Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định thứ nhất.

Để chứng minh tính đúng đắn của công thức thay thế cho $f(x_1, y_1)$, lưu ý rằng với $i = 0, \dots, n+1$, chúng ta sẽ có

$$\frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x, y) = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m=i}} \frac{\partial^i f}{\partial x^l \partial y^m}(x, y) \frac{h^l k^m}{l! m!} \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định thứ hai. □

Nhận xét,

(i) Dạng cổ điển của Định lý giá trị trung bình hai biến sẽ tương ứng với trường hợp $n = 0$ của Công thức Taylor hai biến.

(ii) Trường hợp $n = 1$ của Dạng cổ điển của Công thức Taylor hai biến đôi khi còn được gọi là **Định lý giá trị trung bình hai biến mở rộng**. Nó có thể được phát biểu lại như sau:

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con lồi và mở, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trên D .

Khi đó, với các điểm phân biệt (x_0, y_0) và (x_1, y_1) bất kỳ nằm trong D , tồn tại một điểm $(c, d) \in D$ nằm trên đoạn thẳng nối giữa (x_0, y_0) và (x_1, y_1) , với $(c, d) \neq (x_i, y_i)$ với $i = 0, 1$, sao cho

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(c, d).$$

(iii) Đa thức $P_n(x, y)$ được xác định như trong Kết quả 3.3) ở trên thường được gọi là **Đa thức Taylor (hai biến) cấp n của f xung quanh (x_0, y_0)** . Hiệu $R_n = f - P_n$ thường được gọi là **Phần dư (hai biến) cấp n** . Như vậy, Kết quả 3.3) liên hệ hàm f với Đa thức Taylor của nó bằng cách chỉ ra rằng, với mọi $(x, y) \in D$, tồn tại một điểm $(c, d) \in D$ sao cho

$$f(x, y) = P_n(x, y) + \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m=n+1}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^m}(c, d) \frac{(x - x_0)^l}{l!} \frac{(y - y_0)^m}{m!}.$$

Công thức cuối cùng đôi khi cũng được gọi là **Công thức Taylor hai biến của f xung quanh (x_0, y_0)** . Công thức này cho thấy rằng Phần dư R_n được xác định bởi

$$R_n(x, y) = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m=n+1}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^m}(c, d) \frac{(x - x_0)^l}{l!} \frac{(y - y_0)^m}{m!}, \text{ với một điểm } (c, d) \in D.$$

Hệ quả sau đây của Công thức Taylor hai biến sẽ tổng quát hóa Kết quả 3.2) và đưa ra một đặc trưng quan trọng của các hàm đa thức trên các tập con lồi mở của $\mathbb{R}^2$.

Kết quả 3.4.

Giả sử D là một tập con không rỗng, lồi và mở của $\mathbb{R}^2$, và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Giả sử n là một số nguyên không âm bất kì.

Khi đó, f sẽ là một hàm đa thức xác định trên D với tổng bậc $\leq n$ khi và chỉ khi tất cả các đạo hàm riêng của f với cấp $\leq n + 1$ đều tồn tại và liên tục trên D và, hơn nữa, tất cả các đạo hàm riêng cấp $(n + 1)$ của f đều triệt tiêu trên D .

Chứng minh kết quả 3.4.

Giả sử f là một hàm đa thức xác định trên D với tổng bậc $\leq n$, nghĩa là, $f(x, y)$ là một tổng hữu hạn của các số hạng có dạng $c_{i,j}x^i y^j$ trong đó i, j là các số nguyên không âm với $i + j \leq n$ và $c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng tất cả các đạo hàm riêng của f với cấp $\leq n + 1$ đều tồn tại và liên tục trên D và, hơn nữa, tất cả các đạo hàm riêng cấp $(n + 1)$ của f đều triệt tiêu trên D . Để chứng minh chiều ngược lại, chúng ta chỉ cần cố định một điểm $(x_0, y_0) \in D$ và áp dụng Công thức Taylor hai biến cho hàm f xung quanh (x_0, y_0) . □

Chẳng hạn,

(i) Giả sử I và J là các khoảng mở khác rỗng trong $\mathbb{R}$, và $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm một biến khả vi vô hạn.

Xét các hàm $f, g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \phi(x) + \psi(y) \text{ và } g(x, y) = \phi(x)\psi(y).$$

Giả sử $x_0 \in I, y_0 \in J$ và n là một số nguyên không âm. Nếu chúng ta lần lượt kí hiệu $P_n(\phi)$ và $P_n(\psi)$ là các đa thức Taylor cấp n của ϕ và ψ xung quanh x_0 và y_0 thì chúng ta có thể nhận thấy rằng đa thức Taylor cấp n của f xung quanh (x_0, y_0) xác định bởi $P_n(\phi)(x) + P_n(\psi)(y)$, trong khi đa thức Taylor cấp n của g xung quanh (x_0, y_0) xác định bởi tổng của các số hạng với tổng bậc $\leq n$ trong tích $P_n(\phi)(x)P_n(\psi)(y)$.

Chẳng hạn, các đa thức Taylor cấp n xung quanh $(0,0)$ của các hàm $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = e^x + e^y$ và $g(x, y) = e^{x+y}$ xác định bởi

$$P_n(f)(x, y) = \sum_{l=0}^n \frac{x^l}{l!} + \sum_{l=0}^n \frac{y^l}{l!} \text{ và } P_n(g)(x, y) = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m \leq n}} \frac{x^l}{l!} \frac{y^m}{m!}.$$

(ii) Giả sử E là một tập con mở của $\mathbb{R}$ và D là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ sao cho $\{x + y: (x, y) \in D\} \subseteq E$. Giả sử $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi vô hạn và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm xác định bởi $f(x, y) = g(x + y)$. Với mọi số nguyên không âm n bất kỳ và với mọi $(x_0, y_0) \in D$ bất kỳ, nếu $P_n(g)$ là đa thức Taylor cấp n của g xung quanh $x_0 + y_0$ thì chúng ta có thể nhận thấy rằng đa thức Taylor cấp n của f xung quanh (x_0, y_0) xác định bởi

$$\begin{aligned} P_n(f)(x, y) &= \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ l+m \leq n}} g^{(l+m)}(x_0 + y_0) \frac{(x - x_0)^l}{l!} \frac{(y - y_0)^m}{m!} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(x_0 + y_0)}{j!} \sum_{l=0}^j \frac{j!}{l! (j-l)!} (x - x_0)^l (y - y_0)^{j-l} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(x_0 + y_0)}{j!} (x + y - x_0 - y_0)^j \\ &= P_n(g)(x + y). \end{aligned}$$

Chẳng hạn, đa thức Taylor cấp n của $f: S_{1/2}(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = 1/(1 - x - y)$ xung quanh $(0,0)$ xác định bởi

Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp

Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho các hàm hai biến là một kỹ thuật được sử dụng rộng rãi để tính toán đạo hàm của các hàm hợp. Như trong Kết quả 3.1.3) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” liên quan đến tính liên tục của các hàm hợp, chúng ta sẽ phát biểu Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp thành ba phần, áp dụng cho ba cách hình thành khác nhau của các hàm hợp.

Kết quả 3.5. (Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) là một điểm trong của D và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi tại (x_0, y_0) .

(i) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}$ sao cho $f(D) \subseteq E$ và $f(x_0, y_0)$ là một điểm trong của E . Khi đó, nếu $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi tại $f(x_0, y_0)$ thì hàm $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F = g \circ f$ khả vi tại (x_0, y_0) , và

$$\nabla F(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0)) \nabla f(x_0, y_0).$$

(ii) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}$ và t_0 là một điểm trong của E . Khi đó, nếu $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi tại t_0 và nếu $(x(t), y(t)) \in D$ với mọi $t \in E$ và $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ thì hàm $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$ với mọi $t \in E$ sẽ khả vi tại t_0 , và

$$F'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

(iii) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}^2$ và (u_0, v_0) là một điểm trong của E . Khi đó, nếu $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi tại (u_0, v_0) và nếu $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ với mọi $(u, v) \in E$ và $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = (x_0, y_0)$ thì hàm $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ với mọi $(u, v) \in E$ sẽ khả vi tại (u_0, v_0) , và $\nabla F(u_0, v_0)$ sẽ được xác định bởi

$$(\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_u(x_0, y_0), y_u(x_0, y_0)), \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_v(x_0, y_0), y_v(x_0, y_0))).$$

Chứng minh kết quả 3.5.

Từ Bổ đề Carathéodory hai biến, tồn tại một cặp hàm (f_1, f_2) liên kết với f và (x_0, y_0) . Như vậy, $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) với $(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0)$, và

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Kết quả này đóng một vai trò quan trọng trong việc chứng minh các khẳng định (i), (ii), (iii).

(i) Giả sử E, g thỏa mãn các giả thiết trong khẳng định (i).

Từ Bổ đề Carathéodory (Kết quả 4), tồn tại một hàm $g_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ liên kết với g và $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Như vậy, g_1 sẽ liên tục tại z_0 với $g_1(z_0) = g'(z_0)$ và

$$g(z) - g(z_0) = (z - z_0)g_1(z) \text{ với mọi } z \in E.$$

Do $f(D) \subseteq E$ nên điều này chỉ ra rằng, với mọi $(x, y) \in D$,

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (g_1 \circ f)(x, y)[(x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y)].$$

Ngoài ra, từ Kết quả 2.2) và Kết quả 3.1.2) và khẳng định (i) của Kết quả 3.1.3) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, chúng ta nhận thấy rằng $(g_1 \circ f)f_1$ và $(g_1 \circ f)f_2$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) .

Như vậy, từ Bổ đề Carathéodory hai biến, chúng ta có thể kết luận F sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và

$$\nabla F(x_0, y_0) = (g_1 \circ f)(x_0, y_0)\nabla f(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0))\nabla f(x_0, y_0).$$

(ii) Giả sử E, t_0, x, y thỏa mãn các giả thiết trong khẳng định (ii).

Từ Bổ đề Carathéodory (Kết quả 4), tồn tại các hàm $x_1, y_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ liên kết lần lượt với x, y và t_0 .

Như vậy, x_1, y_1 sẽ liên tục tại t_0 với $(x_1(t_0), y_1(t_0)) = (x_0, y_0)$ và, với mọi $t \in E$,

$$x(t) - x(t_0) = (t - t_0)x_1(t) \text{ và } y(t) - y(t_0) = (t - t_0)y_1(t).$$

Với mọi $t \in E$ cho trước, chúng ta sẽ có $(x(t), y(t)) \in D$ và, do đó, $F(t) = f(x(t), y(t))$ sẽ thỏa mãn hệ thức

$$F(t) - F(t_0) = (t - t_0)F_1(t) \text{ với mọi } t \in E.$$

Ngoài ra, theo quan điểm của khẳng định (ii) của Kết quả 3.1.3), chúng ta nhận thấy rằng F_1 sẽ liên tục tại t_0 .

Như vậy, từ Bổ đề Carathéodory (Kết quả 4), chúng ta có thể kết luận được rằng F sẽ khả vi tại t_0 và

$$F'(t_0) = F_1(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)).$$

(iii) Giả sử $E, (u_0, v_0), x, y$ thỏa mãn các giả thiết trong khẳng định (iii).

Kí hiệu

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}: (u, v_0) \in E\} \text{ và } E_2 = \{v \in \mathbb{R}: (u_0, v) \in E\}.$$

Ngoài ra, kí hiệu $\phi, \xi: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi, \eta: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi

$$\phi(u) = x(u, v_0), \xi(u) = y(u, v_0), \psi(v) = x(u_0, v), \eta(v) = y(u_0, v).$$

Khi đó, E_1, u_0 và ϕ, ξ sẽ thỏa mãn các giả thiết trong khẳng định (ii) và, do đó, hàm $F_1: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F_1(u) = f(\phi(u), \xi(u))$, với $u \in E_1$, sẽ khả vi tại u_0 và

$$F'_1(u_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\phi'(u_0), \xi'(u_0)).$$

Tương tự, E_2, v_0 và ψ, η sẽ thỏa mãn các giả thiết trong khẳng định (ii) và, do đó, hàm $F_2: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F_2(v) = f(\psi(v), \eta(v))$, với $v \in E_2$, sẽ khả vi tại v_0 và

$$F'_2(v_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\psi'(v_0), \eta'(v_0)).$$

Ngoài ra, do $F_1(u) = f(x(u, v_0), y(u, v_0))$, với $u \in E_1$, và $F_2(v) = f(x(u_0, v), y(u_0, v))$, với $v \in E_2$ nên điều này cũng chỉ ra rằng

$$F_u(u_0, v_0) = F'_1(u_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0)),$$

$$F_v(u_0, v_0) = F'_2(v_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0)).$$

Như vậy, $\nabla F(u_0, v_0)$ sẽ thỏa mãn công thức đã tuyên bố. □

Nhận thấy rằng sẽ rất hữu ích nếu chúng ta viết lại các đồng nhất thức do Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp đưa ra bằng một kí hiệu hơi trang trọng nhưng mang tính gợi ý cao như sau:

(i) Nếu $z = f(x, y)$ và $w = g(z)$ thì w sẽ là một hàm của (x, y) , và

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} \text{ và } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

(ii) Nếu $z = f(x, y)$ và $x = x(t), y = y(t)$ thì z sẽ là một hàm của t , và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

(iii) Nếu $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v), y = y(u, v)$ thì z sẽ là một hàm của (u, v) , và

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \text{ và } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Cần lưu ý rằng các đồng nhất thức trong các khẳng định (i), (ii), (iii) nêu ở trên sẽ hợp lệ khi các đạo hàm (riêng) có liên quan được tính tại các điểm thích hợp và khi các giả thiết của Kết quả 3.5) được thỏa mãn. Theo quan điểm của Kết quả 2.4), nhận định trên sẽ đúng nếu mỗi đạo hàm (riêng) tồn tại trong một hình vuông mở xung quanh điểm liên quan và liên tục tại điểm đó.

Chúng ta cũng nhận thấy rằng các đồng nhất thức được chỉ ra trong (ii) và (iii) ở trên có thể được viết lại dưới dạng thống nhất, bằng cách sử dụng kí hiệu ma trận, như sau:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Ma trận 2×2 ở phía bên phải của đồng nhất thứ hai thường được gọi là **ma trận Jacobian của các hàm x và y đối với các biến u và v** , hoặc nói một cách chính xác hơn, là **ma trận Jacobian của phép biến đổi $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$** . Định thức của ma trận này xác định cho chúng ta một hàm $J(\Phi): E \rightarrow \mathbb{R}$ và nó thường được gọi là **Jacobian của phép biến đổi Φ** hoặc **Jacobian của các hàm x và y đối với các biến u và v** .

Như vậy,

$$J(\Phi)(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \text{ với mọi } (u, v) \in E.$$

Jacobian của các hàm x và y đối với các biến u và v đôi khi còn được kí hiệu lại bởi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Các kí hiệu tương tự cũng được sử dụng trong trường hợp n hàm của n biến.

Sẽ rất hữu ích khi ghi lại hệ quả sau đây của Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp đối với các ma trận Jacobian của các hàm hợp:

Giả sử E là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và phép biến đổi $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ như trên, nghĩa là, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, trong đó các hàm thành phần $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi trên E . Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở với $\Phi(E) \subseteq D$.

Khi đó, nếu phép biến đổi $\Psi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\Psi(x, y) = (w(x, y), z(x, y))$ có các hàm thành phần $w, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi trên D thì các hàm thành phần của $\Psi \circ \Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ sẽ khả vi trên E và

$$J(\Psi \circ \Phi)(u, v) = J(\Psi)(x(u, v), y(u, v))J(\Phi)(u, v) \text{ với mọi } (u, v) \in E.$$

Nói cách khác, Jacobian của hợp của các phép biến đổi bằng với tích của các Jacobian của các phép biến đổi thành phần.

Để nhận thấy điều này, chúng ta hãy lưu ý rằng đồng nhất thức nêu ở trên có thể được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Sự bằng nhau của các phần tử trong ma trận bên trái với các phần tử tương ứng của tích của hai ma trận bên phải là hệ quả trực tiếp của khẳng định (iii) của Kết quả 3.5).

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = xy$, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, và hàm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(z) = \sin z$, với $z \in \mathbb{R}$.

Từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp, hàm hợp $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x, y) = (g \circ f)(x, y) = \sin(xy)$ sẽ khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = (\cos xy)y \text{ và } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = (\cos xy)x.$$

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ngoài ra, kí hiệu $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $x(t) = e^t$ và $y(t) = \sin t$, với $t \in \mathbb{R}$.

Từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp, hàm hợp $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t)) = e^{2t} + \sin^2 t$ sẽ khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}$ và

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x(t))e^t + (2y(t)) \cos t = 2e^{2t} + 2 \sin t \cos t.$$

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Kí hiệu $x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $x(u, v) = u^2 - v^2$ và $y(u, v) = 2uv$, với $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp, hàm hợp $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$$

sẽ khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2(u^2 - v^2)(2u) + 2(2uv)(2v) = 4u(u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 2(u^2 - v^2)(-2v) + 2(2uv)(2u) = 4v(u^2 + v^2).$$

Như vậy, $\nabla F(u, v) = 4(u^2 + v^2)(u, v)$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Lưu ý rằng Jacobian của các hàm x và y đối với các biến u và v sẽ bằng $(2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4(u^2 + v^2)$.

(iv) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Kí hiệu $x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $x(r, \theta) = r \cos \theta$ và $y(r, \theta) = r \sin \theta$, với $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp, hàm hợp $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$$

sẽ khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (2r \cos \theta) \cos \theta + (2r \sin \theta) \sin \theta = 2r,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = (2r \cos \theta)(-r \sin \theta) + (2r \sin \theta)(r \cos \theta) = 0.$$

Như vậy, $\nabla F(r, \theta) = (2r, 0)$, với $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Lưu ý rằng Jacobian của các hàm x và y đối với các biến r và θ sẽ bằng r .

(v) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 0$ và $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, với $(x, y) \neq (0,0)$.

Xét các hàm $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $x(t) = t$ và $y(t) = t^2$, với $t \in \mathbb{R}$.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng cả f_x và f_y đều tồn tại trên $\mathbb{R}^2$ và $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, nhưng f không thể khả vi tại $(0,0)$. Ngoài ra, cả x và y đều khả vi trên $\mathbb{R}$ và $x'(t) = 1$ và $y'(t) = 2t$, với $t \in \mathbb{R}$. Mặt khác, nếu hàm $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$ thì $F(t) = 1/(1 + t^2)$ và $F'(t) = (1 - t^2)/(1 + t^2)^2$, với $t \in \mathbb{R}$.

Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng $F'(0) = 1$, trong khi $f_x(0,0)x'(0) + f_y(0,0)y'(0) = 0$.

Điều này cho thấy rằng giả thiết f khả vi trong Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp là không thể bỏ được.

4. Tính đơn điệu, tính lồi, tính lõm

Chúng ta đã thấy trong mục 1.2. **Hàm và các tính chất hình học của nó** của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” rằng khái niệm về tính đơn điệu của các hàm một biến thừa nhận hai dạng tương tự phân biệt trong bối cảnh thiết lập của các hàm thực hai biến. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ liên hệ chúng với dấu của một số đạo hàm riêng nhất định, từ đó thu được các dạng tương tự của các phép thử đạo hàm bậc nhất của các phép tính một biến. Tiếp theo, chúng ta sẽ thu được các tiêu chuẩn hữu ích cho các hàm có biến phân bị chặn cũng như cho các hàm có song biến phân bị chặn theo các đạo hàm riêng. Gradient của một hàm thực hai (hoặc nhiều) biến sẽ là một hàm vector hai (hoặc nhiều) biến. Chúng ta sẽ nhận thấy rằng có một khái niệm tự nhiên về tính đơn điệu của các hàm như vậy. Khi đó, chúng ta sẽ liên hệ tính đơn điệu của gradient với các khái niệm về tính lồi và tính lõm của các hàm hai (hoặc nhiều) biến.

Tính đơn điệu và các đạo hàm riêng cấp một

Nhắc lại rằng một hàm $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên một tích của các khoảng I và J trong $\mathbb{R}$ sẽ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J \text{ và } (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2).$$

Nếu điều kiện này được thỏa mãn với $\leq$ được thay bởi $\geq$ trong các bất đẳng thức nêu trên thì f sẽ được gọi là **đơn điệu giảm**.

Trên thực tế, tính đơn điệu của một hàm hai biến cũng giống như tính đơn điệu của mỗi một trong hai biến. Tương tự, việc lấy đạo hàm riêng của một hàm hai biến cũng có nghĩa là chúng ta sẽ coi nó như là một hàm một biến (coi biến kia là hằng số) và lấy đạo hàm như trong đối với các phép tính một biến.

Như vậy, thật tự nhiên khi mong đợi rằng đặc trưng sau đây sẽ đúng:

Kết quả 4.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và I, J là các khoảng bất kì trong $\mathbb{R}$ sao cho $I \times J \subseteq D$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả f_x và f_y đều tồn tại trên $I \times J$.

Khi đó,

(i) f đơn điệu tăng trên $I \times J \Leftrightarrow f_x \geq 0$ và $f_y \geq 0$ trên $I \times J$.

(ii) f đơn điệu giảm trên $I \times J \Leftrightarrow f_x \leq 0$ và $f_y \leq 0$ trên $I \times J$.

Chứng minh kết quả 4.1.

(i) Giả sử f đơn điệu tăng trên $I \times J$. Khi đó, với mọi (x_0, y_0) cho trước, chúng ta nhận thấy rằng $[f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]/h \geq 0$ với mọi $h \in \mathbb{R}$ sao cho $h \neq 0$ và $(x_0 + h, y_0) \in I \times J$. Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $h \rightarrow 0$, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $f_x(x_0, y_0) \geq 0$. Tương tự, chúng ta cũng nhận thấy rằng $f_y(x_0, y_0) \geq 0$.

Ngược lại, giả sử $f_x \geq 0$ và $f_y \geq 0$ trên $I \times J$. Giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ sao cho $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_1)$. Điều này sẽ là hiển nhiên nếu $x_1 = x_2$. Nếu $x_1 < x_2$ thì chúng ta sẽ xét hàm $\phi: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(t) = f(t, y_1)$, với $t \in [x_1, x_2]$. Bằng cách sử dụng Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1), chúng ta nhận thấy rằng $\phi(x_2) - \phi(x_1) = \phi'(c)(x_2 - x_1)$ với một số $c \in \mathbb{R}$ nào đó với $x_1 < c < x_2$. Như vậy, $f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1) = f_x(c, y_1)(x_2 - x_1) \geq 0$, nghĩa là, $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_1)$. Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $f(x_2, y_1) \leq f(x_2, y_2)$. Điều này sẽ là hiển nhiên nếu $y_1 = y_2$, trong khi nếu $y_1 < y_2$ thì điều này sẽ xảy ra theo cách tương tự bằng cách áp dụng Định lý giá trị trung bình (Kết quả 1) cho hàm $\psi: [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(s) = f(x_2, s)$, với $s \in [y_1, y_2]$. Bằng cách kết hợp hai bất đẳng thức nêu ở trên, chúng ta sẽ thu được $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$.

Như vậy, f đơn điệu tăng trên $I \times J$.

(ii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự như ở khẳng định (i). Ngoài ra, (ii) có thể được suy ra từ (i) bằng cách áp dụng (i) cho $-f$. □

Tính song đơn điệu và các đạo hàm riêng hỗn hợp

Nhắc lại rằng một hàm $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên một tích của các khoảng I và J trong $\mathbb{R}$ sẽ được gọi là **song đơn điệu tăng** nếu

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).$$

Nếu điều kiện này được thỏa mãn với $\leq$ được thay bởi $\geq$ trong các bất đẳng thức nêu trên thì f sẽ được gọi là **song đơn điệu giảm**.

Hóa ra là những khái niệm này lại thừa nhận một đặc trưng đơn giản theo các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai như sau:

Kết quả 4.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và I, J là các khoảng bất kì trong $\mathbb{R}$ sao cho $I \times J \subseteq D$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả f_x và f_{xy} đều tồn tại trên $I \times J$.

Khi đó,

(i) f tăng song song trên $I \times J \Leftrightarrow f_{xy} \geq 0$ trên $I \times J$.

(ii) f giảm song song trên $I \times J \Leftrightarrow f_{xy} \leq 0$ trên $I \times J$.

Chứng minh kết quả 4.2.

(i) Giả sử f tăng song song trên $I \times J$.

Với mọi điểm $(x_0, y_0) \in I \times J$ cho trước và với các số thực khác không $h, k \in \mathbb{R}$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{hk} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right), \end{aligned}$$

bất cứ khi nào $(x_0 + h, y_0 + k) \in I \times J$.

Bằng cách chuyển qua giới hạn, đầu tiên, khi $h \rightarrow 0$ và, sau đó, khi $k \rightarrow 0$, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $f_{xy}(x_0, y_0) \geq 0$.

Ngược lại, giả sử $f_{xy} \geq 0$ trên $I \times J$. Giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ sao cho $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$.

Nhận thấy rằng nếu $x_1 < x_2$ và $y_1 < y_2$ thì, từ Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.5), sẽ tồn tại một điểm $(c, d) \in I \times J$ sao cho

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) = f_{xy}(c, d)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Ngoài ra, biểu thức ở bên trái sẽ bằng 0 nếu $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$.

Điều này chỉ ra rằng f tăng song song trên $I \times J$.

(ii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự như ở khẳng định (i). Ngoài ra, (ii) có thể được suy ra từ (i) bằng cách áp dụng (i) cho $-f$. □

Nhận thấy rằng các đặc trưng tương tự như trong Kết quả 4.2) vẫn đúng nếu chúng ta thay thế f_x và f_{xy} bởi f_y và f_{yx} .

Biến phân bị chặn và tính bị chặn của các đạo hàm riêng cấp một

Nhắc lại rằng một hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ được gọi là **có biến phân bị chặn** trên $[a, b] \times [c, d]$ nếu tập tất cả các tổng hữu hạn có dạng

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})|,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ là các điểm bất kì trên $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$(a, c) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_{n-1}, y_{n-1}) \leq (x_n, y_n) = (b, d),$$

bị chặn trên.

Chúng ta đã thấy trong mục **1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó** của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” rằng một hàm thực xác định trên một hình chữ nhật sẽ có biến phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm thực tăng đơn điệu. Trên thực tế, không phải lúc nào chúng ta cũng có thể dễ dàng xác minh xem một hàm cho trước có phải là có biến phân bị chặn hay không bằng cách sử dụng định nghĩa hoặc đặc trưng này. Tuy nhiên, tiêu chuẩn đơn giản sau đây sẽ thường rất hữu ích trong thực hành.

Kết quả 4.3.

Giả sử hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ và khả vi trên $(a, b) \times (c, d)$. Giả sử f_x tồn tại và bị chặn trên $(a, b) \times [c, d]$, trong khi f_y tồn tại và bị chặn trên $[a, b] \times (c, d)$.

Khi đó, f sẽ có biến phân bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 4.3.

Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$ là một số thực sao cho $|f_x(u, v)| \leq \alpha$ với mọi $(u, v) \in (a, b) \times [c, d]$ và $|f_y(u, v)| \leq \alpha$ với mọi $(u, v) \in [a, b] \times (c, d)$. Giả sử $n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ là các điểm bất kì trên $\mathbb{R}^2$ sao cho

$$(a, c) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_{n-1}, y_{n-1}) \leq (x_n, y_n) = (b, d).$$

Theo quan điểm của Bất đẳng thức giá trị trung bình hai biến (Kết quả 1.3) cùng với Kết quả 2.5), chúng ta nhận thấy rằng

$$|f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| \leq \alpha(x_i - x_{i-1} + y_i - y_{i-1}), \text{ với } i = 1, \dots, n,$$

và, do đó,

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| \leq \alpha(b - a + d - c).$$

Như vậy, f sẽ có biến phân bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

□

Phép chứng minh trên không chỉ chỉ ra rằng một hàm f như trong Kết quả 4.3) sẽ có biên phân bị chặn mà còn đưa ra một cận trên cho tổng biên phân của f trên $[a, b] \times [c, d]$. Ngoài ra, chúng ta cũng có một hệ quả hữu ích sau đây, có lẽ sẽ hữu ích hơn trong thực hành.

Kết quả 4.4.

Nếu hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì f sẽ có biên phân bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 4.4.

Từ Kết quả 2.4), f sẽ khả vi trên $(a, b) \times (c, d)$. Ngoài ra, từ Kết quả 3.2.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, các đạo hàm riêng cấp một f_x và f_y sẽ bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$. Như vậy, kết quả mong muốn có thể được suy ra trực tiếp từ Kết quả 4.3). $\square$

Song biên phân bị chặn và tính bị chặn của các đạo hàm riêng hỗn hợp

Nhắc lại rằng một hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ được gọi là **có song biên phân bị chặn** trên $[a, b] \times [c, d]$ nếu tập tất cả các tổng kép hữu hạn có dạng

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)|,$$

trong đó $n, m \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$ là các điểm bất kì trên $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b \text{ và } c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{m-1} \leq y_m = d,$$

bị chặn trên.

Chúng ta đã thấy trong mục **1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó** của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” rằng một hàm thực xác định trên một hình chữ nhật sẽ có song biên phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm thực tăng song song. Một lần nữa, trên thực tế, không phải lúc nào chúng ta cũng có thể dễ dàng xác minh xem một hàm cho trước có phải là có song biên phân bị chặn hay không bằng cách sử dụng định nghĩa hoặc đặc trưng này. Tuy nhiên, tiêu chuẩn đơn giản sau đây sẽ thường rất hữu ích trong thực hành.

Kết quả 4.5.

Giả sử hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử f_x tồn tại và liên tục trên $(a, b) \times [c, d]$, trong khi f_{xy} tồn tại và bị chặn trên $(a, b) \times (c, d)$.

Khi đó, f sẽ có song biên phân bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 4.5.

Giả sử $\beta \in \mathbb{R}$ là một số thực sao cho $|f_{xy}(u, v)| \leq \beta$ với mọi $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$. Giả sử $m, n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$ là các điểm bất kì trên $\mathbb{R}^2$ sao cho

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b \text{ và } c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{m-1} \leq y_m = d.$$

Với $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, m$, bằng cách sử dụng Bất đẳng thức giá trị trung bình cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.6), chúng ta có thể nhận thấy rằng

$$|f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq \beta A_{ij},$$

trong đó $A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Kế tiếp, do $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} = (b - a)(d - c)$ nên, do đó,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq \beta(b - a)(d - c).$$

Như vậy, f sẽ có song biên phân bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$. □

Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng một kết quả tương tự như Kết quả 4.5) vẫn đúng nếu chúng ta thay thế f_x và f_{xy} bởi f_y và f_{yx} .

Phép chứng minh trên không chỉ chỉ ra rằng một hàm f như trong Kết quả 4.5) sẽ có song biên phân bị chặn mà còn đưa ra một cận trên cho tổng song biên phân của f trên $[a, b] \times [c, d]$.

Tính lồi và tính đơn điệu của gradient

Các khái niệm về các hàm lồi và các hàm lõm hai biến đã được thảo luận trong mục **1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó** của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”. Như đối với các phép tính một biến, chúng ta cũng có thể liên hệ các khái niệm này với tính đơn điệu của đạo hàm (toàn phần), mà chúng ta sẽ định nghĩa ngay bây giờ.

Để thúc đẩy điều này, trước tiên chúng ta hãy lưu ý rằng nếu $I \subseteq \mathbb{R}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$ thì $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ được gọi là **tăng đơn điệu** nếu, với mọi $x_1, x_2 \in I$ với $x_1 < x_2$, chúng ta có $f(x_1) \leq f(x_2)$. Một cách tương đương, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là tăng đơn điệu khi và chỉ khi

$$(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0 \text{ với mọi } x_1, x_2 \in I.$$

Điều kiện này có thể dễ dàng tổng quát hóa nếu chúng ta thay thế hàm một biến bởi gradient của một hàm hai (hoặc nhiều) biến và thay thế phép nhân các số thực bởi tích vô hướng của các vector.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở và lồi, và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi bất kì.

Chúng ta sẽ nói rằng **∇f tăng đơn điệu trên D** nếu

$$(\nabla f(x_2, y_2) - \nabla f(x_1, y_1)) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0 \text{ với mọi } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D.$$

Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng **∇f giảm đơn điệu trên D** nếu

$$(\nabla f(x_2, y_2) - \nabla f(x_1, y_1)) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \leq 0 \text{ với mọi } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D.$$

Chúng ta sẽ nói rằng **∇f đơn điệu trên D** nếu nó tăng đơn điệu hoặc giảm đơn điệu trên D .

Bây giờ, chúng ta sẽ thấy rằng tính lồi hoặc lõm của f có thể được đặc trưng theo tính đơn điệu của ∇f theo cách hoàn toàn giống như trong trường hợp các hàm một biến. Đầu tiên, chúng ta sẽ cần đến một kết quả phụ trợ như sau.

Kết quả 4.6.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở và lồi, và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi bất kì.

Khi đó, nếu f khả vi tại một điểm $(x_0, y_0) \in D$ nào đó và f lồi trên D thì

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Ngược lại, nếu f khả vi trên D và thỏa mãn

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \text{ với mọi } (x_0, y_0), (x, y) \in D,$$

thì f sẽ lồi trên D .

Chứng minh kết quả 4.6.

Giả sử f khả vi tại một điểm $(x_0, y_0) \in D$ nào đó và f lồi trên D . Giả sử (f_1, f_2) là một cặp hàm liên kết với f và (x_0, y_0) .

Khi đó, các hàm $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) và

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Cố định một điểm $(x, y) \in D$ bất kì. Kí hiệu $h = x - x_0$ và $k = y - y_0$.

Khi đó, với mọi $t \in (0, 1)$, điểm $(x_0 + th, y_0 + tk) = t(x, y) + (1 - t)(x_0, y_0)$ sẽ nằm trong D bởi vì D lồi; ngoài ra, do f lồi nên chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} f(x_0 + th, y_0 + tk) &\leq tf(x, y) + (1 - t)f(x_0, y_0) \\ &= t[f(x, y) - f(x_0, y_0)] + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $t \in (0, 1)$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} t[f(x, y) - f(x_0, y_0)] &\geq f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0) \\ &= t[hf_1(x_0 + th, y_0 + tk) + kf_2(x_0 + th, y_0 + tk)]. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng, với mọi $t \in (0, 1)$, chúng ta sẽ có

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq hf_1(x_0 + th, y_0 + tk) + kf_2(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Do $(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0)$ nên, bằng cách chuyển qua giới hạn khi $t \rightarrow 0^+$ và sử dụng tính liên tục của f_1, f_2 tại (x_0, y_0) , chúng ta nhận thấy rằng

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Điều này chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức mong muốn.

Ngược lại, giả sử f khả vi trên D và thỏa mãn

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \text{ với mọi } (x_0, y_0), (x, y) \in D.$$

Xét các điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ bất kì và một số thực $t \in (0, 1)$.

Kí hiệu

$$(x_0, y_0) = (1 - t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Do D lồi nên $(x_0, y_0) \in D$. Ngoài ra, từ giả thiết của bài toán, chúng ta sẽ có

$$f(x_i, y_i) - f(x_0, y_0) \geq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_i - x_0, y_i - y_0) \text{ với } i = 1, 2.$$

Bằng cách nhân bất đẳng thức tương ứng với $i = 1$ với $(1 - t)$, bất đẳng thức tương ứng với $i = 2$ với t , và cộng cả hai chúng lại với nhau, chúng ta sẽ thu được

$$[(1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2)] - f(x_0, y_0) \geq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_3, y_3),$$

trong đó $(x_3, y_3) = (1 - t)(x_1 - x_0, y_1 - y_0) + t(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$.

Nhưng do $(x_3, y_3) = (1 - t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) - (x_0, y_0) = (0, 0)$ nên chúng ta sẽ có

$$f(x_0, y_0) \leq (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2).$$

Điều này chứng tỏ rằng f lồi trên D . □

Nhận thấy rằng phép chứng minh của “chiều ngược lại” của Kết quả 4.6) hoàn toàn không cần sử dụng đến giả thiết cơ bản f khả vi, ngoại trừ sự tồn tại của gradient ∇f . Trên thực tế, khẳng định đầu tiên trong kết quả nêu ở trên cũng có thể được chứng minh theo giả thiết yếu hơn $\nabla f(x_0, y_0)$ tồn tại. Điều này có thể được suy ra từ một tính chất tổng quát của các hàm lồi: **“Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con lồi và mở, $(x_0, y_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi sao cho $\nabla f(x_0, y_0)$ tồn tại thì f sẽ khả vi tại (x_0, y_0) ”**. Phép chứng minh cho tính chất này hơi mang tính kỹ thuật và sẽ không thật cần thiết để trình bày trong bài viết này.

Kết quả tiếp theo là một đặc trưng cơ bản của tính lồi của một hàm hai biến f xét theo tính lồi của các hàm một biến thu được bằng cách thu hẹp f trên các đoạn thẳng khác nhau trong tập xác định của f .

Kết quả 4.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con lồi và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, f sẽ lồi trên D nếu và chỉ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, hàm $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$ là lồi trên $[0, 1]$.

Chứng minh kết quả 4.7.

Giả sử f lồi trên D . Cố định các điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ bất kì và xét hàm $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$. Với mọi $t_1, t_2 \in [0, 1]$ cho trước và với mọi $\lambda \in (0, 1)$, chúng ta hãy chọn $t = (1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2$.

Khi đó, $t \in (t_1, t_2)$ và

$$\begin{aligned}x_1 + t(x_2 - x_1) &= [(1 - \lambda) + \lambda]x_1 + [(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2](x_2 - x_1) \\&= (1 - \lambda)[(1 - t_1)x_1 + t_1 x_2] + \lambda[(1 - t_2)x_1 + t_2 x_2].\end{aligned}$$

Như vậy, nếu chúng ta kí hiệu $u_1 = (1 - t_1)x_1 + t_1 x_2$ và $u_2 = (1 - t_2)x_1 + t_2 x_2$ thì $x_1 + t(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2$. Tương tự, nếu chúng ta kí hiệu $v_1 = (1 - t_1)y_1 + t_1 y_2$ và $v_2 = (1 - t_2)y_1 + t_2 y_2$ thì $y_1 + t(y_2 - y_1) = (1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2$.

Bây giờ, do D lồi, $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$ và, hơn nữa, f lồi nên

$$F(t) = f((1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) \leq (1 - \lambda)f(u_1, v_1) + \lambda f(u_2, v_2).$$

Điều này chỉ ra rằng $F((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq (1 - \lambda)F(t_1) + \lambda F(t_2)$.

Như vậy, F lồi trên $[0, 1]$.

Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai điểm bất kì của D và giả sử hàm $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$ là lồi trên $[0, 1]$.

Khi đó,

$$F(t) = F((1 - t).0 + t.1) \leq (1 - t)F(0) + tF(1) \text{ với mọi } t \in (0, 1),$$

và, do đó,

$$f((1 - t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \leq (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) \text{ với mọi } t \in (0, 1).$$

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của kết quả mong muốn. □

Nhận thấy rằng phép lập luận được sử dụng trong phần đầu tiên của phép chứng minh nêu ở trên cũng có thể được sử dụng để chứng minh một **phiên bản cục bộ của Kết quả 4.7**; cụ thể, “**Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con lồi, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi trên D , $(x_0, y_0) \in D$ là một điểm sao cho $(x_0 + th, y_0 + tk) \in D$ với mọi $t \in I$ và $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, trong đó I là một khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$ có chứa 0, thì $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$, với $t \in I$, sẽ là một hàm lồi trên D** ”.

Để nhận thấy điều này, lưu ý rằng, với mọi $t_1, t_2 \in I$ và với mọi $\lambda \in (0, 1)$, chúng ta sẽ có

$$x_0 + [(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2]h = (1 - \lambda)(x_0 + t_1 h) + \lambda(x_0 + t_2 h),$$

và

$$y_0 + [(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2]k = (1 - \lambda)(y_0 + t_1 k) + \lambda(y_0 + t_2 k);$$

do đó, từ tính lồi của f trên D , chúng ta sẽ thu được

$$\begin{aligned}F((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) &\leq (1 - \lambda)f(x_0 + t_1 h, y_0 + t_1 k) + \lambda f(x_0 + t_2 h, y_0 + t_2 k) \\&= (1 - \lambda)F(t_1) + \lambda F(t_2),\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng F lồi trên I . □

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh một đặc trưng của tính lồi theo tính đơn điệu của gradient.

Kết quả 4.8.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và lồi, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi bất kì trên D .

Khi đó,

$$f \text{ lồi trên } D \Leftrightarrow \nabla f \text{ tăng đơn điệu trên } D.$$

Chứng minh kết quả 4.8.

Giả sử f lồi trên D . Giả sử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai điểm bất kì của D .

Từ Kết quả 4.6), chúng ta sẽ có

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \geq \nabla f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

và

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \geq \nabla f(x_2, y_2) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Bằng cách cộng hai bất đẳng thức nêu ở trên, chúng ta sẽ thu được

$$(\nabla f(x_2, y_2) - \nabla f(x_1, y_1)) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0.$$

Như vậy, ∇f tăng đơn điệu trên D .

Ngược lại, giả sử ∇f tăng đơn điệu trên D . Cố định các điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) bất kì nào đó trong D . Giả sử $E = \{t \in \mathbb{R}: (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) \in D\}$. Lưu ý rằng do D lồi nên E sẽ có chứa khoảng $[0,1]$.

Giả sử $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ và $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \text{ và } F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Do D mở trong $\mathbb{R}^2$ nên, từ Kết quả 3.1.7) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”, chúng ta có thể nhận thấy rằng E là một tập mở trong $\mathbb{R}$. Từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp (khẳng định (ii) của Kết quả 3.5), F sẽ khả vi và, với mọi $t \in E$, chúng ta sẽ có

$$F'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Đặc biệt, với mọi $t_1, t_2 \in [0,1]$, chúng ta sẽ có

$$F'(t_2) - F'(t_1) = [\nabla f(x(t_2), y(t_2)) - \nabla f(x(t_1), y(t_1))] \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Bây giờ, do $(x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1)) = (t_2 - t_1)(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $(t_2 - t_1)(F'(t_2) - F'(t_1))$ sẽ bằng

$$[\nabla f(x(t_2), y(t_2)) - \nabla f(x(t_1), y(t_1))] \cdot (x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1)).$$

Ngoài ra, do ∇f đơn điệu trên D nên chúng ta sẽ có $(t_2 - t_1)(F'(t_2) - F'(t_1)) \geq 0$. Điều này chỉ ra rằng F' tăng đơn điệu trên $[0,1]$. Do đó, theo một kết quả tiêu chuẩn trong các phép tính một biến (khẳng định (i) của Kết quả 3.4) của bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến**”), F lồi trên $[0,1]$. Như vậy, từ Kết quả 4.7), chúng ta có thể kết luận được rằng f lồi trên D . $\square$

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở và lồi, và giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Rõ ràng là f sẽ lồi trên D nếu và chỉ nếu $-f$ lồi trên D . Ngoài ra, nếu f khả vi trên D thì ∇f sẽ giảm đơn điệu trên D nếu và chỉ nếu $\nabla(-f)$ tăng đơn điệu trên D .

Như vậy, Kết quả 4.8) ngụ ý tính đúng đắn của đặc trưng cơ bản sau đây của tính lồi:

$$f \text{ lồi trên } D \Leftrightarrow \nabla f \text{ giảm đơn điệu trên } D.$$

Các khái niệm về tính lồi nghiêm ngặt và tính lồi nghiêm ngặt của một hàm thực hai biến cũng có thể được định nghĩa bằng cách thay đổi các bất đẳng thức $\leq$ và $\geq$ trong định nghĩa của tính lồi và tính lồi tương ứng thành $<$ và $>$. Tương tự, chúng ta cũng có thể dễ dàng hình thành các khái niệm về gradient tăng hoặc giảm nghiêm ngặt. Bây giờ, mỗi một trong các kết quả trong tiêu mục này của bài viết đều có một dạng tương tự cho các hàm lồi nghiêm ngặt. Đặc biệt, nếu f khả vi thì chúng ta sẽ có đặc trưng sau đây:

$$f \text{ lồi nghiêm ngặt trên } D \Leftrightarrow \nabla f \text{ tăng nghiêm ngặt trên } D.$$

Bằng cách áp dụng điều này cho $-f$, chúng ta cũng nhận thấy rằng

$$f \text{ lồi nghiêm ngặt trên } D \Leftrightarrow \nabla f \text{ giảm nghiêm ngặt trên } D.$$

Như vậy, chúng ta cũng có thể thu được các kết quả tương tự như trong các phép tính một biến đối với các hàm lồi và lồi nghiêm ngặt.

Tính lồi và tính không âm của Hessian

Bây giờ, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát xem liệu việc mô tả đặc trưng của tính lồi của một hàm một biến theo tính không âm của đạo hàm cấp hai của nó có một dạng tương tự cho một hàm hai biến hay không. Để đạt được mục đích này, trước tiên chúng ta phải tính đến thực tế là nếu f là một hàm hai biến thì có bốn đạo hàm riêng cấp hai có thể có, cụ thể là $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$. Nếu chúng hoạt động tốt thì chúng ta sẽ có $f_{xy} = f_{yx}$ và chúng ta chỉ cần xem xét ba. Nói chung, chúng có thể được ghi lại dưới dạng

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Bằng cách xem h và k như là các biến và tính giá trị của các đạo hàm riêng tại một điểm cụ thể, chúng ta sẽ thu được một đa thức thuần nhất $Q(h, k)$ với tổng bậc bằng 2 theo (h, k) xác định bởi

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2, \text{ trong đó } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Một đa thức $Q(h, k)$ như vậy sẽ được gọi là một **dạng toàn phương bậc hai theo các biến h và k** . Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D thì, với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, dạng toàn phương bậc hai liên kết

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

sẽ được gọi là **dạng Hessian của f tại (x_0, y_0)** .

Nói chung, một dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k)$ sẽ được gọi là **xác định không âm** nếu nó luôn nhận các giá trị không âm, nghĩa là, $Q(s, t) \geq 0$ với mọi $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Với $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ như trên, chúng ta sẽ nói rằng dạng Hessian của f là **xác định không âm trên D** nếu dạng Hessian của f tại (x_0, y_0) là xác định không âm với mọi $(x_0, y_0) \in D$.

Hóa ra tính không âm của đạo hàm cấp hai của một hàm một biến sẽ tương tự như tính xác định không âm của dạng Hessian của một hàm hai biến. Đây sẽ là chủ đề mà chúng ta sẽ phát triển trong phần còn lại của tiểu mục này.

Kết quả 4.9.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập con mở và lồi, và giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D .

Khi đó,

$$f \text{ lồi trên } D \Leftrightarrow \text{dạng Hessian của } f \text{ là xác định không âm trên } D.$$

Chứng minh kết quả 4.9.

Nhận thấy rằng do các đạo hàm riêng cấp một của f tồn tại và liên tục trên D nên, từ Kết quả 2.4), chúng ta nhận thấy rằng f sẽ khả vi trên D .

Giả sử f lồi trên D . Giả sử $(x_0, y_0) \in D$ và $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Do D mở nên sẽ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $(x_0 + th, y_0 + tk) \in D$ với mọi $t \in (-\delta, \delta)$. Xét hàm $F: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ với mọi $t \in (-\delta, \delta)$. Từ Kết quả 2.4) và Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp (khẳng định (ii) của Kết quả 3.5), F sẽ khả vi và, với mọi $t \in (-\delta, \delta)$, chúng ta sẽ có

$$F'(t) = (hf_x + kf_y)(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Bằng cách áp dụng cách lập luận tương tự cho F' , chúng ta sẽ nhận thấy rằng F sẽ khả vi hai lần và, với mọi $t \in (-\delta, \delta)$, chúng ta sẽ có

$$F''(t) = (h[hf_{xx} + kf_{xy}] + k[hf_{yx} + kf_{yy}])(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Như vậy, theo quan điểm của Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp (Kết quả 1.7), chúng ta sẽ có

$$F''(t) = \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Bây giờ, theo quan điểm của Kết quả 4.7), F lồi trên $(-\delta, \delta)$ và, do đó, theo một kết quả tiêu chuẩn trong các phép tính một biến (khẳng định (i) của Kết quả 3.5) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”), chúng ta sẽ có $F''(t) \geq 0$ với mọi $t \in (-\delta, \delta)$.

Đặc biệt, $F''(0) \geq 0$ và, do đó,

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng dạng Hessian của f xác định không âm trên D .

Ngược lại, giả sử dạng Hessian của f xác định không âm trên D . Giả sử $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ và chọn $h = x - x_0$ và $k = y - y_0$. Từ Định lý giá trị trung bình hai biến mở rộng, tồn tại một điểm $(c, d) \in D$ sao cho

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(c, d).$$

Ngoài ra, do dạng Hessian của f tại (c, d) xác định không âm nên chúng ta sẽ thu được

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Như vậy, từ Kết quả 4.6), f lồi trên D . □

Một dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ được gọi là **xác định dương** nếu $Q(s, t) > 0$ với mọi $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ với $(s, t) \neq (0, 0)$. Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ như trong Kết quả 4.9) thì dạng Hessian của f sẽ được gọi là **xác định dương trên D** nếu dạng Hessian của f tại (x_0, y_0) là xác định dương với mọi $(x_0, y_0) \in D$.

Đối với một hàm f như vậy,

dạng Hessian của f xác định dương trên $D \Rightarrow f$ lồi nghiêm ngặt trên D .

Điều này có thể được chứng minh bằng cách sử dụng các lập luận hoàn toàn tương tự như các lập luận trong nửa sau của phép chứng minh của Kết quả 4.9). Tuy nhiên, như trong trường hợp các hàm một biến, chiều ngược lại của khẳng định trên lại không đúng. Chẳng hạn, nếu hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^4 + y^4$ thì f sẽ lồi nghiêm ngặt nhưng dạng Hessian của f tại $(0, 0)$ lại không xác định dương.

Như một tiên nghiệm, tính xác định không âm của dạng Hessian của một hàm dường như không phải là một điều kiện có thể dễ kiểm tra trong thực hành. Nói chung, để biết một dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k)$ xác định không âm, dường như yêu cầu thay thế tất cả các cặp số thực (s, t) để kiểm tra xem giá trị kết quả $Q(s, t)$ có phải là không âm hay không là một việc không khả thi. Thật thú vị, điều này lại thường có thể tránh được bởi vì có một phép thử đơn giản và thực tế để kiểm tra xem một dạng toàn phương bậc hai có xác định không âm hay không. Phép thử này sẽ được đưa ra trong mệnh đề sau trong một thiết lập thuần túy đại số, và sau này chúng ta sẽ sử dụng nó để suy ra một tiêu chuẩn đơn giản cho tính lồi.

Kết quả 4.10.

Giả sử $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ là một dạng toàn phương bậc hai theo các biến h và k với các hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

$$Q(h, k) \text{ xác định không âm} \Leftrightarrow a \geq 0, c \geq 0 \text{ và } ac - b^2 \geq 0.$$

Chứng minh kết quả 4.10.

Giả sử $Q(h, k)$ xác định không âm.

Khi đó, $a = Q(1, 0) \geq 0$ và $c = Q(0, 1) \geq 0$.

Trong trường hợp $a \neq 0$, xét

$$Q(b, -a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = ca^2 - ab^2 = a(ac - b^2).$$

Do $Q(b, -a) \geq 0$ và $a > 0$ nên chúng ta nhận thấy rằng $ac - b^2 \geq 0$.

Kế tiếp, trong trường hợp $a = 0$ và $c \neq 0$, xét

$$Q(c, -b) = ac^2 - 2cb^2 + cb^2 = ac^2 - cb^2 = c(ac - b^2).$$

Do $Q(c, -b) \geq 0$ và $c > 0$ nên chúng ta nhận thấy rằng $ac - b^2 \geq 0$.

Cuối cùng, trong trường hợp $a = 0$ và $c = 0$, chúng ta sẽ có $2b = Q(1, 1) \geq 0$ và $-2b = Q(1, -1) \geq 0$, nghĩa là $b = 0$. Như vậy, trong trường hợp này, $ac - b^2 = 0$.

Ngược lại, giả sử $a \geq 0, c \geq 0$ và $ac - b^2 \geq 0$. Kí hiệu $\Delta = ac - b^2$.

Trong trường hợp $a > 0$, đồng nhất thức

$$aQ(h, k) = a^2h^2 + 2abhk + ack^2 = (ah + bk)^2 + \Delta k^2$$

ngụ ý rằng $Q(s, t) \geq 0$ với mọi $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Trong trường hợp $c > 0$, đồng nhất thức

$$cQ(h, k) = ach^2 + 2bchk + c^2k^2 = (bh + ck)^2 + \Delta h^2$$

ngụ ý rằng $Q(s, t) \geq 0$ với mọi $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Trong trường hợp $a = c = 0$, điều kiện $ac - b^2 \geq 0$ ngụ ý rằng $b = 0$ và, do đó, $Q(s, t) = 0$ với mọi $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Như vậy, trong mọi trường hợp, $Q(h, k)$ đều xác định không âm. □

Nhận thấy rằng, đối với tính xác định dương của một dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, chúng ta sẽ có đặc trưng sau đây:

$$Q(h, k) \text{ xác định dương} \Leftrightarrow a > 0 \text{ và } ac - b^2 > 0.$$

Phép chứng minh cho khẳng định này được thực hiện tương tự như Kết quả 4.10). Trên thực tế, nó đơn giản hơn rất nhiều. Mặt khác, ví dụ $Q(h, k) = -k^2$ cho thấy rằng các điều kiện $a \geq 0$ và $ac - b^2 \geq 0$ là không đủ để đảm bảo $Q(h, k)$ là xác định không âm.

Số thực $\Delta = ac - b^2$ được gọi là **biệt thức của dạng toàn phương bậc hai** $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ (Dạng toàn phương bậc hai $ah^2 + 2bhk + ck^2$ tương ứng với đa thức bậc hai $ax^2 + 2bx + c$, với biệt thức cổ điển là $(2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$). Lý do chúng ta đã bỏ qua hằng số 4 và quan trọng hơn là việc đảo ngược dấu khi chúng ta định nghĩa biệt thức của $Q(h, k)$ là do mối liên hệ của nó với lý thuyết ma trận. Mối liên hệ này sẽ được giải thích trong các nhận xét trình bày ở phần cuối của tiêu mục này. Khái niệm biệt thức mà chúng ta vừa định nghĩa có thể dễ dàng tổng quát hóa lên cho trường hợp các dạng toàn phương với nhiều hơn hai biến).

Trong trường hợp $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D , với mọi $(x_0, y_0) \in D$, chúng ta sẽ định nghĩa **biệt thức của f tại (x_0, y_0)** là biệt thức của dạng Hessian của f tại (x_0, y_0) và kí hiệu nó lại bởi $\Delta f(x_0, y_0)$.

Nói cách khác,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

Một hệ quả trực tiếp của Kết quả 4.9) và Kết quả 4.10) là tiêu chuẩn thực hành sau đây cho tính lồi.

Kết quả 4.11.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và lồi và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D .

Khi đó,

$$f \text{ lồi trên } D \Leftrightarrow f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0, f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0 \text{ và } \Delta f(x_0, y_0) \geq 0 \text{ với mọi } (x_0, y_0) \in D.$$

Chứng minh kết quả 4.11.

Từ Kết quả 4.10), chúng ta có thể nhận thấy rằng dạng Hessian của f sẽ xác định không âm nếu và chỉ nếu $f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$ và $\Delta f(x_0, y_0) \geq 0$ với mọi $(x_0, y_0) \in D$. Như vậy, kết quả mong muốn có thể được suy ra trực tiếp từ Kết quả 4.9). $\square$

Nhận xét,

(i) Theo quan điểm của Kết quả 4.9), chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm như trong Kết quả 4.11) thì tính dương của $f_{xx}(x_0, y_0)$ và $\Delta f(x_0, y_0)$ với mọi $(x_0, y_0) \in D$ sẽ kéo theo tính lồi nghiêm ngặt của f trên D . Tuy nhiên, ví dụ $f(x, y) = x^4 + y^4$ cho thấy rằng chiều ngược lại nói chung là không đúng.

(ii) Việc nghiên cứu các dạng toàn phương bậc hai có liên quan chặt chẽ với các nghiên cứu về các ma trận đối xứng thực 2×2 .

Thật vậy, dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các ma trận

$$h^T A h, \text{ trong đó } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ và } h = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix},$$

trong đó, như thường lệ, h^T biểu thị ma trận chuyển vị $[h \quad k]$ của h .

Trong cách thiết lập này, biệt thức Δ của $Q(h, k)$ chính là định thức của A . Lưu ý rằng điều kiện để có tính xác định không âm trong Kết quả 4.10), cụ thể là $a \geq 0, c \geq 0$ và $ac - b^2 \geq 0$, cũng có thể được hình thành bằng cách lưu ý rằng **các phần phụ chính của A** là không âm (Nói chung, đối với bất kì một ma trận nào, một **phần phụ** được định nghĩa là định thức của một ma trận con vuông của nó. Nếu các hàng và các cột được chọn để tạo ra ma trận con có cùng chỉ số thì nó sẽ được gọi là một **phần phụ chính**. Ngoài ra, nếu các chỉ số này là liên tiếp và bắt đầu từ 1 thì nó sẽ được gọi là một **phần phụ chính hàng đầu**). Mặt khác, điều kiện để có tính xác định dương, cụ thể là $a > 0$ và $ac - b^2 > 0$, có thể được hình thành bằng cách lưu ý rằng các phần phụ chính hàng đầu của A là dương.

Trong trường hợp $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D , **ma trận đối xứng thực 2×2 tương ứng với dạng Hessian của f tại $(x_0, y_0) \in D$** được xác định bởi

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Về mặt lịch sử, ma trận bên trái thường được gọi là **ma trận Hessian của f tại (x_0, y_0)** và, trên thực tế, đây cũng chính là lý do tại sao chúng ta lại gọi dạng toàn phương bậc hai liên kết là dạng Hessian của f tại (x_0, y_0) . Lưu ý rằng biệt thức của f tại (x_0, y_0) cũng chính là định thức của ma trận Hessian của f tại (x_0, y_0) .

5. Phép tính vi phân hàm ba biến

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ trình bày ngắn gọn cách mà các lý thuyết đã phát triển từ trước cho đến nay trong bài viết này có thể được mở rộng lên cho các hàm ba (hoặc nhiều hơn) biến. Các thông tin chi tiết sẽ chỉ được cung cấp khi phần mở rộng không rõ ràng. Trên đường đi này, chúng ta cũng sẽ gặp một số khái niệm và kết quả mới. Chẳng hạn, các khái niệm về mặt phẳng tiếp xúc và các đường pháp tuyến với các mặt cong cũng sẽ được giới thiệu ở đây. Các đồ thị của các hàm hai biến là trường hợp cụ thể của các mặt cong trong không gian 3 – chiều và chúng ta có thể đã thảo luận về các khái niệm này trong các mục trước. Nhưng như chúng ta sẽ thấy, các mặt phẳng tiếp xúc và các đường pháp tuyến có thể được hiểu rõ hơn trong bối cảnh của các hàm ba biến. Tương tự, trong ngữ cảnh của các hàm ba (hoặc nhiều hơn) biến, bài toán giải hai phương trình theo hai trong số các biến trở nên có ý nghĩa. Chúng ta cũng sẽ thấy rằng câu trả lời cho vấn đề này có thể được đưa ra bởi một dạng tương tự thích hợp của Định lý hàm ẩn.

Sự tương tự và các dạng mở rộng

Khái niệm đạo hàm riêng của một hàm ba biến f cũng có thể được định nghĩa theo cách tương tự. Tất nhiên, chúng ta sẽ có ba đạo hàm riêng khả dĩ, kí hiệu bởi f_x, f_y, f_z hoặc bởi

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Chúng ta cũng có một khái niệm tương tự về đạo hàm có hướng của f dọc theo một vector đơn vị $u = (u_1, u_2, u_3)$ trong $\mathbb{R}^3$. Định lý giá trị trung bình hai biến có thể được mở rộng dễ dàng lên thành Định lý giá trị trung bình ba biến.

Các đạo hàm riêng cấp cao của $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó $D \subseteq \mathbb{R}^3$, cũng có thể được định nghĩa theo cách tương tự như trong trường hợp hàm hai biến. Lần này, chúng ta sẽ có $3^2 = 9$ đạo hàm riêng cấp hai khả dĩ, cụ thể là $f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}$. Sự bằng nhau của các đạo hàm riêng tương ứng với hai biến bất kì trong các chỉ số dưới chỉ khác nhau về thứ tự của chúng tại các điểm P_0 , trong đó ít nhất một trong số chúng tồn tại trong $S_r(P_0)$ với một số $r > 0$ nào đó và liên tục tại P_0 . Nói cách khác, chúng ta sẽ có Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp đối với các hàm ba biến tương tự với kết quả tương ứng đối với các hàm hai biến (Kết quả 1.7). Ngoài ra, cái trước có thể được chứng minh như là hệ quả của cái sau. Chẳng hạn, để chứng minh rằng $f_{xy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yx}(x_0, y_0, z_0)$, chúng ta chỉ cần xét hàm hai biến xác định bởi $(x, y) \mapsto f(x, y, z_0)$ và áp dụng Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp (Kết quả 1.7). Như một hệ quả, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^3$ là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$ thì, với mọi hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có sự bằng nhau của hai đạo hàm riêng cấp n bất kì của f mà các biến trong chỉ số chỉ khác nhau về thứ tự, miễn là tất cả các đạo hàm riêng cấp $\leq n$ của f đều tồn tại và liên tục trên D .

Trong một trường hợp như vậy, một đạo hàm cấp n điển hình của f tại $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ có thể được viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}(P_0) = \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}(x_0, y_0, z_0),$$

trong đó p, q, r là các số nguyên không âm với $p + q + r = n$.

Một cách tiếp cận khác để chứng minh Định lý đạo hàm riêng hỗn hợp cho các hàm ba biến bằng cách sử dụng “Định lý giá trị trung bình cho các khối lập phương”. Nói cách khác, chúng ta cũng sẽ thu được các dạng tương tự của Định lý Rolle cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.4) và Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.5). Những dạng tương tự này có thể được xây dựng và chứng minh một cách dễ dàng cho các hàm gồm ba biến trở lên. Để đạt được điều này, sẽ thật tiện lợi khi sử dụng cách kí hiệu đã được giới thiệu trong mục **1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó** trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” và lưu ý rằng đại lượng $f(b, d) + f(a, c) - f(b, c) - f(a, d)$ xuất hiện trong phát biểu của Định lý giá trị trung bình cho các hình chữ nhật (Kết quả 1.5) có thể được biểu diễn ngắn gọn lại dưới dạng $\Delta_{(a,c)}^{(b,d)} f$.

Đạo hàm có hướng liên tiếp (dọc theo cùng một vector đơn vị) sẽ đưa chúng ta đến khái niệm về các đạo hàm có hướng cấp cao của một hàm ba biến. Khái niệm này hoạt động cũng giống như trong trường hợp hàm hai biến. Chúng ta cũng có thể dễ dàng xây dựng và chứng minh Công thức Taylor ba biến cho các đạo hàm có hướng cấp cao và, do đó, thu được các kết quả tương tự như Kết quả 1.8) và Kết quả 1.9).

Khái niệm về tính khả vi cũng có thể được mở rộng một cách dễ dàng.

Thật vậy, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^3$ và (x_0, y_0, z_0) là một điểm trong của D thì $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ **khả vi tại (x_0, y_0, z_0)** nếu tồn tại một $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$\lim_{(h,k,l) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) - \alpha_1 h - \alpha_2 k - \alpha_3 l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0.$$

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ gọi bộ ba $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là đạo hàm toàn phần của f tại (x_0, y_0, z_0) . Nếu f khả vi tại (x_0, y_0, z_0) thì f_x, f_y, f_z sẽ tồn tại tại (x_0, y_0, z_0) và tương ứng bằng $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Nói cách khác, **gradient** ∇f của f tồn tại tại (x_0, y_0, z_0) và

$$\text{đạo hàm toàn phần của } f \text{ tại } (x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0).$$

Một dạng tương tự của Bổ đề Carathéodory hai biến (Kết quả 2.1) cũng có thể dễ dàng thu được trong tình huống trên. Điều này chỉ ra rằng tính khả vi của f tại (x_0, y_0, z_0) sẽ tương đương với sự tồn tại của một **bộ ba** (f_1, f_2, f_3) **gồm các hàm liên kết với f và (x_0, y_0, z_0)** , nghĩa là, tồn tại các hàm $f_1, f_2, f_3: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại (x_0, y_0, z_0) sao cho, với mọi $(x, y, z) \in D$, hiệu $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ sẽ bằng

$$(x - x_0)f_1(x, y, z) + (y - y_0)f_2(x, y, z) + (z - z_0)f_3(x, y, z).$$

Nhận thấy rằng nếu các điều kiện này được thỏa mãn thì chúng ta nhất thiết sẽ phải có $f_1(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_2(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0)$, $f_3(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0)$. Sự tồn tại của tất cả các đạo hàm riêng trong $S_r(x_0, y_0, z_0)$ đối với một số $r > 0$ nào đó và tính liên tục của hai trong số chúng tại (x_0, y_0, z_0) là đủ để f khả vi tại (x_0, y_0, z_0) . Phép chứng minh cho điều này được thực hiện tương tự như phép chứng minh của kết quả tương ứng đối với các hàm hai biến (Kết quả 2.4).

Như vậy, nếu f_x và f_y liên tục tại (x_0, y_0, z_0) thì chúng ta có thể viết

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = A(x, y, z) + B(y, z) + C(z),$$

trong đó $A(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y, z)$, $B(y, z) = f(x_0, y, z) - f(x_0, y_0, z)$, $C(z) = f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)$.

Kế tiếp, các hàm $f_1, f_2, f_3: D \rightarrow \mathbb{R}$ có thể được xác định bằng cách sử dụng các hàm A, B, C và chúng ta cũng sẽ tiến hành theo các bước tương tự giống như trong phép chứng minh của Kết quả 2.4). Điều kiện cần cho tính khả vi của f hoàn toàn giống như trong trường hợp các hàm hai biến.

Như vậy, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại (x_0, y_0, z_0) thì f sẽ liên tục tại (x_0, y_0, z_0) và, với mọi vector đơn vị $u = (u_1, u_2, u_3)$ trong $\mathbb{R}^3$, đạo hàm có hướng $D_u f(x_0, y_0, z_0)$ tồn tại và bằng với $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot u$.

Các kết quả quan trọng chẳng hạn như các phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn cũng như Công thức Taylor và Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp vẫn đúng đối với các hàm ba (hoặc nhiều hơn) biến và đóng một vai trò quan trọng. Mặc dù chúng ta đã xem xét Định lý hàm ẩn ba biến trong Kết quả 3.2.12) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”. Tuy nhiên, phiên bản cổ điển được đưa ra dưới đây dễ nhớ hơn và được sử dụng rộng rãi hơn trong thực tế.

Kết quả 5.1. (Dạng cổ điển của Định lý hàm ẩn ba biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f có các đạo hàm riêng liên tục trên $S_r(x_0, y_0, z_0)$ với một số $r > 0$ nào đó với $S_r(x_0, y_0, z_0) \subseteq D$ và $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, trong khi $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Khi đó, chúng ta có thể giải phương trình $f(x, y, z) = 0$ cho z theo x và y trong một lân cận nào đó xung quanh (x_0, y_0) , nghĩa là, tồn tại một số thực $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\zeta: S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\zeta(x_0, y_0) = z_0$ sao cho $(x, y, \zeta(x, y)) \in S_r(x_0, y_0, z_0)$ và $f(x, y, \zeta(x, y)) = 0$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$.

Ngoài ra, ζ sẽ khả vi trên $S_\delta(x_0, y_0)$ và, với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có $f_z(x, y, \zeta(x, y)) \neq 0$ và

$$\nabla \zeta(x, y) = \left(-\frac{f_x(x, y, \zeta(x, y))}{f_z(x, y, \zeta(x, y))}, -\frac{f_y(x, y, \zeta(x, y))}{f_z(x, y, \zeta(x, y))} \right).$$

Chứng minh kết quả 5.1.

Nhận thấy rằng khẳng định này có thể được chứng minh giống như trong Kết quả 2.7): tính liên tục của các đạo hàm riêng sẽ được sử dụng để xác minh các giả thiết của Kết quả 3.2.12) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**” là đúng. Điều này sẽ tạo ra một hàm liên tục ζ có các tính chất mong muốn. Ngoài ra, nếu (f_1, f_2, f_3) là một bộ ba gồm các hàm liên kết với f và (x_0, y_0, z_0) và chúng ta thay thế $z = \zeta(x, y)$ thì $(-f_1/f_3, -f_2/f_3)$ sẽ trở thành một cặp các hàm liên kết với ζ và (x_0, y_0) . Như vậy, ζ sẽ khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla \zeta(x_0, y_0)$ được xác định bởi công thức mong muốn. Nhờ tính liên tục của f_z trên $S_r(x_0, y_0, z_0)$, tính khả vi của ζ và công thức cho $\nabla \zeta$ có thể mở rộng cho tất cả các điểm của $S_\delta(x_0, y_0)$. $\square$

Một phân tích cẩn thận về phép chứng minh của Kết quả 5.1) cho thấy rằng một giả thiết yếu hơn một chút là đủ, cụ thể là, thay vì yêu cầu ba đạo hàm riêng của f liên tục, chỉ cần f_z và một trong hai f_x và f_y liên tục là đủ.

Nhận xét rằng, như trong nhận xét của Kết quả 2.7), chúng ta cũng có một dạng tương tự đơn giản của phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn ba biến tương ứng với việc “giải” phương trình $f(x, y, z) = 0$ cho y theo x và z hoặc cho x theo y và z , trong một lân cận xung quanh $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Giả thiết chính ở đây đó là $f_y(P_0) \neq 0$ hoặc $f_x(P_0) \neq 0$, thay vì $f_z(P_0) \neq 0$. Chúng ta cũng có thể kết hợp ba kết quả này lại bằng cách sử dụng giả thiết chính là $\nabla f(P_0) \neq 0$:

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f có các đạo hàm riêng liên tục trên $S_r(x_0, y_0, z_0)$ với một số $r > 0$ nào đó với $S_r(x_0, y_0, z_0) \subseteq D$ và $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, trong khi $\nabla f(P_0) \neq 0$.

Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ và các hàm khả vi $x, y, z: S_\delta(u_0, v_0) \rightarrow \mathbb{R}$ với $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) = P_0$ sao cho $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S_r(x_0, y_0, z_0)$ và $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ với mọi $(u, v) \in S_\delta(u_0, v_0)$.

Ngoài ra, tại bất kì một $(u, v) \in S_\delta(u_0, v_0)$ nào, các vector (x_u, y_u, z_u) và (x_v, y_v, z_v) đều khác không và cũng không phải là bội của nhau, và chúng ta sẽ có

$$f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u = 0 \text{ và } f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v = 0,$$

trong đó các đạo hàm riêng của x và y đều được tính tại (u, v) , trong khi các đạo hàm riêng của f lại được tính tại $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$.

Phiên bản cổ điển của Công thức Taylor ba biến khá giống với Công thức Taylor hai biến với các đa thức ba biến tham gia vào bức tranh này. Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho các hàm thực ba biến cũng có thể được xây dựng trong các tình huống khác nhau tương tự như trong Kết quả 3.5).

Chẳng hạn, nếu chúng ta xem xét các hàm hợp có dạng $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ thì Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp phát biểu rằng

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Tương tự, nếu $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ thì chúng ta sẽ có

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

và

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Tất cả các đẳng thức nêu ở trên đều đúng khi các đạo hàm được tính tại các điểm thích hợp được giả định là các điểm trong của các tập xác định của các hàm liên quan và, hơn nữa, tất cả các hàm đều được giả định là khả vi tại các điểm trong này.

Như là một ứng dụng của Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp, chúng ta sẽ có thể thu được một dạng mở rộng tự nhiên của phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn ba biến, cho phép chúng ta “giải” hai phương trình theo ba biến, tạm giả sử là $f(x, y, z) = 0$ và $g(x, y, z) = 0$, cho y và z theo x .

Kết quả 5.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^3$ và (x_0, y_0, z_0) là một điểm trong của D . Giả sử $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm có các đạo hàm riêng liên tục trên $S_r(x_0, y_0, z_0)$ với một số $r > 0$ nào đó với $S_r(x_0, y_0, z_0) \subseteq D$.

Khi đó, nếu $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$ và

$$f_y(x_0, y_0, z_0)g_z(x_0, y_0, z_0) - f_z(x_0, y_0, z_0)g_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

thì sẽ tồn tại một số thực $\delta > 0$ và các hàm liên tục $\phi, \psi: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\phi(x_0) = y_0$ và $\psi(x_0) = z_0$ sao cho $(x, \phi(x), \psi(x)) \in S_r(x_0, y_0, z_0)$ và $f(x, \phi(x), \psi(x)) = g(x, \phi(x), \psi(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ngoài ra, ϕ và ψ sẽ khả vi trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và, với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, chúng ta sẽ có $f_y g_z - f_z g_y \neq 0$ tại $(x, \phi(x), \psi(x))$ và, hơn nữa,

$$\phi'(x) = \frac{f_z g_x - f_x g_z}{f_y g_z - f_z g_y} \text{ và } \psi'(x) = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{f_y g_z - f_z g_y},$$

trong đó các đạo hàm riêng của f và g sẽ được tính tại $(x, \phi(x), \psi(x))$.

Chứng minh kết quả 5.2.

Kí hiệu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Do $f_y g_z - f_z g_y \neq 0$ tại P_0 nên cả $f_z(P_0)$ và $g_z(P_0)$ đều không thể bằng không. Giả sử $f_z(P_0) \neq 0$. Do các đạo hàm riêng của f và g đều liên tục trên $S_r(x_0, y_0, z_0)$ nên, bằng cách thay r

bởi một giá trị dương nhỏ hơn, chúng ta có thể giả sử rằng $f_y g_z - f_z g_y \neq 0$ và $f_z \neq 0$ tại mọi điểm của $S_r(x_0, y_0, z_0)$. Từ Dạng cô điển của Định lý hàm ẩn ba biến (Kết quả 5.1), tồn tại một số thực $t > 0$ và một hàm $\zeta: S_t(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\zeta(x_0, y_0) = z_0$ sao cho $(x, y, \zeta(x, y)) \in S_r(x_0, y_0, z_0)$ và $f(x, y, \zeta(x, y)) = 0$ với mọi $(x, y) \in S_t(x_0, y_0)$. Ngoài ra, ζ sẽ khả vi trên $S_t(x_0, y_0)$ và, với mọi $(x, y) \in S_t(x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có $\nabla \zeta = (-f_x/f_z, -f_y/f_z)$, trong đó các đạo hàm riêng của f được tính tại $(x, y, \zeta(x, y))$.

Kí hiệu $h: S_t(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $h(x, y) = g(x, y, \zeta(x, y))$.

Kế tiếp, $h(x_0, y_0) = g(P_0) = 0$ và, từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho các hàm ba biến, h sẽ khả vi trên $S_t(x_0, y_0)$ với

$$h_y = g_y + g_z \zeta_y = g_y + g_z(-f_y/f_z) = -(f_y g_z - f_z g_y)/f_z,$$

trong đó các đạo hàm riêng của f và g được tính tại $(x, y, \zeta(x, y))$.

Đặc biệt, h_y liên tục và $h_y \neq 0$ trên $S_t(x_0, y_0)$.

Như vậy, bằng cách áp dụng phiên bản cô điển của Định lý hàm ẩn (Kết quả 2.7) cho hàm h , tồn tại một số thực $\delta > 0$ và một hàm $\eta: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\eta(x_0) = y_0$ sao cho $(x, \eta(x)) \in S_t(x_0, y_0)$ và $h(x, \eta(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ngoài ra, η sẽ khả vi và $\eta'(x) = -h_x(x, \eta(x))/h_y(x, \eta(x))$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Bây giờ, kí hiệu $\phi, \psi: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $\phi(x) = \eta(x)$ và $\psi(x) = \zeta(x, \eta(x))$. Chúng ta có thể dễ dàng xác minh được rằng các hàm ϕ và ψ thỏa mãn các tính chất mong muốn.

Phép chứng minh cho trường hợp $g_z(P_0) \neq 0$ được thực hiện hoàn toàn tương tự. □

Nhận xét rằng, như trong nhận xét của Kết quả 5.1), chúng ta sẽ có một dạng tương tự trực tiếp của Kết quả 5.2), tương ứng với việc “giải” hai phương trình $f(x, y, z) = 0$ và $g(x, y, z) = 0$ cho x và z theo y hoặc cho x và y theo z , trong một lân cận xung quanh $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Giả thiết chính ở đây đó là $f_x g_z - f_z g_x \neq 0$ tại P_0 hoặc $f_x g_y - f_y g_x \neq 0$ tại P_0 , thay vì $f_y g_z - f_z g_y \neq 0$ tại P_0 . Chúng ta cũng có thể kết hợp ba trường hợp này lại với nhau để đi đến phiên bản sau của Kết quả 5.2):

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^3$ và $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trong của D . Giả sử $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm có đạo hàm riêng liên tục trên $S_r(P_0)$ với một số $r > 0$ nào đó với $S_r(P_0) \subseteq D$.

Khi đó, nếu $f(P_0) = g(P_0) = 0$ và có một phần phụ 2×2 nào đó của ma trận 2×3

$$\begin{pmatrix} f_x(P_0) & f_y(P_0) & f_z(P_0) \\ g_x(P_0) & g_y(P_0) & g_z(P_0) \end{pmatrix}$$

khác không (hoặc tương đương, các hàng của nó, cụ thể là $\nabla f(P_0)$ và $\nabla g(P_0)$, không phải là bội của nhau) thì sẽ tồn tại các số thực $\delta > 0, t_0 \in \mathbb{R}$ và các hàm khả vi $x, y, z: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = P_0$ sao cho $(x(t), y(t), z(t)) \in S_r(P_0)$ và

$$f(x(t), y(t), z(t)) = g(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0} \text{ với mọi } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Ngoài ra, $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ và

$$f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0$$

cũng như

$$g_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + g_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0$$

với mọi $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Phiên bản thống nhất này có thể được so sánh với phiên bản thống nhất của phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn cho các hàm hai biến, đã được đưa ra trong phần nhận xét của Kết quả 5.1). Một cách tương tự, chúng ta cũng có thể xây dựng và chứng minh một phiên bản tổng quát hơn của Định lý hàm ẩn để giải m phương trình theo n biến, trong đó $m, n \in \mathbb{N}$ với $m < n$. Trường hợp đặc biệt $n = 2m$ có thể được sử dụng để chứng minh một phiên bản tổng quát của cái gọi là **Định lý hàm ngược** để đảo ngược m hàm theo m biến.

Các mặt phẳng tiếp xúc và các đường pháp tuyến của các mặt cong

Trước tiên chúng ta hãy xem xét lại khái niệm đường tiếp tuyến của một đường cong như đã thảo luận trong các khóa học về các phép tính một biến.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D . Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại c thì đường thẳng xác định bởi

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

sẽ được gọi là **đường tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$, $x \in D$, tại điểm $(c, f(c))$** .

Thông thường, chúng ta sẽ mở rộng khái niệm này cho các đường cong được xác định theo tham số và các đường cong được xác định ngầm như sau:

Giả sử C là một đường cong được xác định theo tham số cho bởi $(x(t), y(t))$, $t \in D$, và t_0 là một điểm trong của D sao cho cả x và y đều khả vi tại t_0 và $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$.

Khi đó, đường tiếp tuyến của C tại điểm $(x(t_0), y(t_0))$ được định nghĩa là đường thẳng xác định bởi

$$(y - y(t_0))x'(t_0) = (x - x(t_0))y'(t_0).$$

Lưu ý rằng đường thẳng này có thể được xác định theo tham số bởi

$$(x(t_0), y(t_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0)), \text{ trong đó } \lambda \text{ thay đổi trên } \mathbb{R}.$$

Nói cách khác, đây là đường thẳng đi qua $(x(t_0), y(t_0))$ và có hướng là vector $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Trên thực tế, đây cũng chính là lý do tại sao, trong ngữ cảnh của các đường cong, chúng ta thường gọi $(x'(t_0), y'(t_0))$ là **vector tiếp tuyến của C tại $(x(t_0), y(t_0))$** khi chúng ta giới thiệu khái niệm về điểm yên ngựa trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**”. Đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ đi qua $(x(t_0), y(t_0))$ và

vuông góc với đường tiếp tuyến của C tại điểm $(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là **đường pháp tuyến của C** tại $(x(t_0), y(t_0))$.

Lưu ý rằng đường pháp tuyến này có thể được xác định theo tham số bởi

$$(x(t_0), y(t_0)) + \lambda(y'(t_0), -x'(t_0)), \text{ trong đó } \lambda \text{ thay đổi trên } \mathbb{R}.$$

Kế tiếp, chúng ta sẽ xem xét một đường cong được xác định ngầm, nghĩa là, một đường cong trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi một phương trình có dạng $F(x, y) = 0, (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2$.

Khái niệm về một tiếp tuyến của một đường cong như vậy được định nghĩa trong các phép tính một biến, nếu có thể, theo một cách khá đặc biệt.

Thật vậy, chúng ta có thể thực hiện “vi phân ngầm” đối với x hoặc đối với y để đi đến một phương trình có dạng

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ hoặc } R(x, y) + S(x, y) \frac{dx}{dy} = 0.$$

Bây giờ, nếu (x_0, y_0) là một điểm nằm trên đường cong sao cho $(x_0, y_0) \in E$ và $F(x_0, y_0) = 0$ thì **đường tiếp tuyến của đường cong tại (x_0, y_0)** là đường thẳng xác định bởi

$$y - y_0 = -\frac{P(x_0, y_0)}{Q(x_0, y_0)}(x - x_0) \text{ hoặc } x - x_0 = -\frac{R(x_0, y_0)}{S(x_0, y_0)}(y - y_0),$$

miễn là $Q(x_0, y_0) \neq 0$ hoặc $S(x_0, y_0) \neq 0$.

Cách tiếp cận này giờ đây đã có thể được sắp xếp lại một cách hợp lý dưới ánh sáng của lý thuyết hàm hai biến. Đầu tiên, quá trình “vi phân ngầm” có thể được chứng minh một cách dễ dàng bằng cách sử dụng phiên bản cổ điển của Định lý hàm ẩn (Kết quả 2.7). Kế tiếp, điều kiện $Q(x_0, y_0) \neq 0$ hoặc $S(x_0, y_0) \neq 0$ sẽ tương ứng với điều kiện nội tại $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, hoặc $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, hoặc tương đương, $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Tất nhiên, đây là điều kiện cần thiết để chúng ta có thể áp dụng Định lý hàm ẩn. Khi điều kiện này đã được thỏa mãn, **đường tiếp tuyến của đường cong $F(x, y) = 0, (x, y) \in E$, tại điểm (x_0, y_0)** là đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

trong khi **đường pháp tuyến của đường cong $F(x, y) = 0, (x, y) \in E$, tại điểm (x_0, y_0)** là đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Theo cách tương tự, khái niệm về một mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của một hàm hai biến cũng có thể được coi như là một trường hợp đặc biệt của khái niệm mặt phẳng tiếp xúc với một mặt được xác định ngầm bởi $f(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D$, trong đó $D \subseteq \mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Nói một cách chính xác hơn, nếu (x_0, y_0, z_0) là một điểm trong của D sao cho f khả vi tại (x_0, y_0, z_0) và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ thì chúng ta sẽ định nghĩa **mặt phẳng tiếp xúc với mặt $f(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in$**

D , tại điểm (x_0, y_0, z_0) là mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Đặc biệt, nếu $E \subseteq \mathbb{R}^2$ và $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi tại một điểm trong (x_0, y_0) của E thì **mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của F tại điểm $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$** được định nghĩa là mặt phẳng tiếp xúc với mặt xác định bởi $z - F(x, y) = 0$, $(x, y) \in E$, cụ thể là mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$z - F(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Những khái niệm này có thể được mở rộng dễ dàng cho trường hợp các hàm n biến với mọi $n > 1$. Như vậy, tương ứng với một hàm n biến và một điểm trong miền xác định mà tại đó nó khả vi với gradient khác 0, chúng ta sẽ có một **siêu phẳng tiếp xúc** trong $\mathbb{R}^n$ xác định bởi một phương trình tuyến tính theo n biến.

Khái niệm về một vector tiếp tuyến với một đường cong xác định theo tham số trong $\mathbb{R}^2$ cũng có thể được mở rộng sang cho các đường cong xác định theo tham số trong $\mathbb{R}^3$. Như vậy, nếu C là một đường cong xác định theo tham số trong $\mathbb{R}^3$ xác định bởi $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$, trong đó $D \subseteq \mathbb{R}$, t_0 là một điểm trong của D sao cho $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại t_0 và $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$ thì $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ sẽ được gọi là **vector tiếp tuyến của C tại điểm $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$** .

Đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định theo tham số bởi

$$P_0 + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \text{ trong đó } \lambda \text{ thay đổi trên } \mathbb{R},$$

sẽ được gọi là **đường tiếp tuyến của C tại P_0** .

Có thể sẽ rất thú vị khi chúng ta lưu ý rằng các đường tiếp tuyến tại một điểm với các đường cong nằm trên một mặt sẽ được chứa trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt tại điểm đó. Nói một cách chính xác hơn, giả sử S là một mặt được xác định ngầm trong $\mathbb{R}^3$ bởi $f(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in D$, và C là một đường cong xác định theo tham số bởi $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$, sao cho C nằm trong S , nghĩa là, $(x(t), y(t), z(t)) \in S$ với mọi $t \in D$.

Giả sử t_0 là một điểm trong của D và $(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Giả sử vector tiếp tuyến $v_0 = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ với C tại $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ đã được xác định. Bây giờ, nếu P_0 là một điểm trong của D và f khả vi tại P_0 thì chúng ta có thể khẳng định rằng $P_0 + \lambda v_0$ nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_0 với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Để nhận thấy điều này, chúng ta cần lưu ý rằng do C nằm trên D nên chúng ta sẽ có $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ với mọi $t \in D$.

Như vậy, từ Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp,

$$f_x(P_0)x'(t_0) + f_y(P_0)y'(t_0) + f_z(P_0)z'(t_0) = 0, \text{ nghĩa là, } \nabla f(P_0) \cdot v_0 = 0.$$

Theo đó, nếu chúng ta viết $P_0 + \lambda v_0 = (x, y, z)$ thì chúng ta sẽ có

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của khẳng định nêu ở trên.

Trong trường hợp $\nabla f(P_0) \neq 0$, đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định theo tham số bởi

$$P_0 + \lambda \nabla f(P_0), \text{ trong đó } \lambda \text{ thay đổi trên } \mathbb{R},$$

sẽ được gọi là đường pháp tuyến với S tại điểm P_0 .

Lưu ý rằng, trong trường hợp $f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)$ đều khác 0, đường pháp tuyến cũng có thể được mô tả bởi các phương trình

$$\frac{x - x_0}{f_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(P_0)}.$$

Giả sử S là một mặt xác định theo tham số cho bởi $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in E$, trong đó $E \subseteq \mathbb{R}^2$ và các hàm $x, y, z: E \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại một điểm trong $Q_0 = (u_0, v_0)$ của E . Giả sử các vector $(x_u(Q_0), y_u(Q_0), z_u(Q_0))$ và $(x_v(Q_0), y_v(Q_0), z_v(Q_0))$ đều khác không và không phải là bội của nhau. Một cách tương đương, giả sử $n_0 = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$, trong đó tất cả các cặp đều được tính tại Q_0 , là một vector khác không trong $\mathbb{R}^3$.

Kí hiệu $P_0 = (x(Q_0), y(Q_0), z(Q_0))$.

Khi đó, mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_0 được định nghĩa là mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định theo tham số bởi

$$P_0 + \lambda(x_u(Q_0), y_u(Q_0), z_u(Q_0)) + \mu(x_v(Q_0), y_v(Q_0), z_v(Q_0)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ngoài ra, đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định theo tham số bởi

$$P_0 + \lambda n_0, \text{ trong đó } \lambda \text{ thay đổi trên } \mathbb{R},$$

sẽ được gọi là **đường pháp tuyến của S tại P_0** .

Tính lồi, lõm và các dạng toàn phương bậc ba

Các khái niệm về tính lồi và lõm cũng có thể được định nghĩa trong ngữ cảnh của các hàm thực n biến. Không có khó khăn gì trong việc mở rộng khái niệm về tính đơn điệu của gradient và sử dụng nó để mô tả tính lồi hoặc lõm theo chính xác cái cách mà chúng ta đã làm trong mục 3. **Định lý giá trị trung bình và Công thức Taylor.**

Tuy nhiên, các đặc trưng theo các đạo hàm riêng cấp hai sẽ cần được giải thích lại đôi chút. Để bắt đầu, thay cho các dạng toàn phương bậc hai, chúng ta sẽ phải xem xét **các dạng toàn phương bậc ba**, nghĩa là, các đa thức thuần nhất với tổng bậc bằng 2 theo ba biến. Nếu các biến được kí hiệu lại bởi h, k, l thì một dạng toàn phương bậc ba sẽ trông giống như

$$Q(h, k, l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2phk + 2qkl + 2rlh,$$

trong đó a, b, c, p, q, r là các số thực.

Trong các kí hiệu ma trận, $Q(h, k, l)$ có thể được biểu diễn lại dưới dạng tích ma trận

$$h^T A h, \text{ trong đó } A = \begin{bmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{bmatrix} \text{ và } h = \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix},$$

trong đó h^T biểu thị cho ma trận chuyển vị $[h \ k \ l]$ của h .

Chúng ta có thể coi A như là ma trận đối xứng 3×3 tương ứng với $Q(h, k, l)$.

Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^3$ là mở và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của f tồn tại và liên tục trên D thì, với mọi $(x_0, y_0, z_0) \in D$, dạng toàn phương bậc ba liên kết

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2kl \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2lh \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x},$$

trong đó tất cả các đạo hàm riêng cấp hai đều được tính tại (x_0, y_0, z_0) , được gọi là **dạng Hessian của f tại (x_0, y_0, z_0)** . Ma trận đối xứng 3×3 tương ứng sẽ được gọi là **ma trận Hessian của f tại (x_0, y_0, z_0)** .

Nói chung, một dạng toàn phương bậc ba $Q(h, k, l)$ hoặc ma trận đối xứng 3×3 A tương ứng sẽ được gọi là **xác định không âm** nếu $Q(s, t, u) \geq 0$ với mọi $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$. Với $D \subseteq \mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ như trên, chúng ta sẽ nói rằng dạng Hessian của f là **xác định không âm trên D** nếu dạng Hessian của f tại (x_0, y_0, z_0) xác định không âm, với mọi $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Khi D là lồi và mở, tính lồi của f trên D sẽ tương đương với điều kiện là dạng Hessian của f là xác định không âm trên D . Điều này có thể được chứng minh tương tự như trong Kết quả 4.9).

Dạng tương tự của Kết quả 4.10) đưa ra một đặc trưng đại số cho tính xác định không âm không thật rõ ràng và, vì lý do này, chúng ta sẽ đưa ra một phát biểu và phép chứng minh đầy đủ cho kết quả này dưới đây:

Kết quả 5.3.

Giả sử $Q(h, k, l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2phk + 2qkl + 2rlh$ là một dạng toàn phương bậc ba theo các biến h, k, l với các hệ số a, b, c, p, q, r trong $\mathbb{R}$.

Kí hiệu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{vmatrix} = r(pq - br) + q(pr - aq) + c(ab - p^2)$$

là định thức của ma trận 3×3 tương ứng.

Khi đó,

$$Q(h, k, l) \text{ xác định không âm} \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, ab - p^2 \geq 0, bc - q^2 \geq 0, ac - r^2 \geq 0, \Delta \geq 0.$$

Chứng minh kết quả 5.3.

Giả sử $Q(h, k, l)$ xác định không âm. Khi đó, các dạng toàn phương bậc hai $Q(h, k, 0)$, $Q(h, 0, l)$, $Q(0, k, l)$ là xác định không âm. Do đó, từ Kết quả 4.10), mỗi một trong $a, b, c, ab - p^2, bc - q^2, ac - r^2$ đều không âm. Ngoài ra, chúng ta có thể quan sát thấy rằng $Q(pq - br, pr - aq, ab - p^2) = (ab - p^2)\Delta$. Như vậy, nếu $ab - p^2 \neq 0$ thì $\Delta \geq 0$. Bằng cách hoán vị theo chu trình các biến h, k, l , chúng ta sẽ thu được $Q(bc - q^2, rq - pc, pq - br) = (bc - q^2)\Delta$ và $Q(rq - pc, ac - r^2, pr - aq) = (ac - r^2)\Delta$. Do đó, nếu $bc - q^2 \neq 0$ hoặc $ac - r^2 \neq 0$ thì $\Delta \geq 0$. Cuối cùng, giả sử $ab - p^2 = bc - q^2 = ac - r^2 = 0$. Bây giờ, nếu $a = 0$ thì chúng ta sẽ có $b = r = 0$. Tương tự, nếu $b = 0$ thì $p = q = 0$, trong khi nếu $c = 0$ thì $r = q = 0$. Điều này chỉ ra rằng nếu $abc = 0$ thì $\Delta = 0$. Kế tiếp, giả sử $abc \neq 0$. Xét $Q(p, -a, l) = 2l(pr - aq) + cl^2$. Do $Q(h, k, l)$ xác định không âm nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $2(pr - aq) + cl \geq 0$ nếu $l > 0$ và $2(pr - aq) + cl \leq 0$ nếu $l < 0$. Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $l \rightarrow 0^+$, chúng ta nhận thấy rằng $pr - aq \geq 0$ và, bằng cách chuyển qua giới hạn khi $l \rightarrow 0^-$, chúng ta cũng nhận thấy rằng $pr - aq \leq 0$. Do đó, $pr - aq = 0$, nghĩa là, $aq = pr$. Như vậy, $apr = p^2r = abr$ và, do đó, $pq = br$. Điều này chỉ ra rằng $pq - br = 0$, $pr - aq = 0$, $ab - p^2 = 0$. Như vậy, $\Delta = 0$.

Ngược lại, giả sử mỗi một trong $a, b, c, ab - p^2, bc - q^2, ac - r^2, \Delta$ đều không âm. Trong trường hợp $a = 0$, các bất đẳng thức $ab - p^2 \geq 0$ và $bc - q^2 \geq 0$ ngụ ý rằng $p = 0$ và $r = 0$. Như vậy, trong trường hợp này, $Q(h, k, l) = bk^2 + 2qkl + cl^2$ và biểu thức này xác định không âm theo Kết quả 4.10). Tương tự, nếu $b = 0$ thì $p = q = 0$, trong khi nếu $c = 0$ thì $r = q = 0$, và, trong cả hai trường hợp này, $Q(h, k, l)$ xác định không âm theo Kết quả 4.10). Giả sử $a > 0, b > 0, c > 0$.

Nhận thấy rằng nếu $ab - p^2 > 0$ thì đồng nhất thức

$$a(ab - p^2)Q(h, k, l) = (ab - p^2)(ah + pk + rl)^2 + [(ab - p^2)k + (aq - pr)l]^2 + a\Delta l^2$$

ngụ ý rằng $Q(h, k, l)$ xác định không âm.

Tương tự, nếu $bc - q^2 > 0$ thì

$$b(bc - q^2)Q(h, k, l) = (bc - q^2)(ph + bk + ql)^2 + [(bc - q^2)l + (br - pq)h]^2 + b\Delta h^2$$

ngụ ý rằng $Q(h, k, l)$ xác định không âm, trong khi nếu $ac - r^2 > 0$ thì

$$c(ac - r^2)Q(h, k, l) = (ac - r^2)(rh + qh + cl)^2 + [(ac - r^2)l + (pc - qr)k]^2 + r\Delta k^2$$

cũng ngụ ý rằng $Q(h, k, l)$ xác định không âm.

Cuối cùng, giả sử $ab - p^2 = bc - q^2 = ac - r^2 = 0$. Khi đó, $prq \neq 0$, bởi vì a, b, c là các số dương. Ngoài ra, $p^2r^2 = (ab)(ac) = a^2(bc) = a^2q^2$. Như vậy, $pr = \pm aq$. Mặt khác, $\Delta = 2q(pr - aq)$ và, do đó, nếu $pr = -aq$ thì $\Delta = -4aq^2 < 0$, vô lí. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $pr = aq$. Kết quả là $Q(h, k, l) = (ah + pk + rl)^2$. Điều này ngụ ý rằng $Q(h, k, l)$ xác định không âm. $\square$

Nhận thấy rằng, đối với tính xác định dương của một dạng toàn phương bậc ba $Q(h, k, l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2phk + 2qkl + 2rlh$, chúng ta sẽ có đặc trưng sau đây:

$$Q(h, k, l) \text{ xác định dương} \Leftrightarrow a > 0, ab - p^2 > 0, \Delta > 0,$$

trong đó Δ là định thức của ma trận đối xứng 3×3 A tương ứng với $Q(h, k, l)$.

Phép chứng minh cho khẳng định này được thực hiện tương tự như Kết quả 5.3). Trên thực tế, nó đơn giản hơn rất nhiều. Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng, như trong trường hợp các dạng toàn phương bậc hai, tính xác định không âm của $Q(h, k, l)$ có thể được đặc trưng bởi tính không âm của tất cả các phần phụ chính của A , trong khi tính xác định dương của $Q(h, k, l)$ có thể được đặc trưng bởi tính dương của tất cả các phần phụ chính hàng đầu của A . Nói chung, điều này cũng sẽ đúng cho các dạng toàn phương với số lượng bất kì.

Như một hệ quả của Kết quả 5.3), chúng ta sẽ thu được một điều kiện cần và đủ cho tính lồi của một hàm ba biến với các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục. Ngoài ra, chúng ta cũng có thể thu được một điều kiện đủ cho tính lồi nghiêm ngặt. Những kết quả này tương tự với các khẳng định nêu trong Kết quả 4.11) và phần nhận xét của nó.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, A course in Multivariable Calculus and Analysis, ????
- [2]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 2 – GIẢI TÍCH 2, ???/???/????
- [3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập II, ???/???/????
- [4]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm một biến, 10/01/2023.
- [5]. Trương Phước Nhân, Phép tính vi phân hàm một biến, 21/01/2023.
- [6]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm nhiều biến, 03/02/2023.